

正方形格子上的集積パターン形成メカニズム： 群論的分岐理論による解析

木暮 洋介¹・池田 清宏²

¹学生会員 東北大学 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)
E-mail: yosuke.kogure.t2@dc.tohoku.ac.jp

²正会員 東北大学教授 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)
E-mail: kiyohiro.ikedada@tohoku.ac.jp

2次元・多立地点の空間構造における集積経済モデルの分析は、人口集積の空間的パターンの形成メカニズムを明らかにするうえで重要である。本研究では、2次元・多立地点の空間構造の一例として、周期境界条件を有する正方形格子を取り上げる。そして、この空間構造を仮定した標準的な集積経済モデルにおいて、分散状態から創発する空間的パターンの一般的特性を調べる。特に、正方形格子が持つ対称性に着目し、対称性を持つ系の一般論である群論的分岐理論を援用することにより、空間的パターンの存在とその分岐点近傍における安定性条件を示す。

Key Words: square lattice, economic agglomeration, group-theoretic bifurcation theory

1. はじめに

社会基盤整備をはじめとする地域・都市政策は、地域間の人口分布に影響を及ぼし、人口集積・分散を加速させうる。従って、政策の経済効果を適切に捉えるためには、政策実施に伴って生じる人口集積の程度・空間的配置を予測する必要がある。

上記の問題意識に対して有用な示唆を与える理論的枠組みとして、人口の地域間移動と集積の経済を考慮した、一群の数理モデルが挙げられる。本論文では、これらを集積経済モデルと呼ぶ。代表的な例としては、新経済地理学 (NEG) 分野で構築されてきた、Krugman¹⁾ や Forslid and Ottaviano²⁾ によるモデルが挙げられる。これらのモデルは、一般均衡理論に基づき、地域間の輸送費用の減少に伴う経済活動の空間的な集積・分散現象のメカニズムを記述することができる。ミクロ経済学的整合性を持つ集積経済モデルを分析し、そこから人口集積の程度・空間的配置に関する洞察を引き出すことは、重要な基礎的研究課題となる。

従来研究では、解析的な困難を回避できることから、二つの立地点からなる単純な空間構造におけるモデルが盛んに分析されてきた。一方で、現実に見られる多様な人口集積の空間的パターンの創発メカニズムを明らかにするためには、多立地点の空間構造におけるモデルの分析が必要となる。近年、その向きの研究が進展しつつあり、特に Tabuchi and Thisse³⁾ や Akamatsu et al.^{4),7)}, Ikeda et al.^{6),7)} をはじめとして、周期境界を

有する1次元・多立地点の空間構造 (i.e., Krugman⁸⁾ の円周経済) におけるモデルの理論的特性が明らかとなっている。

本研究の目的は、周期境界を有する2次元・多立地点の空間構造における集積経済モデルを分析し、創発する人口集積の空間的パターンを明らかにすることである。本研究では、周期境界を有する正方形格子の空間構造を仮定する。これは $n \times n$ 箇所の立地点からなる正方形格子状の空間を単位として、その空間が周期的に繰り返すような空間構造である。また本研究では、最も単純かつ標準的な枠組みの集積経済モデルを仮定する。簡潔に述べると、(i) 単一種類の移動主体が存在し、各々の主体が唯一の立地点を選択する、(ii) 立地点 ij 間の空間的な相互作用の強度が、外生的な定数 $d_{ij}(\phi) \in (0, 1)$ に依存すると仮定する。人口集積の空間パターンの創発は、 $n \times n$ 箇所の立地点に人口が均等に分布した分散状態から、モデルの構造パラメタ $\phi \in (0, 1)$ の変化に伴って生じる分岐現象として記述される。このとき、正方形格子のもとでは、モデルの支配方程式が同変性と呼ばれる群論的性質を持つことに着目する。同変性を持つ系における分岐現象の一般論である群論的分岐理論⁹⁾ を援用することにより、分岐パターンの存在とその分岐点近傍における安定性条件を示す。

2次元・多立地点の空間構造における集積経済モデルを扱った関連研究はいくつか挙げられる。Ikeda et al.¹⁰⁾ では、本研究と同様、正方形格子における集積経済モデルを扱っている。当該研究では空間周期倍化と呼ば

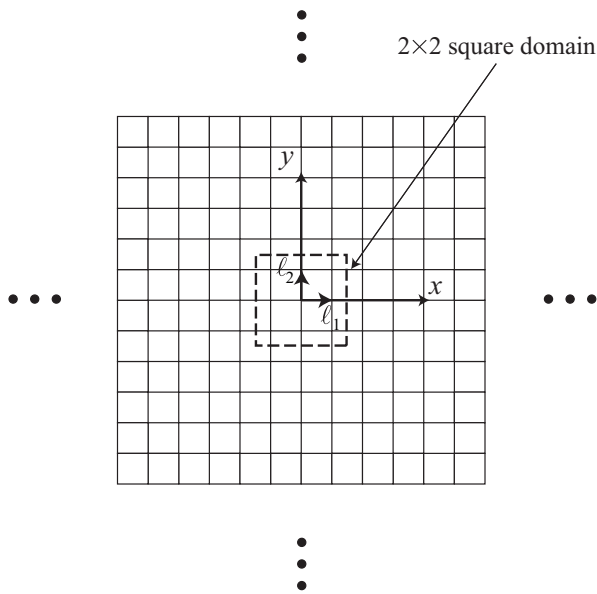


図-1 正方形格子

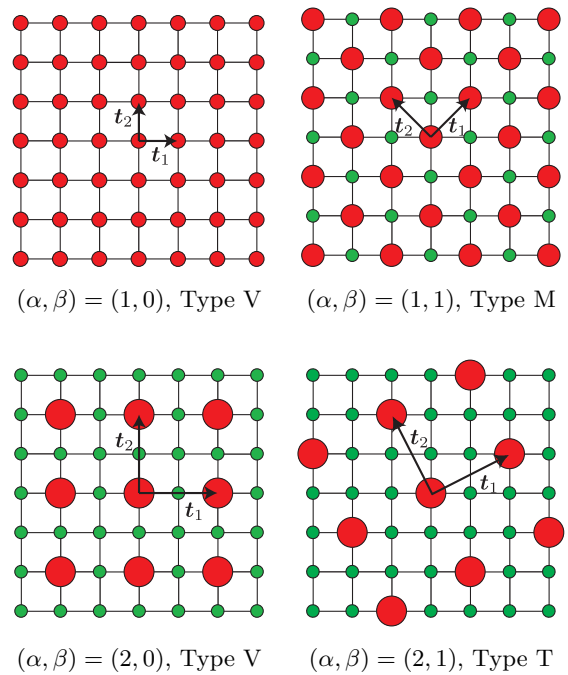


図-2 正方形格子における空間パターン例

れる特徴的な分岐挙動に着目しているのに対し、本研究では分散状態から創発しうる種々の分岐パターンを明らかにする。また、群論的分岐理論に基づき、分岐パターンとその安定性を系統的に明らかにしている点に本研究の特色がある。Ikeda et al.^{(11),(12)} による一群の研究では、周期境界を有する正三角形格子における集積経済モデルを分析している。当該研究では、群論的分岐理論によって予測される分岐パターンは全て、分岐点近傍において不安定となることを明らかにしている。これに対し本研究では、正方形格子において予測される分岐パターンには安定となりえるものがあることを明らかにし、両格子の性質の違いを示唆する。

本論文の構成は以下である。2. では、周期境界を有する正方形格子を定式化し、格子上的空間パターンを分類する。3. では、基本的な集積経済モデルの枠組みと、その均衡条件を定式化する。4. では、正方形格子の空間構造を仮定した集積経済モデルにおいて、分散状態から創発しうる分岐パターンを群論的分岐理論に基づいて示す。5. では、分岐点近傍において成立する分岐方程式を用いて、分岐パターンの安定性を調べる。

2. 正方形格子と空間パターン

本章では、2次元・多立地点の空間構造として、周期境界を有する $n \times n$ 正方形格子を定式化する。また、格子上的空間パターンを記述し、それらを空間的な周期性に基づいて分類する。さらに、格子の対称性を記述する群を導入し、その部分群によって空間パターンの対称性を記述する。

(1) 正方形格子

正方形格子は、図-1に示す2次元離散空間である。ここで、図中の格子節点が立地点を、実線が立地点間のリンクを表している。正方形格子における立地点の集合 \mathcal{H} は、以下のように記述できる：

$$\mathcal{H} = \{n_1 \ell_1 + n_2 \ell_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \quad (1)$$

ここで、

$$\ell_1 = d(1, 0)^\top, \ell_2 = d(0, 1)^\top \quad (2)$$

は正方形格子の基底ベクトルであり、 $d > 0$ は隣接する立地点間の経路距離を表す。

本研究では、上記の無限平面の正方形格子に対し、周期境界を有する $n \times n$ 正方形格子を考える。すなわち、 $n \times n$ 箇所の立地点からなる正方形の領域を単位として、それが周期的に繰り返すような空間構造を仮定する。図-1に示す破線は、 $n = 2$ の場合の例を表している。 $n \times n$ 正方形格子における立地点の集合 \mathcal{H}_n は、 \mathcal{H} の部分集合として以下のように記述できる：

$$\mathcal{H}_n = \{n_1 \ell_1 + n_2 \ell_2 \mid n_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq n_i \leq n - 1\}. \quad (3)$$

(2) 空間パターン

$n \times n$ 正方形格子上的適当な人口分布は、周期境界条件を考慮すると、周期性を持った空間パターンを表す。すなわち、あるベクトル t_1 および t_2 が存在し、それらに沿った方向への並進変換に対して人口分布が不変となる。図-2に示す空間パターンは、その一例である。空間パターンを特徴づける上記のベクトル t_1 および t_2

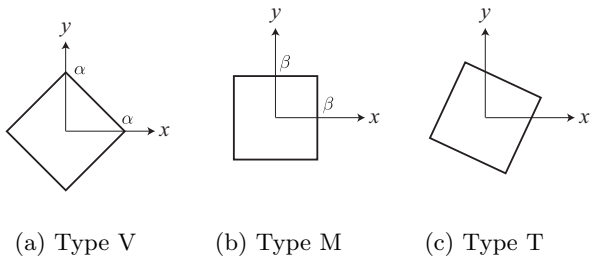


図-3 空間パターンの分類

を、以下のように定義する：

$$\mathbf{t}_1 = \alpha \mathbf{l}_1 + \beta \mathbf{l}_2, \quad \mathbf{t}_2 = -\beta \mathbf{l}_1 + \alpha \mathbf{l}_2. \quad (4)$$

ここで、 α および β は整数であり、

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \mid \alpha \geq \beta \geq 0, \alpha \neq 0\} \quad (5)$$

とする。これにより、ひとつの空間パターンに対し、ひとつの (α, β) が定まる。

空間パターンを分類するために、 φ を以下のように定義する：

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{l}_1)^\top \mathbf{t}_1}{\|\mathbf{l}_1\| \cdot \|\mathbf{t}_1\|}, \quad (6)$$

これは、 \mathbf{l}_1 と \mathbf{t}_1 のなす角であり、

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) \quad (7)$$

と書き換えられる。この φ により、空間パターンを以下のように分類する：

$$\begin{cases} \text{type V} & \text{if } \varphi = 0, \\ \text{type M} & \text{if } \varphi = \pi/4, \\ \text{type T} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (8)$$

これらは、 (α, β) を用いることにより、以下のように書き換えられる：

$$\begin{cases} \text{type V} & \text{if } (\alpha, \beta) = (\alpha, 0), \\ \text{type M} & \text{if } (\alpha, \beta) = (\beta, \beta), \\ \text{type T} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (9)$$

ここで図-3は、3種類の空間パターンについて、原点を中心とし、 \mathbf{t}_1 と \mathbf{t}_2 を頂点とした正方形を表している。“V”は座標軸が正方形の“vertex”を通ること、“M”は座標軸が正方形の辺の“midpoint”を通ること、“T”は正方形が“tilted”であることを意味している。

$n \times n$ 正方形格子においては、 (α, β) として取れる値は n に依存する。具体的には、 n に対して

$$n = \begin{cases} m\alpha & \text{for type V,} \\ 2m\beta & \text{for type M,} \\ m(\alpha^2 + \beta^2)/\text{gcd}(\alpha, \beta) & \text{for type T} \end{cases} \quad (10)$$

を満たすような (α, β) のみが取れる。ここで、 $m = 1, 2, \dots$ であり、 $\text{gcd}(\alpha, \beta)$ は α と β の最大公約数である。

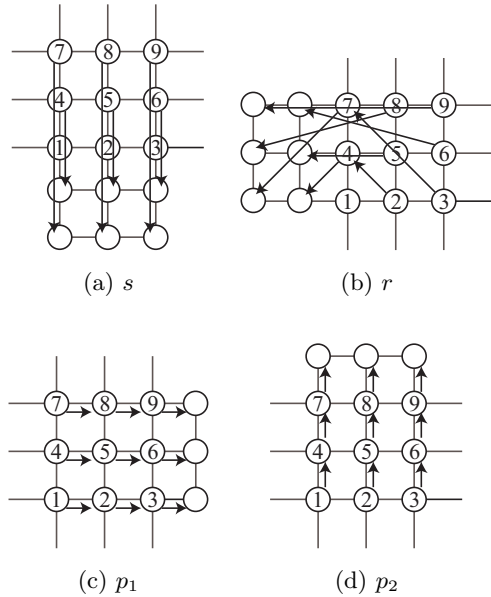


図-4 $n \times n$ 正方形格子に対する G の作用 ($n = 3$)

(3) 群による対称性の記述

$n \times n$ 正方形格子の対称性は、以下の変換に対する不変性によって記述される：

- r : 半時計回りの $\pi/2$ 回転変換,
- s : x 軸に関する鏡映変換,
- p_1 : \mathbf{l}_1 に沿った並進変換,
- p_2 : \mathbf{l}_2 に沿った並進変換.

これらの変換は、 $n \times n$ 正方形格子に対し、図-4に示すような立地点の置換として作用する。ここで、図中の円は立地点を、数字は立地点の番号を表す。結果として、 $n \times n$ 正方形格子の対称性は、これらの変換によって生成される群

$$G = D_4 \times (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) = \langle r, s, p_1, p_2 \rangle \quad (11)$$

に対する不変性によって記述される。 D_4 は 4 次二面体群、 \mathbb{Z}_n は n 次巡回群と呼ばれる群である。ここで、 G は基本関係として

$$\begin{aligned} r^4 = s^2 = (rs)^2 = p_1^n = p_2^n = e, \quad p_2 p_1 = p_1 p_2, \\ r p_1 = p_2 r, \quad r p_2 = p_1^{-1} r, \quad s p_1 = p_1 s, \quad s p_2 = p_2^{-1} s \end{aligned} \quad (12)$$

を満足し、 e は恒等変換である。これにより、 G のそれぞれの要素は

$$s^l r^m p_1^i p_2^j, \quad l \in \{0, 1\}, \quad m \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (13)$$

の形で一意に表される。

$n \times n$ 正方形格子における空間パターンの対称性は、 G の一部の要素に対する不変性によって記述される。す

なわち, G の部分群

$$G' = \begin{cases} \langle r, s, p_1^\alpha, p_2^\alpha \rangle = \Sigma(\alpha, 0) & \text{for type V,} \\ \langle r, s, p_1^\beta p_2^\beta, p_1^{-\beta} p_2^{-\beta} \rangle = \Sigma(\beta, \beta) & \text{for type M,} \\ \langle r, p_1^\alpha p_2^\beta, p_1^{-\beta} p_2^\alpha \rangle = \Sigma_0(\alpha, \beta) & \text{for type T} \end{cases} \quad (14)$$

に対する不変性によって記述される. ここで,

$$\Sigma(\alpha, \beta) = \langle r, s, p_1^\alpha p_2^\beta, p_1^{-\beta} p_2^\alpha \rangle, \quad (15)$$

$$\Sigma_0(\alpha, \beta) = \langle r, p_1^\alpha p_2^\beta, p_1^{-\beta} p_2^\alpha \rangle \quad (16)$$

と定義した.

3. モデル

本章では, 集積経済モデルの基本的な枠組みと, その均衡条件を定式化する. また, 均衡状態に至るまでの調整過程として, replicator dynamics を導入する. なお, 本章で述べる枠組みは様々な集積経済モデルに当てはまるが, その一例として, 付録 I に Forslid and Ottaviano²⁾ によるモデル (FO モデル) の詳細を示す. 集積経済モデルに関する総説としては, 例えば大澤¹³⁾ を参照されたい.

(1) 基本的な枠組み

離散的な K 個の立地点からなる空間構造において, 単一種類の移動主体が存在し, 各々の主体が唯一の立地点を選択すると仮定する. 主体の人口分布は $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_K) \in \Delta$ によって表す. ここで, $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^K \mid \sum_{i=1}^K \lambda_i = 1\}$ は $K-1$ 次元の単体, λ_i は立地点 i を選択した移動主体の人口, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ は人口分布である.

立地点 i, j 間の空間的な相互作用の強度は, 外生的な定数 $d_{ij}(\phi) \in (0, 1)$ に依存すると仮定する. $\phi \in (0, 1)$ はモデルの構造パラメタであり, 経済全体の輸送技術の水準を表す. ϕ が小さいほど輸送技術が低い (輸送費用が高い) 状況を, ϕ が大きいほど輸送技術が高い (輸送費用が低い) 状況を表す. さらに, $d_{ij}(\phi)$ をまとめた $K \times K$ 行列 $D(\phi) = [d_{ij}(\phi)]$ を空間割引行列と呼ぶ⁴⁾. このとき, 主体の利得関数は $D(\phi)$ をパラメタとして含むこととなる. 以降, 主体の利得関数は $v(\lambda, \phi): \Delta \rightarrow \mathbb{R}^K$ によって表す.

主体は自身が得る利得に応じて立地点を変更できると仮定する. このとき, 各々の主体が立地点を変更する誘因を持たない状態が均衡となる. その均衡条件は, 以下のように定式化される:

$$\begin{cases} v^* - v_i(\lambda) = 0 & \text{if } \lambda_i > 0 \\ v^* - v_i(\lambda) \geq 0 & \text{if } \lambda_i = 0 \end{cases} \quad (17)$$

ここで, $\lambda \in \Delta$ であり, v^* は均衡における利得水準である. 均衡条件 (17) を満足する人口分布が, モデルの

均衡解となる.

(2) Replicator dynamics のもとでの支配方程式

移動主体による立地点の変更は, replicator dynamics と呼ばれる以下の調整動学に従うものと仮定する:

$$\dot{\lambda} = F(\lambda, \phi) = \{F_i(\lambda, \phi) \mid i = 1, \dots, K\} \quad (18)$$

$$F_i(\lambda, \phi) = (v_i(\lambda, \phi) - \bar{v}(\lambda, \phi))\lambda_i \quad (19)$$

ここで, $\bar{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ は平均利得である.

均衡条件 (17) を満足する均衡解を求める問題は, replicator dynamics の停留点を求める問題に関連づけられる¹⁾. 具体的に, replicator dynamics の停留点 λ^* は, 以下の支配方程式によって決定される:

$$F(\lambda^*, \phi) = 0 \quad (20)$$

支配方程式を満足する停留点が, 均衡条件を満足する均衡解の候補となる.

(3) 停留点の安定性

支配方程式 (20) を満足する停留点 λ^* について, その局所的な漸近安定性は, Jacobi 行列

$$J(\lambda^*, \phi) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda^*, \phi) \quad (21)$$

の固有値によって判定できる. 具体的には, 以下のよう分類される:

$\begin{cases} \text{線形安定: } J \text{ の全ての固有値の実部が負,} \\ \text{線形不安定: } J \text{ の一つ以上の固有値の実部が正.} \end{cases}$
停留点が漸近安定・漸近不安定であることと, 線形安定・線形不安定であることは, それぞれ等価である. ここで, 漸近安定な停留点の集合は, 漸近安定な均衡解の集合に一致する²⁾.

4. 分散状態からの集積パターン

本章では, $n \times n$ 正方形格子の空間構造を仮定した集積経済モデルにおいて, 分散状態から創発しうる分岐パターンを示す. 支配方程式が同変性と呼ばれる性質を持つことに着目し, 同変性を持つ系における分岐現象の一般論である群論的分岐理論⁹⁾ を援用する. なお, 命題の詳細な証明については, 著者によるプレプリント¹⁶⁾ を参照されたい.

(1) 群論的分岐解析の手順

a) 支配方程式の同変性と分岐

$n \times n$ 正方形格子においては, 格子の対称性を記述する群 $G = D_4 \times (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ に対し, 支配方程式 (20) が同変性

$$T(g)F(\lambda, \tau) = F(T(g)\lambda, \tau), \quad g \in G \quad (22)$$

¹⁾ 詳細は, Sandholm¹⁷⁾ Chap.4 を参照されたい.

²⁾ 詳細は, Sandholm¹⁷⁾ Chap.5 を参照されたい.

を満たす³。ここで $T(g)$ は、 $g \in G$ による置換を記述する表現行列である。式 (22) は、変数 λ を $T(g)$ によって座標変換することと F 全体を $T(g)$ によって変換することが等価であることを意味しており、一般的な幾何学的対称条件を表している。

いま、分散状態

$$\lambda_c = \frac{1}{n^2}(1, \dots, 1) \quad (23)$$

における多重度 M の分岐点 (λ_c, ϕ_c) を考える。 $M (\geq 1)$ は、分岐点における Jacobi 行列 $J_c \equiv J(\lambda_c, \phi_c)$ のゼロ固有値の個数を表す。一般に分岐点の近傍においては、Liapunov-Schmidt 簡約と呼ばれる数学的手法により、支配方程式を以下のような M 次元の分岐方程式

$$\tilde{F}(\mathbf{w}, \tilde{\phi}) = \mathbf{0} \quad (24)$$

へと簡約できる⁴。ここで、 $\tilde{F}: \mathbb{R}^M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M$ であり、 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^M$ および $\tilde{\phi} \in \mathbb{R}$ は分岐点からの増分量を表す。分岐方程式の解は、支配方程式の分岐解と 1 対 1 に対応する。すなわち、分岐方程式の解を求めることは、支配方程式の分岐解を求めることと等価である。

分散状態における分岐点は、 $G = D_4 \times (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ に対する不変性

$$T(g)\lambda_c = \lambda_c, \quad g \in G \quad (25)$$

を満たす。このような不変性を持つ分岐点における分岐方程式には、支配方程式の同変性が遺伝しており、

$$T^\mu(g)\tilde{F}(\mathbf{w}, \tilde{\phi}) = \tilde{F}(T^\mu(g)\mathbf{w}, \tilde{\phi}), \quad g \in G \quad (26)$$

が成り立つ。 $T^\mu(g)$ は、 M 次元零空間 $\text{Ker}(J_c)$ における、 $T(g)$ の既約表現行列である。 μ は $D_4 \times (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ の既約表現の種類を表すラベルである。ここで、 $D_4 \times (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ に対応する μ の一覧を表-1 に示す。また、 $T^\mu(g)$ の具体形については付録 II に示す。既約表現と分岐点とは 1 対 1 に対応し、既約表現を求めれば分岐点の多重度 M も分かる。実際、 $D_4 \times (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ に対しては $M = 1, 2, 4, 8$ 、すなわち、分散状態においては単純分岐点、2 重分岐点、4 重分岐点、8 重分岐点の 4 種類が存在する。

b) 座標変換行列

支配方程式 (20) が群 G に対する同変性を持つ系においては一般に、その群に対応した座標変換行列 Q が存在する⁵。 Q は Jacobi 行列 (21) を常にブロック対角化する行列であり、

$$Q = [\dots, Q^\mu, \dots], \quad \mu \in R(G) \quad (27)$$

³ 正方形格子の空間構造は、3.(1) で述べた空間割引行列 $D(\phi)$ を設定することにより、モデルおよび支配方程式の中に反映される。その結果として、同変性 (22) が満たされる。正方形格子に対応した $D(\phi)$ の具体形については、Ikeda et al.¹⁰⁾ Appendix D.2 を参照されたい。

⁴ 分岐方程式の誘導に関する詳細は、Ikeda and Murota¹⁴⁾ Sec.8.4 を参照されたい。

⁵ 座標変換行列およびブロック対角化に関する詳細は、Ikeda and Murota¹⁴⁾ Sec.7.4.2 を参照されたい。

表-1 $D_4 \times (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ に対応する既約表現 μ

$n \setminus M$	1	2	4	8
$2m$	(1; +, +, +) (1; +, +, -)	(2; +, +)	(4; k, 0; +) (4; k, k; +) (4; n/2, l, +)	(8; k, l)
$2m-1$	(1; +, +, +)		(4; k, 0; +) (4; k, k; +)	(8; k, l)

(4; k, 0; +) with $1 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$;
 (4; k, k; +) with $1 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$;
 (4; n/2, l; +) with $1 \leq l \leq n/2 - 1$;
 (8; k, l) with $1 \leq l \leq k-1, 2 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$

のように、 G の既約表現 μ に対応するブロック行列 Q^μ からなる。ここで、 $R(G)$ は μ 全体の集合である。

$n \times n$ 正方形格子の対称性を記述する群 $G = D_4 \times (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ の既約表現 μ に対応するブロック行列 Q^μ は、以下のように与えられる：

$$Q^{(1;+,+,+)} = \frac{1}{n}(1, \dots, 1)^\top = \langle 1 \rangle$$

$$Q^{(1;+,+,-)} = \begin{cases} [\langle \cos(\pi(n_1 - n_2)) \rangle] & n \in 2\mathbb{Z} \\ \text{missing} & n \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$Q^{(2;+,+)} = \begin{cases} [\langle \cos(\pi n_1) \rangle, \langle \cos(\pi n_2) \rangle] & n \in 2\mathbb{Z} \\ \text{missing} & n \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$Q^{(4;k,0,+)} = [\langle \cos(2\pi k n_1/n) \rangle, \langle \sin(2\pi k n_1/n) \rangle, \langle \cos(2\pi k n_2/n) \rangle, \langle \sin(2\pi k n_2/n) \rangle]$$

$$1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

$$Q^{(4;k,k,+)} = [\langle \cos(2\pi k(n_1 + n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi k(n_1 + n_2)/n) \rangle, \langle \cos(2\pi k(-n_1 + n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi k(-n_1 + n_2)/n) \rangle]$$

$$1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

$$Q^{(4;n/2,l,+)} = \begin{cases} [\langle \cos(\pi n_1 + 2\pi l n_2/n) \rangle, \langle \sin(\pi n_1 + 2\pi l n_2/n) \rangle, \langle \cos(-2\pi l n_1/n + \pi n_2) \rangle, \langle \sin(-2\pi l n_1/n + \pi n_2) \rangle] & 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor & n \in 2\mathbb{Z} \\ \text{missing} & n \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$Q^{(8;k,\ell)} = [\langle \cos(2\pi(kn_1 + \ell n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi(kn_1 + \ell n_2)/n) \rangle, \langle \cos(2\pi(-\ell n_1 + kn_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi(-\ell n_1 + kn_2)/n) \rangle, \langle \cos(2\pi(kn_1 - \ell n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi(kn_1 - \ell n_2)/n) \rangle, \langle \cos(2\pi(-\ell n_1 - kn_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi(-\ell n_1 - kn_2)/n) \rangle]$$

$$1 \leq \ell \leq k-1, 2 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Q を導出する理由は以下である。 Q が Jacobi 行列をブロック対角化することから、 Q^μ の列ベクトルは、分岐点における零空間 $\text{Ker}(J_c)$ の基底ベクトルとなる。これにより、 Q^μ の列ベクトルは、同変性 (26) を持つ分岐方程式において、その解 w の基底ベクトルとなる。すなわち、既約表現 μ に対応する多重度 M の分岐点では、 $w = (w_1, \dots, w_M)$ のそれぞれの要素が、 $Q^\mu = [q_1^\mu, \dots, q_M^\mu]$ のそれぞれの列ベクトルに対応する。分岐点近傍における分散状態からの分岐解は、 Q^μ の列ベクトルの適当な線形結合として表すことができる。

c) 同変分岐補題

同変性を持つ分岐方程式においては一般に、ある特定の対称性を持つ分岐解が存在する。同変分岐補題¹⁵⁾ を分岐方程式に適用することにより、その存在を示すことができる。同変性を持つ分岐方程式には、式 (26) のように、群 G のある既約表現 μ が対応している。ここで、 G のある部分群 Σ をとり、 Σ の T^μ に対する固定点空間

$$\text{Fix}^\mu(\Sigma) = \{w \in \mathbb{R}^M \mid T^\mu(g)w = w \text{ for all } g \in \Sigma\} \quad (28)$$

を考える。このとき、固定点空間の次元 $\dim \text{Fix}^\mu(\Sigma)$ を計算し、 $\dim \text{Fix}^\mu(\Sigma) = 1$ であれば、 Σ に対する不変性を持つ分岐解が存在する。

(2) 分散状態からの分岐パターン

同変分岐補題によって予測される、 $n \times n$ 正方形格子における分散状態からの分岐パターンを示す。結果の具体例として、 $n = 6$ におけるいくつかの分岐パターンを図-5 に示す。

a) 単純分岐点

多重度 1 の分岐点は 1 次既約表現 $(1; +, +, -)$ に対応し、 n が偶数のときにのみ存在する。既約表現の具体形は式 (II.1) により、以下のように与えられる：

$$\begin{aligned} T^{(1;+,+,-)}(r) &= 1, \quad T^{(1;+,+,-)}(s) = 1, \\ T^{(1;+,+,-)}(p_1) &= -1, \quad T^{(1;+,+,-)}(p_2) = -1. \end{aligned} \quad (29)$$

分岐方程式の変数 $w = w$ は、

$$Q^{(1;+,+,-)} = [q] = [\langle \cos(\pi(n_1 - n_2)) \rangle] \quad (30)$$

の列ベクトルに対応する。ここで、同変分岐補題によって以下が得られる。

命題 1 n が偶数のとき、既約表現 $(1; +, +, -)$ に対応する多重度 1 の分岐点において分岐解 $w = w$ 、 $w \in \mathbb{R}$ が存在し、それは $\Sigma = \langle r, s, p_1 p_2, p_1^{-1} p_2 \rangle$ に対する不変性を持つ。

b) 2 重分岐点

多重度 2 の分岐点は 2 次既約表現 $(2; +, +)$ に対応し、 n が偶数のときにのみ存在する。既約表現行列は式

(II.2) により、以下のように与えられる：

$$\begin{aligned} T^{(2;+,+)}(r) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T^{(2;+,+)}(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ T^{(2;+,+)}(p_1) &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T^{(2;+,+)}(p_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

分岐方程式の変数 $w = (w_1, w_2)$ は、

$$Q^{(2;+,+)} = [q_1, q_2] = [\langle \cos(\pi n_1) \rangle, \langle \cos(\pi n_2) \rangle] \quad (32)$$

の列ベクトルに対応する。ここで、同変分岐補題によって以下が得られる。

命題 2 n が偶数のとき、既約表現 $(2; +, +)$ に対応する多重度 2 の分岐点において、以下の分岐解が存在する。

- (i) $w_{\text{sq}} = (w, w)$, $w \in \mathbb{R}$
- (ii) $w_{\text{stripe}} = (w, 0)$, $w \in \mathbb{R}$

c) 4 重分岐点

多重度 4 の分岐点は、以下の 4 次既約表現に対応する：

$$(4; k, 0, +) \text{ with } 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \quad (33)$$

$$(4; k, k, +) \text{ with } 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \quad (34)$$

$$(4; n/2, \ell, +) \text{ with } 1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \quad (35)$$

ここで、4 次既約表現は $n \geq 3$ のときに存在し、 $(4; n/2, \ell, +)$ は n が偶数のときにのみ存在する。分岐方程式の変数 $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ は、それぞれの 4 次既約表現 μ について、

$$Q^\mu = [q_1, q_2, q_3, q_4] \quad (36)$$

の列ベクトルに対応する。ここで、同変分岐補題によって以下が得られる。

命題 3 既約表現 $(4; k, 0, +)$ 、 $(4; k, k, +)$ 、 $(4; n/2, \ell, +)$ に対応する多重度 4 の分岐点において、以下の分岐解が存在する：

- (i) $w_{\text{sq}} = (w, 0, w, 0)$, $w \in \mathbb{R}$,
- (ii) $w_{\text{stripe}} = (w, 0, 0, 0)$, $w \in \mathbb{R}$.

ここで、 w_{sq} は Type V あるいは M の空間パターンを、 w_{stripe} はストライプ状の空間パターンを示す。

d) 8 重分岐点

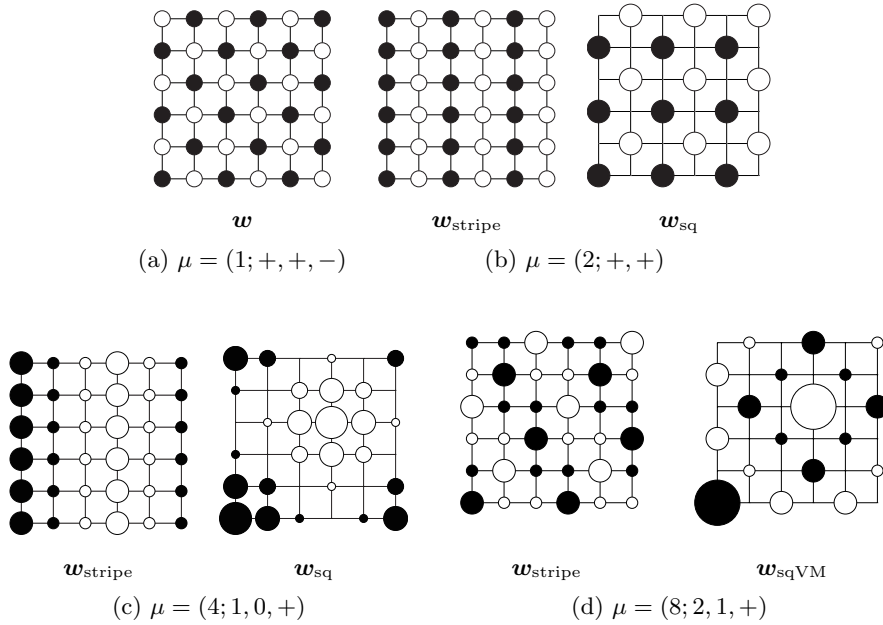
多重度 8 の分岐点は、以下の 4 次既約表現に対応する：

$$(8; k, \ell) \text{ with } 1 \leq \ell \leq k-1, 2 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \quad (37)$$

ここで、8 次既約表現は $n \geq 5$ のときに存在する。分岐方程式の変数 $w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8)$ は、

$$Q^{(8;k,\ell)} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8] \quad (38)$$

の列ベクトルに対応する。ここで、同変分岐補題によって以下が得られる。


 図-5 分散状態からの分岐パターンの例 ($n = 6$)

命題 4 既約表現 $(8; k, \ell)$ に対応する多重度 8 の分岐点において、以下の分岐解が存在する：

- (i) $\mathbf{w}_{\text{sqVM}} = (w, 0, w, 0, w, 0, w, 0)$, $w \in \mathbb{R}$,
- (ii) $\mathbf{w}_{\text{sqT}} = (w, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0)$, $w \in \mathbb{R}$,
- (iii) $\mathbf{w}_{\text{stripe}} = (w, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $w \in \mathbb{R}$.

ここで、 \mathbf{w}_{sqVM} は Type V あるいは M, \mathbf{w}_{sqT} は Type T, $\mathbf{w}_{\text{stripe}}$ はストライプ状の空間パターンを示す。また、 \mathbf{w}_{sqT} は以下の条件を満たすときのみ存在する：

GCD-div :

$$\gcd(\hat{k}^2 + \hat{\ell}^2, \hat{n}) \text{ が } 2 \gcd(\hat{k}, \hat{\ell}) \text{ を割り切らない。}$$

ここで、

$$\hat{k} = \frac{k}{\gcd(k, \ell, n)}, \quad \hat{\ell} = \frac{\ell}{\gcd(k, \ell, n)}, \quad \hat{n} = \frac{n}{\gcd(k, \ell, n)}$$

である。

5. 分岐点近傍における安定性解析

本章では、4. で示した分岐パターンの安定性を調べる。支配方程式における分岐解の安定性は、分岐方程式の解の安定性に遺伝する¹⁴⁾。そのため、分岐方程式の Jacobi 行列 $\tilde{J}(\mathbf{w}) = \partial \tilde{F} / \partial \mathbf{w}$ の固有値の正負を調べることで、分岐解の安定性を調べることができる。なお、2 重分岐点における解析の詳細、および 4, 8 重分岐点における解析の詳細と安定性条件については、著者によるプレプリント¹⁶⁾を参照されたい。

(1) 単純分岐点

単純分岐点における分岐方程式の変数 $w \in \mathbb{R}$ に対し、1 次既約表現 $(1; +, +, -)$ の表現行列の作用が以下のように表される：

$$r, s : w \mapsto w, \quad p_1, p_2 : w \mapsto -w, \quad (39)$$

このとき、分岐方程式の同変性により、以下を得る：

$$r, s : \tilde{F}(w, \tilde{\phi}) = \tilde{F}(w, \tilde{\phi}), \quad (40)$$

$$p_1, p_2 : -\tilde{F}(w, \tilde{\phi}) = \tilde{F}(-w, \tilde{\phi}). \quad (41)$$

いま、 \tilde{F} の一般形を級数展開で記述すると以下のようになる：

$$\tilde{F}(w, \tilde{\phi}) = \sum_{a=0}^{\infty} A_a(\tilde{\phi}) w^a. \quad (42)$$

$(w, \tilde{\phi}) = (0, 0)$ が分岐点であることから、以下を得る：

$$A_0(0) = 0, \quad A_1(0) = 0. \quad (43)$$

また、 $A'_1(0) \neq 0$ を仮定し、以下を得る：

$$A_1(\tilde{\phi}) \approx A'_1(0) \tilde{\phi}. \quad (44)$$

式 (41) より、以下を得る：

$$\sum_{a=0}^{\infty} (-A_a(\tilde{\phi})) w^a = \sum_{a=0}^{\infty} A_a(\tilde{\phi}) (-w)^a. \quad (45)$$

この条件は

$$a = 2b + 1, \quad b = 1, 2, \dots \quad (46)$$

を意味しており、これにより級数展開 (42) は以下の形に制限される：

$$\tilde{F}(w, \tilde{\phi}) = w \sum_{b=0}^{\infty} A_{2b+1}(\tilde{\phi}) w^{2b}. \quad (47)$$

ここで、 \tilde{F} の漸近形を考え、分岐解の漸近安定性を調べる。 \tilde{F} の漸近形は

$$\tilde{F}(w, \tilde{\phi}) \approx w(A'_1(0)\tilde{\phi} + A_3(0)w^2) \quad (48)$$

であり、Jacobi 行列の漸近形は

$$\tilde{J}(w, \tilde{\phi}) \approx A'_1(0)\tilde{\phi} + 3A_3(0)w^2 \quad (49)$$

となる。 $\tilde{F} = 0$ を解くことにより、

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_1 \approx -w^2 \frac{A_3(0)}{A'_1(0)} \quad (50)$$

を得る。 $\tilde{\phi}_1$ を (49) に代入することにより、

$$\tilde{J}(w, \tilde{\phi}_1) \approx 2w^2 A_3(0) \quad (51)$$

を得る。これより、以下の命題が得られる。

命題 5 多重度 1 の分岐点近傍において、分岐解 w の安定性は $A_3(0)$ の符号に依存する：

$$\begin{cases} A_3(0) < 0: & \text{安定,} \\ A_3(0) > 0: & \text{不安定.} \end{cases}$$

(2) 2 重分岐点

2 重分岐点における分岐方程式について、 \tilde{F}_1 の一般形を級数展開で記述すると以下ようになる：

$$\tilde{F}_1(w_1, w_2, \tilde{\phi}) = \sum_{a=0} \sum_{b=0} A_{ab}(\tilde{\phi}) w_1^a w_2^b. \quad (52)$$

単純分岐点と同様の解析により、以下の命題が得られる。

命題 6 多重度 2 の分岐点近傍において、分岐解 w_{sq} および w_{stripe} の安定性は $A_{30}(0)$ および $A_{12}(0)$ の符号に依存する：

- $A_{30}(0) + A_{12}(0) < 0$ かつ $A_{30}(0) - A_{12}(0) < 0$ ならば、分岐解 w_{sq} は分岐点近傍において安定である。
- $A_{12}(0) < A_{30}(0) < 0$ ならば、分岐解 w_{stripe} は分岐点近傍において安定である。

6. おわりに

本研究では、周期境界を有する正方形格子を仮定した集積経済モデルにおいて、分散状態から創発しうる集積パターンの分析を行った。本研究ではモデルの具体形を指定しておらず、従って、得られた分岐パターンの存在性と安定性条件は一般的に成り立つ結果である。一方で、政策的な含意を引き出すためには、具体的なモデルを仮定した分析を行う必要があり、数値解析等と組み合わせて今後取り組んでいく予定である。

付録 I FO モデル

本章では、集積経済モデルの一例として、Forslid and Ottaviano²⁾ によるモデル (FO モデル) の詳細を示す。

(1) 基本設定

a) 労働者

労働者は、その技術水準に応じて skilled worker と unskilled worker に分類されるものとする。skilled worker は高度な技術を持ち、自らが居住する立地点を自由に選択できる移動主体である。skilled worker の総人口は 1 とする。従って、立地点 i における skilled worker の人口を λ_i と置くと、以下の人口保存則が成り立つ：

$$\sum_{i=1}^K \lambda_i = 1 \quad (I.1)$$

一方、unskilled worker は高度な技術を持たず、自らが居住する立地点を選択できない。各立地点における unskilled worker の人口は 1 とし、各立地点に一樣に分布しているものとする。

b) 産業

離散的な K 個の立地点からなる経済を考える。財の生産部門は、農業部門と工業部門の 2 種類とする。農業部門は、収穫一定の技術により、unskilled worker を生産要素として 1 種類の同質な財を生産する (完全競争的)。工業部門は、収穫増進の技術により、skilled worker と unskilled worker を生産要素として差別化された財を生産する (独占競争的)。

c) 輸送費用

ある立地点で生産された財は他の立地点へと輸送することができ、どの立地点においても消費することができる。農業財の立地点間輸送には費用がかからないものとし、一方で、工業財の立地点間輸送には氷塊型の輸送費用がかかるものとする。具体的には、1 単位の工業財を立地点 i から j に輸送するとき、 $1/\tau_{ij}$ 単位だけが到達する。 τ_{ij} は以下のように定義される：

$$\tau_{ij} = \exp(\tau t_{ij}) \quad (I.2)$$

ここで、 τ は輸送費用パラメータ、 t_{ij} は立地点 ij 間の最短経路距離である。また、輸送自由度 ϕ を以下のように定義する：

$$\phi = \exp[-\tau(\sigma - 1)d] \quad (I.3)$$

ここで、 d は隣接する立地点間の経路距離である。これにより、 $\tau \in (0, \infty)$ の範囲を $\phi \in (0, 1)$ として表す。

(2) 消費者行動

立地点 i の労働者の効用関数 $U(C_i^M, C_i^A)$ は、以下で与えられるものとする：

$$U(C_i^M, C_i^A) = \mu \ln C_i^M + (1 - \mu) \ln C_i^A \quad (I.4)$$

$$C_i^M \equiv \sum_j \left(\int_0^{n_j} q_{ji}(k)^{(\sigma-1)/\sigma} dk \right)^{\sigma/(\sigma-1)} \quad (I.5)$$

ここで、 C_i^A は立地点 i における農業財の消費量、 C_i^M は立地点 i における工業財の消費量、 $k \in [0, n_j]$ は工業

財の種類を表すインデックス, n_j は立地点 j で生産される工業財の種類数の総数, $q_{ji}(k)$ は立地点 j で生産された工業財 k の立地点 i における消費量, $\mu \in (0, 1)$ は工業財への支出割合, $\sigma (> 1)$ は代替の弾力性である. また, 予算制約は以下で与えられるものとする:

$$p_i^A C_i^A + \sum_{j=1}^K \int_0^{n_j} p_{ji}(k) q_{ji}(k) dk = Y_i \quad (I.6)$$

ここで, p_i^A は立地点 i における農業財の価格, $p_{ji}(k)$ は立地点 j で生産された工業財 k の立地点 i における価格である. また, Y_i は立地点 i における労働者の賃金(所得)であり, skilled worker の場合は w_i , unskilled worker の場合は w_i^L と置く.

立地点 i の労働者は, 予算制約 (I.6) のもとで, 効用関数 (I.4) を最大化する. その結果として, C_i^A , C_i^M , $q_{ji}(k)$ が以下のように決定される:

$$C_i^A = (1 - \mu) \frac{Y_i}{p_i^A}, \quad C_i^M = \mu \frac{Y_i}{\rho_i}, \quad q_{ji}(k) = \mu \frac{\rho_i^{\sigma-1} Y_i}{p_{ji}(k)^\sigma} \quad (I.7)$$

ここで, ρ_i は立地点 i における工業財の価格指数であり,

$$\rho_i = \left(\sum_{j=1}^K \int_0^{n_j} p_{ji}(k)^{1-\sigma} dk \right)^{1/(1-\sigma)} \quad (I.8)$$

である. 立地点 i における総所得は $w_i \lambda_i + w_i^L$ であるため, 立地点 j で生産された工業財 k の立地点 i 全体での消費量 $Q_{ji}(k)$ は, 以下のように決定される:

$$Q_{ji}(k) = \mu \frac{\rho_i^{\sigma-1}}{p_{ji}(k)^\sigma} (w_i \lambda_i + w_i^L) \quad (I.9)$$

(3) 生産者行動

完全競争的な農業部門では, 収穫一定の技術によって同一の財を生産するため, 一般性を失うことなく, 1 単位の unskilled worker によって 1 単位の農業財が生産されると基準化する. このとき, 限界費用原理から, 農業財の価格 p_i^A と unskilled worker の賃金 w_i^L は等しくなる. また, 農業財の立地点間輸送には費用がかからないため, 農業財の価格は全ての立地点において等しくなる. そこで, 農業財をニューメレールとし, 以下の関係を得る:

$$p_i^A = w_i^L = 1 \quad (I.10)$$

工業部門では, 企業が収穫逓増の技術によって差別化された財を生産し, Dixit-Stiglitz 型の独占的競争を行う. 工業財の生産には, α 単位の skilled worker と, 生産量に応じた β 単位の unskilled worker が必要であるとする. すなわち, 企業の生産関数 $c(x_i(k))$ は以下で与えられるものとする:

$$c(x_i(k)) = \alpha w_i + \beta x_i(k) \quad (I.11)$$

ここで, $x_i(k)$ は立地点 i における工業財 k の生産量である. これより, 立地点 i の企業の利潤は以下で与えら

れるものとする:

$$\Pi_i(k) = \sum_{j=1}^K p_{ij}(k) Q_{ij}(k) - (\alpha w_i + \beta x_i(k)) \quad (I.12)$$

独占的競争のもとでは, 規模の経済, 消費における財の多様性の選好, および財の種類に制限がないことにより, どの企業も必ず他の企業とは異なる種類の財を生産する. 従って, 立地点 i で生産される工業財の種類数の総数 n_i は, 生産を行う企業の数に等しくなる. 工業財の生産には α 単位の skilled worker が必要であり, 立地点 i における skilled worker の人口は λ_i であることから, 以下の関係を得る:

$$\alpha n_i = \lambda_i \quad (I.13)$$

工業財の立地点間輸送には氷塊型の輸送費用がかかるため,

$$x_i(k) = \sum_{j=1}^K \tau_{ij} Q_{ij}(k) \quad (I.14)$$

となる. 式 (I.14) より, 企業の利潤 (I.12) は以下のように書き換えられる:

$$\Pi_i(k) = \sum_{j=1}^K p_{ij}(k) Q_{ij}(k) - \left(\alpha w_i + \beta \sum_{j=1}^K \tau_{ij} Q_{ij}(k) \right) \quad (I.15)$$

立地点 i の企業は, 独占的競争のもと, 利潤 (I.15) を最大化する. その結果として, $p_{ij}(k)$ が以下のように決定される:

$$p_{ij}(k) = \frac{\sigma \beta}{\sigma - 1} \tau_{ij} \quad (I.16)$$

これより, $p_{ij}(k)$, $Q_{ij}(k)$, $x_i(k)$ は k に依存しない.

(4) 短期均衡

skilled worker が立地点間を移動しない程の短期間での均衡状態を考え, これを短期均衡状態と呼ぶ. すなわち, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ を所与とする. 短期均衡状態においては, 工業財の市場清算条件, skilled worker の市場清算条件, 企業の利潤ゼロ条件が満たされる. 工業財の市場清算条件は式 (I.14), skilled worker の市場清算条件は式 (I.13) によって表されている. また, 企業の利潤ゼロ条件から, 利潤 (I.12) を 0 と置くことにより, 以下の関係を得る:

$$w_i = \frac{1}{\alpha} \left\{ \sum_{j=1}^K p_{ij} Q_{ij} - \beta x_i \right\} \quad (I.17)$$

式 (I.13) および (I.16) より, 価格指数 (I.8) は以下のように書き換えられる:

$$\rho_i = \frac{\sigma \beta}{\sigma - 1} \left(\frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^K \lambda_j d_{ji}(\phi) \right)^{1/(1-\sigma)} \quad (I.18)$$

ここで,

$$d_{ji}(\phi) = \tau_{ji}^{1-\sigma} = \phi^{t_{ji}/d} \quad (I.19)$$

は立地点 ji 間の空間的な相互作用の強度を表す。式 (I.9), (I.14), (I.16), (I.18) より, 均衡賃金 (I.17) は以下のように書き換えられる:

$$w_i = \frac{\mu}{\sigma} \sum_{j=1}^K \frac{d_{ij}(\phi)}{\Delta_j} (w_j \lambda_j + 1) \quad (\text{I.20})$$

ここで,

$$\Delta_j = \sum_{k=1}^K d_{kj}(\phi) \lambda_k \quad (\text{I.21})$$

である。以上の結果を効用関数 (I.4) に代入することにより, 立地点 i における間接効用関数 v_i が以下のように決定される:

$$v_i = \frac{\mu}{\sigma - 1} \ln[\Delta_i] + \ln[w_i] \quad (\text{I.22})$$

付録 II 既約表現

$D_4 \times (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) = \langle r, s, p_1, p_2 \rangle$ の既約表現 μ と, 既約表現行列を以下に示す。

1 次既約表現は $(1; +, +, +), (1; +, +, -)$ の 2 個であり, $(1; +, +, -)$ は n が偶数のときにのみ存在する。既約表現行列は, 以下のように与えられる:

$$\begin{aligned} T^{(1;+,+,+)}(r) &= 1, \quad T^{(1;+,+,+)}(s) = 1 \\ T^{(1;+,+,+)}(p_1) &= 1, \quad T^{(1;+,+,+)}(p_2) = 1 \\ T^{(1;+,+,-)}(r) &= 1, \quad T^{(1;+,+,-)}(s) = 1 \\ T^{(1;+,+,-)}(p_1) &= -1, \quad T^{(1;+,+,-)}(p_2) = -1 \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

2 次既約表現は, n が偶数のときにのみ存在し, $(2; +, +)$ の 1 個である。既約表現行列は, 以下のように与えられる:

$$\begin{aligned} T^{(2;+,+)}(r) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T^{(2;+,+)}(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T^{(2;+,+)}(p_1) &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T^{(2;+,+)}(p_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

4 次既約表現は $n \geq 3$ に対して存在し, 以下のように与えられる:

$$\begin{aligned} (4; k, 0, +) \quad & 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \\ (4; k, k, +) \quad & 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \\ (4; n/2, \ell, +) \quad & 1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

ここで, $(4; n/2, \ell, +)$ は n が偶数のときにのみ存在する。また, $\lfloor x \rfloor$ は実数 x を超えない最大の整数を表す。

既約表現行列は, 以下のように与えられる:

$$\begin{aligned} T^{(4;k,0,+)}(r) &= \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix}, \quad T^{(4;k,0,+)}(s) = \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} \\ T^{(4;k,0,+)}(p_1) &= \begin{bmatrix} R^k \\ I \end{bmatrix}, \quad T^{(4;k,0,+)}(p_2) = \begin{bmatrix} I \\ R^k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

$$\begin{aligned} T^{(4;k,k,+)}(r) &= \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix}, \quad T^{(4;k,k,+)}(s) = \begin{bmatrix} S \\ S \end{bmatrix} \\ T^{(4;k,k,+)}(p_1) &= \begin{bmatrix} R^k \\ R^{-k} \end{bmatrix}, \quad T^{(4;k,k,+)}(p_2) = \begin{bmatrix} R^k \\ R^k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

$$\begin{aligned} T^{(4;n/2,\ell,+)}(r) &= \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix}, \quad T^{(4;n/2,\ell,+)}(s) = \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix} \\ T^{(4;n/2,\ell,+)}(p_1) &= \begin{bmatrix} -I \\ R^{-\ell} \end{bmatrix}, \quad T^{(4;n/2,\ell,+)}(p_2) = \begin{bmatrix} R^\ell \\ -I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

ここで,

$$R = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$$

と定義した。

8 次既約表現は $n \geq 5$ に対して存在し, 以下のように与えられる:

$$1 \leq \ell \leq k-1, \quad 2 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \quad (\text{II.7})$$

既約表現行列は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} T^{(8;k,\ell)}(r) &= \begin{bmatrix} S & & \\ I & & \\ & & I \end{bmatrix} \\ T^{(8;k,\ell)}(s) &= \begin{bmatrix} & I & \\ & & I \\ I & & \end{bmatrix} \\ T^{(8;k,\ell)}(p_1) &= \begin{bmatrix} R^k & & \\ & R^{-\ell} & \\ & & R^k \\ & & & R^{-\ell} \end{bmatrix} \\ T^{(8;k,\ell)}(p_2) &= \begin{bmatrix} R^\ell & & \\ & R^k & \\ & & R^{-\ell} \\ & & & R^{-k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

参考文献

- 1) Krugman, P. : Increasing returns and economic geography, *Journal of Political Economy*, Vol.99, pp.483–499, 1991.
- 2) Forslid, R. and Ottaviano, G. I. P. : An analytically solvable core-periphery model, *Journal of Economic Geography*, Vol.3, pp.229–340, 2003.
- 3) Tabuchi, T. and Thisse, J.-F. : A new economic geography model of central places, *Journal of Urban Economics*, Vol.69, pp.240–252, 2011.
- 4) Akamatsu, T., Takayama, Y. and Ikeda, K. : Spatial discounting, Fourier, and racetrack economy: A recipe for the analysis of spatial agglomeration models, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol.36(11), pp.1729–1759, 2012.
- 5) Akamatsu, T., Mori, T., Osawa, M. and Takayama, Y. : Spatial scale of agglomeration and dispersion: Theoretical foundations and empirical implications, *MPRA Paper*, No.84145, 2017.
- 6) Ikeda, K., Akamatsu, T. and Kono, T. : Spatial period-doubling agglomeration of a core-periphery model with a system of cities, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol.36(5), pp.754–778, 2012.
- 7) Ikeda, K., Onda, M. and Takayama, Y. : Bifurcation theory of a racetrack economy in a spatial economy model, *Networks and Spatial Economics*, Vol.19, pp.57–82, 2019.
- 8) Krugman, P. : On the number and location of cities, *European Economic Review*, Vol.37(2), pp.293–298, 1993.
- 9) Ikeda, K. and Murota, K. : *Bifurcation Theory for Hexagonal Agglomeration in Economic Geography*, Springer-Verlag, Tokyo, 2014.
- 10) Ikeda, K., Onda, M. and Takayama, Y. : Spatial period doubling, invariant pattern, and break point in economic agglomeration in two dimensions, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol.92, pp.129–152, 2018.
- 11) Ikeda, K., Murota, K. and Takayama, Y. : Stable economic agglomeration patterns in two dimensions: beyond the scope of central place theory, *Journal of Regional Science*, Vol.57, pp.132–172, 2017.
- 12) Ikeda, K., Aizawa, H., Kogure, Y. and Takayama, Y. : Stability of bifurcating patterns of spatial economy models on a hexagonal lattice, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.28, No.11, pp.1850138–1–1850138–30, 2018.
- 13) 大澤実: 集積経済モデルの数理解析とその周辺, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.74, No.5, pp. 19–36, 2018.
- 14) Ikeda, K. and Murota, K. : *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials*, 3rd ed, Springer-Verlag, Tokyo, 2019.
- 15) Golubitsky, M., Stewart, I. and Schaeffer, D. G. : *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol.2, Springer-Verlag, New York, 1988.
- 16) Kogure, Y. and Ikeda, K. : Group-Theoretic Analysis of a Scalar Field on a Square Lattice, Preprint.
- 17) Sandholm, W. H. : *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, 2010.
- 18) 藤井文夫, 大崎純, 池田清宏 : 構造と材料の分岐力学, 計算工学シリーズ 3, コロナ社, 2005.

(2020. 3. 8 受付)