道路ネットワークの連結性の定量化と その最適補強問題

中山　晶一朗[1]・小林　俊一[2]・山口　裕通[3]

[1] 正会員　金沢大学教授　地球社会基盤学系（〒920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: nakayama@staff.kanazawa-u.ac.jp

[2] 正会員　金沢大学准教授　地球社会基盤学系（〒920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: koba@se.kanazawa-u.ac.jp

[3] 正会員　金沢大学助教　地球社会基盤学系（〒920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: hyamaguchi@se.kanazawa-u.ac.jp

道路ネットワークの連結性を評価するためには様々な要因を考慮する必要があるものの，最も基本的な連結性評価は道路どうしのつながりの定量化であろう．本研究では，道路ネットワーク内の道路リンクのつながり，つまり，狭い意味での道路ネットワークの連結性を定量化するために，まず，道路ネットワーク内の各ノードへ物資を均等に輸送するという均等輸送問題を定義し，この問題を基礎として道路ネットワークの連結性指標を導出する．そして，道路ネットワーク内の連結性の弱い部分を抽出する方法を提案するとともに，その部分を補強する最適補強問題を定式化する．

Key Words: *spectral analysis, road network, algebraic connectivity, equqlized transportation problem, optimal reinforcement problem*

1. はじめに

近年，我が国において台風や地震をはじめとした大規模な災害が多発しており，道路施設の損傷やそれに伴った道路交通の途絶など深刻な影響を与えている．道路は生活を営む上で最も基本的な活動基盤の 1 つであり，道路の交通機能が麻痺すると社会活動・産業活動に大きな混乱を起こすことが考えられる．交通機能が麻痺する原因としては，交通需要の急激な増大に対して，道路網の整備が追い付かないために，交通渋滞が発生するといった交通システム内部に原因がある場合（平常時）と，地震，豪雪，水害などシステム外部からの影響によって，交通機能が低下する場合（非常時）の 2 つが存在する．非常時における交通機能の確保が重要なことは言うまでもなく，非常時における交通機能をいかにして確保し，速やかな社会回復を図るかということもまた重要な課題といえる．そういった意味では，災害時の道路交通は，人命救助や避難，物資支援などの面から重要視されているといえる．したがって，非常時においても道路交通が適切に確保されるように事前に道路施設を整備しておくことが望ましい．

平成 7 年に発生した兵庫県南部地震では，瓦礫や電柱の倒壊により多くの場所で道路の閉塞が起こった．この道路の閉塞は，狭い地域に建物・交通システムが集中しているエリアで発生し，代替経路が存在しないエリアであった．そのため，交通機能が麻痺してしまい，様々な緊急活動への影響を及ぼすこととなった．

この災害時では，地震に対して発災後の回復に向けた交通機能を確保することができなかった．地震・大雨などの災害が発生した際にも，迅速な復旧作業や物資輸送，救助活動を可能にするためには，被害を受けうる箇所の想定を踏まえた道路ネットワークの脆弱な部分を見出し，道路の整備・補修計画に反映させることが重要である．しかし劣化等によるリスクがある道路施設を全て対策するのは財政上困難であるため，ネットワーク全体で脆弱性を評価し優先的に対策が必要な箇所を選定する必要がある．

地震などの災害が発生したときに道路が果たすべき役割を考えると，災害が発生した際に到達不可能な箇所をできるだけ少なくし，道路ネットワーク全体の連結性を確保することが望ましい．

そこで，本研究では，道路ネットワーク内の道路リン

クのつながり，つまり，狭い意味での道路ネットワークの連結性を定量化するために，まず，道路ネットワーク内の各ノードへ物資を均等に輸送するという均等輸送問題を定義し，この問題を基礎として道路ネットワークの連結性指標を導出する．そして，道路ネットワーク内の連結性の弱い部分を抽出する方法を提案するとともに，その部分を補強する最適補強問題を定式化する．

2. 道路ネットワークのラプラシアン行列

本章では，道路ネットワークの連結性を評価する手法を考える準備として，道路ネットワークのラプラシアン行列及びその固有値について説明する．

(1) ラプラシアン行列

本研究では，道路ネットワークの構造をノードとリンクで構成することとし，リンクを介したノード間の接続関係を隣接行列 $\mathbf{A}'$ で表現する．この隣接行列の (i,j)成分 a'_{ij} は

$$a'_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (i,j) \in E \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

である．ここで，E はリンク集合であり，$(i,j) \in E$ はノード i とノード j を結ぶリンクが道路ネットワークに存在していることを意味する．したがって，隣接行列はノード i とノード j がリンクで結ばれていれば 1 で，結ばれていなければ 0 となる行列である．

本研究では，リンク長を考慮した隣接行列，距離重み付き隣接行列 $\mathbf{A}$ も用いる．距離が長いリンクよりも距離が短いリンクでノード間が結ばれている方が結び付きが強いと考えられるため，リンク距離そのものではなく，距離の逆数を用いる．したがって，距離重み付き隣接行列 $\mathbf{A}$ の成分は

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{l_{ij}}, & \text{if } (i,j) \in E \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

となる．ここで，l_{ij} はリンク (i,j) の距離（ノード i とノード j を結ぶリンク距離）である．なお，距離の逆数だけでなく，距離に対して単調減少するものを用いることは可能であるが，本研究では逆数としている．その理由については後で述べる．

ノードから出ているリンク数は次数と呼ばれ，各ノードの次数を対角成分に持つ行列を次数行列 $\mathbf{D}'$ とする．その成分は以下の通りである．

$$d'_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} \tag{3}$$

ここで，n は対象道路ネットワークのノードの数である．距離重み付き隣接行列のノード i の次数 d_i は

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tag{4}$$

と定義することとする．つまり，ノードから出ているリンクの距離の逆数の和である．この次数 d_i を対角成分に持つ行列が次数行列を $\mathbf{D}$ と書くこととする．

隣接行列 $\mathbf{A}$ と次数行列 $\mathbf{D}$を用いて，ラプラシアン行列 $\mathbf{L}$ は

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A} \tag{5}$$

である．これは距離重み付きラプラシアン行列

(2) ラプラシアン行列の固有値

ラプラシアン行列 $\mathbf{L}$ の二次形式は，ベクトル $\mathbf{x}$ を用いると，

$$\mathbf{x}^T\mathbf{L}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_i - x_j\right)^2 \geq 0 \tag{6}$$

となる．ここで，x_i, x_j はベクトル $\mathbf{x}$ の i, j 成分であり，T は行列もしくはベクトルの転置である．本研究では，隣接行列の成分 a_{ij} は 0 もしくは正の値であるため，ラプラシアン行列の二次形式は非負，つまり，$\mathbf{x}^T\mathbf{L}\mathbf{x} \geq 0$ となる．したがって，ラプラシアン行列は半正定値行列である．さらに，このようにラプラシアン行列が半正定値となることから，ラプラシアン行列の固有値は必ず非負の実数となることが分かる．

また，ラプラシアン行列の各行・列の和が 0 であることから，ゼロ固有値に対応する固有ベクトルは $\mathbf{1}$ になる，つまり，成分が全て 1 のベクトル $\mathbf{1}$ が固有ベクトルとなる．

$$\mathbf{L}\mathbf{1} = \mathbf{0} \tag{7}$$

ここで，$\mathbf{1}$ は成分が全て 1 のベクトルであり，$\mathbf{0}$ は成分が全て 0 のベクトルである．

以上より，

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_n \tag{8}$$

ここで，λ_i はラプラシアン行列 $\mathbf{L}$ の i 番目の固有値である．また，ラプラシアン行列の各固有ベクトルは直交する．

ラプラシアン行列の第 2 最小固有値は代数的連結度とも呼ばれ，ネットワークの連結性を示す指標の一つとされている．最小固有値はレイリー商を最小化する問題として，以下のように表される．

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}} \tag{9}$$

先ほど述べたように，ラプラシアン行列の最小固有値は 0 であり，対応する固有ベクトルは $\mathbf{1}$ である．よって，第 2 最小固有値を求める問題は以下のように表される．

$$\min_{\mathbf{x} \perp \mathbf{1}} \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}} \tag{10}$$

この式より，第 2 最小固有値とラプラシアン行列のレイ

リー商の関係は，適当なベクトル $\mathbf{x} \perp \mathbf{1}$ を用いて以下のように表される．

3. 均等輸送問題と最適補強問題

本研究では，道路ネットワークの連結性の評価方法を検討するために，均等輸送問題を考える．

本研究での均等輸送問題は，緊急時等で物資などをネットワーク内で均等に配送するという問題である．この問題での仮定は以下の通りである．

A1. 緊急物資は道路ネットワーク内のすべてのノードに配分する

A2. 各ノードで必要物資量が決まっている．

A3. ノードにある物資は隣接するノードで物資が不足している場合，隣接ノードへ物資を配分する

ここで，$x_i(t)$ を時刻 t でのノード i にある物資量で，v_i はノード i で必要な物資量である．また，$x_i(t)$ を v_i. で除した $x_i(t)/\, v_i$ を $r_i(t)$ とおくと，$r_i(t)$ は時刻 t でのノード i の物資の充足率である．

緊急時等では，救援物資を公平に行き渡らせる必要がある．たとえ物資が必要量に達していなくとも，隣接するノードでの充足率が悪い場合は物資をそのノードへ送るものとする．また，緊急時では物資量やその充足率の情報は限定的であり，隣接ノードの状況のみが分かるものとする．

A4. 各ノードから隣接するノードへの物資の輸送は，隣接するノードとの充足率の差に比例した量の物資を隣接ノードへ送る

上述の仮定に従った輸送を考えるために，以下のような時刻 t での輸送強度を考える．

$$\varphi^{i\to j}(t) = -a_{ij}\left[r_i(t) - r_j(t)\right] \tag{11}$$

ここで，$\varphi^{i\to j}(t)$ はノード i からノード j への時刻 t での輸送強度である．輸送強度は時刻 t という時間幅を持たない時刻 t という一瞬のものであり，輸送には有限の時間が必要であるとし，輸送量とは呼ばず輸送強度とした．ノード i での物資の充足率の変化は

$$\dot{r}_i(t) = \frac{d}{dt} r_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi^{i\to j}(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left[r_i(t) - r_j(t)\right] \tag{12}$$

として与えられる．ここで，充足率ベクトル $\mathbf{r}(t)$ とその時刻変化 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ は

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \dot{r}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{r}_n(t) \end{bmatrix} \tag{13}$$

とする．これらを用いると，

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}(t) &= \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\left[r_1(t) - r_j(t)\right] \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{2j}\left[r_2(t) - r_j(t)\right] \\ \vdots \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{nj}\left[r_n(t) - r_j(t)\right] \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{12} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{L}\mathbf{r}(t) \end{aligned} \tag{14}$$

このように充足率の時刻変化は

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = -\mathbf{L}\,\mathbf{r}(t) \tag{15}$$

と表すことができる．ラプラシアン行列は対称であり，対角化可能である (e.g. Strang, 1976)．したがって，上記の線形常微分方程式は以下のように解くことができる．

$$\mathbf{r}(t) = e^{-\mathbf{L}t}\mathbf{r}(0) \tag{16}$$

ここで，$\mathbf{r}(0)$ は初期充足率ベクトルである．さらに，上記は以下のように分解することができる．

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= e^{-\mathbf{Lr}(t)}\mathbf{r}(0) \\ &= c_1 e^{-\lambda_1 t}\boldsymbol{y}_1 + c_2 e^{-\lambda_2 t}\boldsymbol{y}_2 + \cdots + c_n e^{-\lambda_n t}\boldsymbol{y}_n \end{aligned} \tag{17}$$

ここで，c_i は定数で，λ_i と $\boldsymbol{y}_i$ はラプラシアン行列の固有値と固有ベクトルである．前章の通り，ラプラシアン行列の最小固有値は 0 であるため，

$$\mathbf{r}(t) = c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2 e^{-\lambda_2 t}\boldsymbol{y}_2 + \cdots + c_n e^{-\lambda_n t}\boldsymbol{y}_n \tag{18}$$

となる．

上記の式より，時間が十分に経過すると，$\mathbf{r}(t)$ は $c_1\boldsymbol{y}_1$ に収束することが分かる．第二最小固有値 λ_2 が 0 ではなくて正の値の場合，収束速度は第二最小固有値 λ_2 に依存する．つまり，$\lambda_2 > 0$ ならば，

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{r}(t) = c_1\boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_1 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

である．

本研究での最適補強問題とは，予算制約内で道路ネットワークの連結性を高める最適な計画を考える問題とする．連結性を高める方法としてはリンクの連結強度を高めることとし，最適補強問題では，道路ネットワーク全体の連結性能を上げるために，予算制約下でどのリンクをどれほど補強するのかを決める最適問題となる．リンク (i,j) の補強は，補強量 w_{ij} を a_{ij} に加えることとして定式化する．すなわち，

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{l_{ij}} + w_{ij} = a_{ij} + w_{ij}, & (i,j) \in E \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{20}$$

とする．ここで

予算が B として与えられると，予算制約等で補強量がとり得るのは

$$\begin{cases} 0 \leq w_{ij} \leq 1 - a_{ij}, & \forall (i,j) \in E \\ w_{ij} = 0, & \forall (i,j) \notin E \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \leq B \end{cases} \tag{21}$$

となり，この集合を $\mathbb{W}$ と表記することとする．

上記の通り，道路ネットワーク全体の連結性はそのラプラシアン行列の第二最小固有値によって提供化できるため，最適補強問題は予算制約下で第二最小固有値を最大にする問題とすることができる．つまり，

$$\max_{\mathbf{W}}.\ \lambda_2(\mathbf{L_W}) \quad s.t.\ \mathbf{W} \in \mathbb{W} \tag{22}$$

と定式化することができる．