

多起点多終点コリドーネットワークにおける 動的システム最適配分

酒井 高良¹・赤松 隆²

¹学生会員 東北大学 大学院情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)
E-mail: takara.sakai.t1@dc.tohoku.ac.jp

²正会員 東北大学教授 大学院情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)
E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

動的システム最適 (DSO:Dynamic System Optimal) 配分は、ベンチマークフローパターンを与えるだけでなく様々な渋滞緩和策の基礎となる概念である。しかしながら、その解析的解法や解パターンの性質に関するこれまでの研究の多くは単一ボトルネックネットワークを対象としたものに留まっており、より一般的な状況における理論的知見は限定的である。本研究では、経路選択の存在しないコリドーネットワークにおける多起点多終点 OD パターンを対象とした出発時刻選択 DSO 配分の理論特性の解明を目的とする。具体的には、まず、DSO 配分問題を線形計画問題として定式化したのち、リンクベースのサブ問題を基本モジュールとする階層的最適化問題に変換する。次に、これらサブ問題の最適解には OD ペアの通行優先順位に相当するソーティング特性が存在することを、最適輸送理論の枠組みを用いて明らかにする。さらに、このソーティング特性を活用し、DSO 配分問題が最終的に高々リンク数次元の凸計画問題に帰着することを明らかにする。

Key Words: *corridor network, dynamic system optimal assignment, many-to-many OD pattern, optimal transport theory*

1. はじめに

(1) 背景

動的システム最適 (DSO:Dynamic System Optimal) 配分は、ネットワーク全体の総交通費用を最小化するベンチマークフローパターンを与えるだけでなく、ランプ流入制御^{1),2)}、動的混雑料金制度^{3),4)}、ボトルネック通行権取引制度^{5),6)}などの渋滞抑制スキームの理論基盤となる概念である。そのなかでも、交通量の時間方向の分散により総交通費用の最小化を図る出発時刻選択型の DSO 配分問題¹ は、数理構造が明快な線形計画問題 (LP:Liner Programing) として定式化できる利便性から、これまでに数多くの解法アルゴリズムが提案されてきた^{7),8)}。その一方で、このような DSO 配分問題の解析的解法やその解パターン (DSO フローパターン) の規則性について扱った研究は、単一ボトルネックネットワークを対象とした解析にほぼ限定される。

数少ない研究のひとつとして Osawa et al.⁹⁾ では、コリドーネットワークにおける DSO 配分問題の解析解を導出しているが、起終点のいずれかが単一の OD パターンを前提とした解法に留まっている。また、Akamatsu et al.¹⁰⁾ では最適輸送理論の枠組みを活用し DSO フ

ローパターンの規則性を示しているが、単一ボトルネックネットワークの枠組みに限定される。

(2) 目的と貢献

本研究では、コリドーネットワークにおける多起点多終点 OD パターンを対象とした DSO 配分問題の理論特性を解明する。具体的には、まず、線形計画問題として定式化された DSO 配分問題をリンクベースのサブ問題を基本モジュールとする階層的最適化問題に変換する。次に、これらサブ問題の最適解には、OD ペアの通行優先順位に相当するソーティング特性が存在することを最適輸送理論の枠組みを活用し明らかにする。さらに、このソーティング特性を活用することで、DSO 配分問題は最終的に、高々リンク数次元の凸計画問題に帰着することを明らかにする。

本研究で対象とする DSO 配分問題の解法に関する既存研究の多くは、数値解を求めることを目的としている。しかしながら、それら数値計算アルゴリズムでは時間軸が離散時刻系で扱われていることが多い。そのため、精度の良い計算結果を得るためには、時間の刻み幅を細かくする必要があり、その結果未知変数の次元は膨大になってしまう。また、それらの数値解から交通流制御戦略へ応用できる (定性的な)DSO フローパターンの規則性を見出すことは困難である。このような問題に対し、本研究では連続時間系における解析的

¹ 本研究では、経路選択を含まない出発時刻選択 DSO 配分問題を解析対象とする。以降では特別な補足がない限り、単に DSO 配分問題という表記は出発時刻選択 DSO 配分問題を意味する。

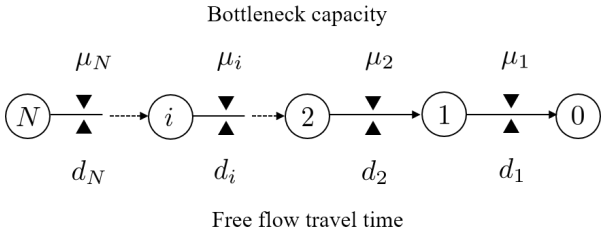


図-1 コリドーネットワーク

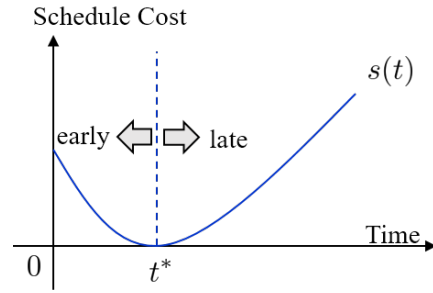


図-2 スケジュールコスト関数のイメージ

解法を明らかにし，DSO フローパターンの規則性(通行優先順位)を示した．これらの点は本研究の大きな貢献である．

(3) 本稿の構成

本稿の構成は以下の通りである．続く 2 章にて，コリドーネットワークにおける DSO 配分問題を定式化する．3 章では，この DSO 配分問題に対して，最適輸送理論の枠組みを活用した解析的解法を明らかにする．4 章では，4 ノードからなる簡易ネットワークを対象として，本研究の解析アプローチの具体例を示す．最後に，5 章にて本研究のまとめを述べる．本稿では紙面の都合上，解析アプローチの基本的な考え方を示すことを優先し，数学的に厳密な議論は適宜割愛している．また，本稿で示す補題・命題の簡単な証明は付録に示しているが，より厳密な証明については酒井¹¹⁾を参照されたい．

2. 動的システム最適配分

(1) モデルの設定と記号の定義

本研究では，図-1 に示すような経路選択の存在しないコリドーネットワークを解析対象とする．このコリドーネットワークは，\$N+1\$ 個のノード集合 \$\mathcal{N}\$ と \$N\$ 本の方向付きリンク \$\mathcal{L}\$ 集合から構成されており，ネットワーク上の各リンクにはそれぞれひとつのボトルネックが存在している．ここでノード \$i(i \neq 0)\$ に対応する唯一の直下流リンクをリンク \$i\$ と表し，そのボトルネック容量を \$\mu_i\$，リンク自由走行時間を \$d_i\$ と表す．さらに，ノード \$(i, j)\$ 間の自由走行時間 \$c_{ij}\$ を次のように定義する：

$$c_{ij} = \sum_{i \geq k > j} d_k \quad \text{where } i > j \quad (1)$$

本研究で対象とするコリドーネットワークには経路選択が存在しないため，ある OD ペアが通行するリンク集合は事前に列挙可能である．同様に，あるリンクを通過する OD ペア集合もまた列挙可能である．これらの集合を，OD ペア \$(r, s)\$ が通行するリンク集合 \$\mathcal{L}^{rs}\$ お

よびリンク \$i\$ を通行する OD ペア集合 \$\Omega_i\$ として表す：

$$\Omega_i \equiv \{(r, s) | r \geq i > s, (r, s) \in \Omega\} \quad \forall i \in \mathcal{L} \quad (2)$$

$$\mathcal{L}^{rs} \equiv \{i | r \geq i > s, i \in \mathcal{L}\} \quad \forall (r, s) \in \Omega \quad (3)$$

また，本稿では簡単に解析アプローチを示すため，ボトルネックパターンに関して次の仮定を導入する：

仮定 1. ボトルネック容量には次に示す関係が成立する：

$$\mu_{i+1} < \mu_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4)$$

このようなネットワークにおいて，OD ペアを到達可能な全ノードペア間に設定し，OD ペア \$(r, s)\$ の総 OD 需要を \$Q^{rs}\$ を用いて表す．さらに，時刻 \$t \in \mathcal{T}\$ に終点 \$s\$ に到着する OD フロー(未知変数)を \$q^{rs}(t)\$ と定義する．各ドライバーは，それぞれ終点への希望到着時刻 \$t^*\$ を保持しており，実際の到着時刻によって希望到着時刻とのずれに起因する私的費用(スケジュールコスト)を被る．ここで，時刻 \$t\$ に到着したドライバーが経験するスケジュールコストを \$s(t; t^*)\$ (スケジュールコスト関数)を用いて表す．本研究では，終点希望到着時刻およびスケジュールコスト関数の形状は OD ペアによらず全ドライバー共通とする．また，スケジュールコスト関数は凸関数とする．ここまでで示した主要な記号の定義の一覧を表-1 に示す(便宜的に以降の解析で導入する記号も併記している)．

(2) 定式化

本研究では，DSO フローパターンを各リンクにおいていかなる時間帯も容量以上のフローが流れないという条件のもと，全ドライバーの総旅行費用を最小化するフローパターン \$\{q^{rs*}(t)\}\$ と定義する²⁾．このような DSO フローパターン \$\{q^{rs*}(t)\}\$ は，具体的には，OD 需要保存条件およびボトルネック容量制約条件のもと，総旅行費用を最小化する線形計画問題の最適解として得られる．以降では，目的関数および各制約条件を整理し，コ

²⁾ 本研究では各ボトルネックにおいて待ち行列が存在しない状況の DSO 配分問題を扱う．

表-1 記号の定義

記号	定義
\mathcal{N}	ノード集合
\mathcal{L}	リンク集合
Ω_i	リンク i を通行する OD ペア集合
\mathcal{L}^{rs}	OD ペア (r, s) が通行するリンク集合
μ_i	リンク i のボトルネック容量
d_i	リンク i の自由走行時間
c_{ij}	ノード (i, j) 間の自由走行時間
$(r, s) \in \Omega$	OD ペアと OD ペア集合
Q^{rs}	OD ペア (r, s) の OD 需要
$t \in \mathcal{T}$	時刻と配分対象時間帯
$q^{rs}(t)$	時刻 t に終点 s に 到着する OD ペア (r, s) のフロー
$s(t)$	スケジュールコスト関数
$y_i(t)$	リンク流入フロー
$x_i^{rs}(t)$	OD ペア別リンク流入フロー
CL^{rs}	OD ペア (r, s) のクリティカルリンク
$\hat{\Omega}_i$	$CL^{rs} = i$ である OD ペア集合
$\hat{s}_i^{rs}(t)$	リンクベーススケジュールコスト関数

リドネットワークにおける DSO 配分問題 [DSO-LP] を示す。

まず、目的関数となる全ドライバーの総旅行費用 Z は、スケジュールコストの総和と自由走行時間の総和から次のように定義される：

$$Z \equiv \sum_{(r,s) \in \Omega} \int_{\mathcal{T}} q^{rs}(t) s(t) dt + \sum_{(r,s) \in \Omega} \int_{\mathcal{T}} q^{rs}(t) c_{rs} dt \quad (5)$$

次に、配分対象時間帯 \mathcal{T} における OD 需要の保存則は次のように書ける：

$$\int_{\mathcal{T}} q^{rs}(t) dt = Q^{rs} \quad \forall rs \in \Omega \quad (6)$$

さらに、ボトルネック容量制約は次のように表される：

$$\sum_{(r,s) \in \Omega_i} x_i^{rs}(t) \leq \mu_i \quad \forall i \in \mathcal{L} \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (7)$$

ここで $x_i^{rs}(t)$ は OD ペア別リンクフロー変数であり、時刻 t におけるリンク i への OD ペア (r, s) 流入フローを表す。また、このリンクフロー変数 $x_i^{rs}(t)$ と OD フロー変数 $q^{rs}(t)$ には、ノードにおけるフロー保存則に相当する次の関係式が成立する：

$$x_i^{rs}(t) = q^{rs}(t + c_{is}) \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad \forall i \in \mathcal{L}^{rs}, \quad \forall (r, s) \in \Omega. \quad (8)$$

以上より、目的関数 (5)、制約条件 (6), (7), (8) を用いて、DSO 配分問題は次のように定式化される：

[DSO-LP]

$$\min_{q^{rs}(t) \geq 0} \cdot \sum_{rs \in \Omega} \int_{\mathcal{T}} s(t) q^{rs}(t) dt, \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad \int_{\mathcal{T}} q^{rs}(t) dt = Q^{rs} \quad \forall rs \in \Omega, \quad (6)$$

$$\sum_{(r,s) \in \Omega_i} x_i^{rs}(t) \leq \mu_i \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (7)$$

$$x_i^{rs}(t) = q^{rs}(t + c_{is}) \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad \forall i \in \mathcal{L}^{rs}, \quad \forall (r, s) \in \Omega. \quad (8)$$

3. 問題の構造と解の特性

本章では、[DSO-LP] をリンクベースのサブ問題とマスター問題からなる階層的最適化問題に変換し、各問題の数理構造および解析的解法を明らかにする。

(1) 階層的最適化問題の導出

階層的最適化問題は、ひとつのマスター問題とリンク数個のサブ問題から構成される。ここで、マスター問題は各リンクにおける最適リンクフローパターンを決定する役割を果たし、各サブ問題はその最適リンクフローパターンを満足するように OD ペア別最適リンクフローパターンを求める役割を果たす。言い換えれば、マスター問題は最適リンクフローの総量を決定する問題、リンクごとのサブ問題はその最適フローの OD ペア別の内訳を決定する問題となっている。以降では、具体的にこのような構造の階層的最適化問題を導出するなお本稿では、より明瞭に議論を進めるため途中式および補題の証明を本文では割愛している。それらの詳細については、本稿付録および酒井¹¹⁾を参照されたい。

各サブ問題で対象とする OD ペアを区別するために、クリティカルリンクの概念を定義する。クリティカルリンクはある OD ペアの“通行するリンクの中で最小のボトルネック容量のリンク”のことを指す概念である。ボトルネックパターンに関する仮定 1 を考慮すると、クリティカルリンクは次のように定義される³⁾：

定義 1. OD ペア (r, s) のクリティカルリンク CL^{rs} を

³⁾ 本稿では解析対象としないが、ボトルネックパターンに関する仮定 1 がない場合の、一般的なクリティカルリンクおよびクリティカルリンクが同一である OD ペア集合の定義は次のように書ける：

$$CL^{rs} \equiv \arg \min_{i \in \mathcal{L}^{rs}} \{\mu_i\} \quad \forall (r, s) \in \Omega \quad (9)$$

$$\hat{\Omega}_i \equiv \left\{ (r, s) \mid i = \arg \min_{m \in \mathcal{L}^{rs}} \{\mu_m\} \right\} \quad \forall i \in \mathcal{L} \quad (10)$$

次のように定義する：

$$CL^{rs} \equiv s - 1 \quad \forall (r, s) \in \Omega \quad (11)$$

各サブ問題では、次に示すクリティカルリンクが同一である OD ペア集合 $\hat{\Omega}_i$ を対象とする：

定義 2. クリティカルリンクが i である OD ペア集合 $\hat{\Omega}_i$ を次のように定義する：

$$\hat{\Omega}_i \equiv \{(r, s) \mid r > s, s = i - 1\} \quad \forall i \in \mathcal{L} \quad (12)$$

これらを用いて、[DSO-LP] の OD ペア別リンクフロー変数 $x_i^{rs*}(t)$ に関する解パターンについて次の補題を導入する。

補題 1. 以下の条件を満足するフローパターン $x_i^{rs*}(t)$ およびコンパクト集合 $\mathcal{T}_i = [t_i^-, t_i^+]$ が [DSO-LP] の解として存在する：

$$\sum_{(r,s) \in \hat{\Omega}_i} x_i^{rs*}(t) > 0 \quad \text{iff } t \in [t_i^-, t_i^+], \quad (13)$$

$$\sum_{(r,s) \in \Omega_i} x_i^{rs*}(t) = \mu_i \quad \text{iff } t \in [t_i^-, t_i^+]. \quad (14)$$

補題 1 は、具体的には、[DSO-LP] の最適解において以下の事項が成立すること示している：

- リンク i が容量一杯使われる時間帯 \mathcal{T}_i は連続である
- $\hat{\Omega}_i$ に含まれる OD ペアのフローが存在している時間帯は、リンク i は常に容量一杯使われている

補題 1 より、リンクベースのサブ問題を基本モジュールとする階層的最適化問題が導出できる。このことをリンクフロー変数 $y_i(t)$ を用いて、以下の命題により示す⁴。

命題 1. 次に示すマスター問題 [M] とサブ問題 [Sub(i)] からなる階層的最適化問題の最適解は、[DSO-LP] の最適解である。

[M]

$$\min_{y_i(t) \geq 0} \cdot Z^M \equiv \sum_{i \in \mathcal{L}} Z_i^S \quad (15)$$

$$\text{s.t. } y_i(t) \leq \mu_i \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad \forall i \in \mathcal{L} \quad (16)$$

[Sub(i)]

$$Z_i^S \equiv \min_{x_i^{rs}(t)} \cdot \sum_{rs \in \hat{\Omega}_i} \int_{\mathcal{T}} \hat{s}_i^{rs}(t) x_i^{rs}(t) dt, \quad (17)$$

$$\text{s.t. } \int_{\mathcal{T}} x_i^{rs}(t) dt = Q^{rs} \quad \forall rs \in \hat{\Omega}_i, \quad (18)$$

$$\sum_{rs \in \hat{\Omega}_i} x_i^{rs}(t) = \hat{y}_i(t) \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (19)$$

$$\text{where } \hat{y}_i(t) \equiv y_i(t) - \sum_{j>i} \sum_{rs \in \hat{\Omega}_j} x_i^{rs*}(t) \quad (20)$$

ここで $\hat{s}_i^{rs}(t)$ は、スケジュールコスト関数 $s(t)$ をリンク i 流入時刻ベースに変換した関数であり、次のように定義される：

定義 3. リンク流入時刻ベーススケジュールコスト関数 $\hat{s}_i^{rs}(t)$ を、時刻 t にリンク i に流入する OD ペア (r, s) フローが被るスケジュールコストとして次のように定義する：

$$\hat{s}_i^{rs}(t) \equiv s(t + c_{is}) \quad \forall i \in \mathcal{L}^{rs}, \quad \forall (r, s) \in \Omega, \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (21)$$

命題 1 におけるマスター問題 [M] は、各リンクの最適フローパターン $y_i(t)$ を決定する問題である。一方、サブ問題 [Sub(i)] はマスター問題の最適解 $y_i(t)$ およびボトルネック i よりも容量が小さいリンクにおけるサブ問題の最適解 $x_j^{rs*}(t)$ ($j > i$) を与件 ((20)) として、OD ペア $(r, s) \in \hat{\Omega}_i$ の最適リンク別 OD フローパターン $x_i^{rs}(t)$ を決定する問題となる。つまり、階層的最適化問題は、マスター問題と各サブ問題の階層構造に加えて、サブ問題間にも入れ子構造を有する問題となっている。

(2) サブ問題の構造

リンクごとに定義されるサブ問題 [Sub(i)] は、スケジュールコストを輸送コストとみなすと、OD ペア (r, s) と時刻 t について二重制約型の最適輸送問題の構造を有する。さらに、それらのスケジュールコスト関数は以下の補題 2, 3 に示す性質を持つ (証明は付録に示す。).

補題 2. スケジュールコスト関数 $\hat{s}_i^{rs}(t)$ は、終点 s および時刻 t について狭義モンジュ性を満足する。

$$\hat{s}_i^{rs}(t) + \hat{s}_i^{rs+1}(t + \Delta t) < \hat{s}_i^{rs+1}(t) + \hat{s}_i^{rs}(t + \Delta t) \quad \forall (r, s) \in \Omega, \forall t. \quad (22)$$

⁴ 補題 1 および命題 1 の証明は、補題 1 に示すフローパターンが階層的最適化問題の最適性条件を満足しうることにより証明できる。

補題 3. スケジュールコスト関数 $\widehat{s}_i^{rs}(t)$ は、起点 r および時刻 t についてモンジュ性を満足する。

$$\widehat{s}_i^{rs}(t) + \widehat{s}_i^{r-1s}(t + \Delta t) \leq \widehat{s}_i^{r-1s}(t) + \widehat{s}_i^{rs}(t + \Delta t) \quad \forall (r, s) \in \Omega, \forall t. \quad (23)$$

また、最適輸送理論¹²⁾によれば、輸送コスト関数が(狭義)モンジュ性を満足する場合に、ソーティング特性を有する解析解を得られることが知られている¹³⁾(詳細は付録に示す。)。これらのことから、次に示す命題 2 が導かれる：

命題 2. $\widehat{\Omega}_i$ に含まれる OD ペア (r, s) を以下の基準で並びかえた順序を $\{w = 1, 2, \dots, |\widehat{\Omega}_i|\}$ とする。

- (i) より終点が遠い OD ペア
 - (ii) 同一終点の場合は、より長距離トリップの OD ペア
- このとき、以下に示す $x_i^w(t)$ はサブ問題 [Sub(i)] の最適解である。

$$x_i^w(t) = \begin{cases} \widehat{y}_i(t) & \text{if } t \in [t_i^w, t_i^{w+1}] \\ 0 & \text{if } t \notin [t_i^w, t_i^{w+1}] \end{cases} \quad (24)$$

ここで t_i^w は、OD ペア $w = (r, s)$ のリンク i 流入開始時刻 t_i^{rs-} を表す。このようなソーティング特性は、マスター問題の具体的な解 $y_i(t)$ の形状に関わらず成立する⁵⁾。

(3) マスター問題の構造と性質

マスター問題は、サブ問題の最適解に成立するソーティング特性を活用することで、より数理的構造が明快な凸計画問題に帰着する。具体的には、マスター問題の目的関数にサブ問題の解 (24) を代入することで、OD ペア通行開始時刻 $t = \{t_i^{rs-}\}$ に関する以下の最適化問題が導かれる：

[M']

$$\min_t \quad Z^M(t) = \sum_{i \in \mathcal{L}} \sum_{(r,s) \in \widehat{\Omega}_i} \int_{t_i^{rs-}}^{t_i^{rs+}} \widehat{y}_i(t) \widehat{s}_i^{rs}(t) dt \quad (25)$$

$$\text{s.t.} \quad \int_{t_i^{rs-}}^{t_i^{rs+}} \widehat{y}_i(t) dt = Q^{rs} \quad \forall (r, s) \in \Omega \quad (26)$$

$$t_i^{rs-} - t_i^{rs+} \geq 0 \quad \forall (r, s) \in \Omega \quad (27)$$

$$t_i^{rs+} - t_i^{r(s+1)-} = 0 \quad \forall (r, s) \in \Omega \quad (28)$$

⁵⁾ 言い換えれば、ソーティング特性はあくまで OD ペアの通行順序に関する解パターンを示しているに過ぎず、(OD フローそのものに関する) 量的な解の知見を与えてはいない。

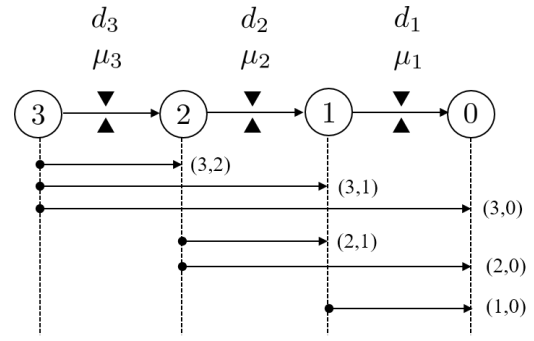


図-3 4 ノードコリドーネットワーク

ここで、制約条件 (27) は各 OD ペアの通行開始時刻と通行終了時刻の大小関係を表す条件である。制約条件 (28) はサブ問題のソーティング特性が示す OD ペアの通行順序に関する条件を表している。また、[M'] において $\widehat{y}_i(t)$ は各リンクの容量の差から算出される定数となる⁶⁾。さらに、[M'] の決定変数 t は各リンクが容量一杯使われ始める時刻に対応する。そのため、[M'] は高々リンク数 N 次元の問題となる。また、目的関数 $Z^M(t)$ は t について狭義凸であるため、次の命題が成立する。

命題 3. 問題 [M'] の最適解は、 t について一意に定まる。

命題 4. 問題 [M'] の最適解は、次に示す $s(t)$ について線形の連立方程式の解である：

$$\sum_{\widehat{\Omega}_i} \{s(t_i^{rs+}) - s(t_i^{rs-})\} + \sum_{j>i} \sum_{\widehat{\Omega}_j} \{s(t_j^{rs+})\} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{L} \quad (30)$$

命題 4 は [M'] の最適性条件が連立方程式 (30) となることを示している。命題 4 の一般的な証明は付録に示すが、より具体的な導出アプローチについては次章を参照されたい。

4. 具体的な解析例：4 ノードネットワーク

本章では、ここまでで示した解析アプローチを、4 ノードから構成されるコリドーネットワークに適用した具体例を示す。

⁶⁾ 式 (20) は、補題 2 が示す “ $\widehat{\Omega}_i$ に含まれる OD ペアのフローが存在している時間帯は、リンク i は常に容量一杯使われている” ことを明示的に考慮すると次のように書くことができる：

$$\widehat{y}_i(t) = \mu_i - \sum_{j>i} \mu_j \delta_{ij} \quad \forall t \in \mathcal{T}_i \quad (29)$$

ここで δ_{ij} は最終的な解パターンを表す 0, 1 のパラメータである。その値は、OD 需要およびリンク自由走行時間パターンから決定することができる。

(1) モデルと階層的最適化問題の導出

図-3 に示すような 4 ノードからなるコリドーネットワークを考える。仮定 1 より、リンク容量について $\mu_3 < \mu_2 < \mu_1$ の関係が成立している。OD ペア需要は到達可能なすべてのノード間に存在し、具体的には以下に示す 6 ペアとなる：

$$\Omega = \{(3,0), (3,1), (3,2), (2,1), (2,0), (1,0)\} \quad (31)$$

このようなモデル設定下において 3 章で示したアプローチにより、階層的最適化問題を導出する。まず、各リンクベースサブ問題で対象とする OD ペア $\hat{\Omega}_i$ (クリティカルリンクが同一である OD ペア集合) を次のように整理する：

$$\hat{\Omega}_3 = \{(3,0), (3,2), (3,1)\} \quad (32)$$

$$\hat{\Omega}_2 = \{(2,1), (2,0)\} \quad (33)$$

$$\hat{\Omega}_1 = \{(3,0)\} \quad (34)$$

次に、命題 1 より、4 ノードコリドーネットワークにおけるマスター問題およびリンクベースサブ問題は具体的に以下となる：

[4N-M]

$$\min_{y_r^i(t) \geq 0} \cdot Z^M \equiv \sum_{r \in \mathcal{N}} Z_r^S \quad (35)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r \geq i} y_r^i(t) \leq \mu_i \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad \forall i \in \mathcal{L} \quad (36)$$

[4N-Sub(3)]

$$Z_3^S \equiv \min_{x_3^{rs}(t) \geq 0} \cdot \sum_{rs \in \hat{\Omega}_3} \int_{\mathcal{T}} s_3^{rs}(t) x_3^{rs}(t) dt,$$

$$\text{s.t.} \quad \int_{\mathcal{T}} x_3^{rs}(t) dt = Q^{rs} \quad \forall rs \in \hat{\Omega}_3,$$

$$\sum_{rs \in \hat{\Omega}_3} x_3^{rs}(t) = \hat{y}_3(t) \quad \forall t \in \mathcal{T}_3$$

where $\hat{y}_3(t) = y_3(t)$

[4N-Sub(2)]

$$Z_2^S \equiv \min_{x_2^{rs}(t) \geq 0} \cdot \sum_{rs \in \hat{\Omega}_2} \int_{\mathcal{T}} s_2^{rs}(t) x_2^{rs}(t) dt,$$

$$\text{s.t.} \quad \int_{\mathcal{T}} x_2^{rs}(t) dt = Q^{rs} \quad \forall rs \in \hat{\Omega}_2,$$

$$\sum_{rs \in \hat{\Omega}_2} x_2^{rs}(t) = \hat{y}_2(t) \quad \forall t \in \mathcal{T}_2$$

where $\hat{y}_2(t) = y_2(t) - \sum_{(r,s) \in \hat{\Omega}_3} x_2^{rs}(t)$

[4N-Sub(1)]

$$Z_1^S \equiv \min_{x_1^{rs}(t) \geq 0} \cdot \sum_{rs \in \hat{\Omega}_1} \int_{\mathcal{T}} s_1^{rs}(t) x_1^{rs}(t) dt,$$

$$\text{s.t.} \quad \int_{\mathcal{T}} x_1^{rs}(t) dt = Q^{rs} \quad \forall rs \in \hat{\Omega}_1,$$

$$\sum_{rs \in \hat{\Omega}_1} x_1^{rs}(t) = \hat{y}_1(t) \quad \forall t \in \mathcal{T}_1$$

where $\hat{y}_1(t) = y_1(t) - \sum_{(r,s) \in \hat{\Omega}_3} x_1^{rs}(t) - \sum_{(r,s) \in \hat{\Omega}_2} x_1^{rs}(t)$

(2) サブ問題と OD ペアの最適通行順序

命題 2 より、各サブ問題における最適解に成立するソーティング特性として、以下の OD ペア最適通行順序を得る：

- [Sub(3)], $\Omega_3 : (3,0) \rightarrow (3,1) \rightarrow (3,2)$
- [Sub(2)], $\Omega_2 : (2,0) \rightarrow (2,1)$
- [Sub(1)], $\Omega_1 : (1,0)$

これより OD ペア (r,s) のリンク i 流入時間帯 $[t_i^{rs-}, t_i^{rs+}]$ を用いて、サブ問題の最適解は次のように書ける：

$$x_r^{rs}(t) = \begin{cases} y_r^r(t) & \text{if } t \in [t_i^{rs-}, t_i^{rs+}] \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (37)$$

(3) マスター問題と DSO フローパターン

本節では、3 章で示したアプローチに基づき、サブ問題に成立するソーティング特性を活用しマスター問題をリンク数次元の凸計画問題に再構築する。さらに、区分線形のスケジュールコスト関数(図-4)を具体的に仮定し、命題 4 より、DSO フローパターンが線形連立方程式の解として得られることを明らかにする。

各 OD ペアのリンク流入開始時刻および流入終了時刻を用いて表されたリンクベースサブ問題の解析解 (37) を、マスター問題 [4N-M] に代入し再構築した [4N-M'] を以下に示す。

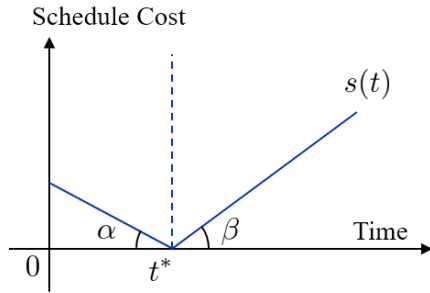


図-4 区分線形のスケジュールコスト関数

[4N-M']

$$\min_{t_r^{rs-}, t_r^{rs+}} Z^M = \sum_{r \in \mathcal{N}} \sum_{s < r} \int_{t_r^{rs-}}^{t_r^{rs+}} \mu_r(t) s(t + c_{rs}) dt \quad (38)$$

s.t. $-\int_{t_r^{rs-}}^{t_r^{rs+}} \mu_r(t) dt + Q^{rs} = 0 \quad \forall (r, s) \in \Omega \quad (39)$

$$t_r^{rs-} - t_r^{rs+} \geq 0 \quad \forall (r, s) \in \Omega \quad (40)$$

$$\begin{cases} t_3^{30+} - t_3^{31-} = 0 \\ t_3^{31+} - t_3^{32-} = 0 \\ t_2^{20+} - t_2^{21-} = 0 \end{cases} \quad (41)$$

3章で示したように、再構築されたマスター問題 [4N-M'] の決定変数は、リンクベースサブ問題のソーティング特性から把握できる先頭通行 OD ペアの通行開始時刻 $t^{30-}, t^{20-}, t^{10-}$ である。そのほかの時刻変数 t については、OD 需要の保存則に基づき計算される。具体的な計算式については付録に示している。

命題 4 が示すように、[4N-M'] の最適解は最適性条件を表す連立方程式の解として求めることができる。4 ノードネットワークのケースにおいては、具体的に以下に示す連立方程式に帰着する：

$$\begin{cases} -s(t^{30-}) - s(t^{31-}) + s(t^{32+}) - s(t^{32-}) \\ \quad + s(t^{21+}) + s(t^{10+}) = 0 \\ -s(t^{20-}) + s(t^{21+}) - s(t^{21-}) + s(t^{10+}) = 0 \\ s(t^{10-}) - s(t^{10+}) = 0 \end{cases} \quad (42)$$

さらに、本稿では具体的に解が定まるケースとして、図-4 に示すような区分線形のスケジュールコスト関数を考える。具体的には、スケジュールコスト関数 $s(t)$ を以下のように定義する：

$$s(t) \equiv \begin{cases} -\alpha t & \text{if } t \leq t^* = 0 \\ \beta t & \text{if } t > t^* = 0 \end{cases} \quad (43)$$

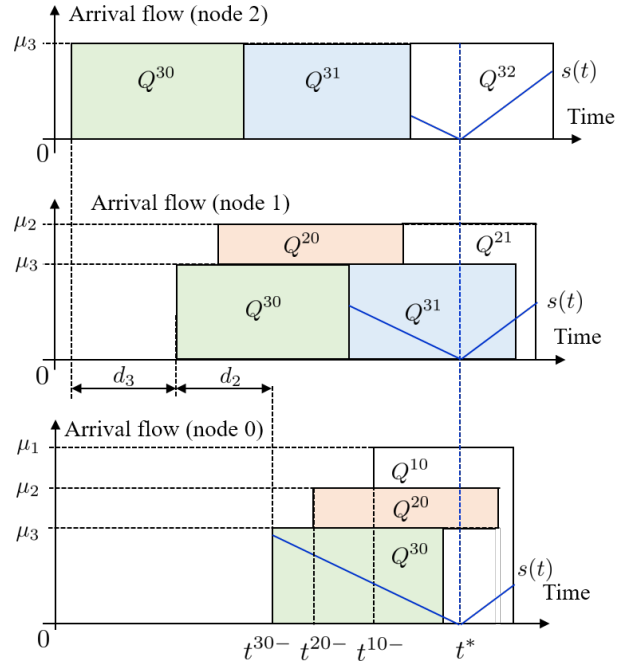


図-5 最適フローパターン

ここで、 α, β はそれぞれ早着、遅着パラメータであり正の定数である。また希望到着時刻は $t^* = 0$ とした。

このスケジュールコスト関数 (43) を用いると、最終的に最適性条件は $t^{30-}, t^{20-}, t^{10-}$ についての線形連立方程式に帰着する：

$$\begin{cases} \alpha t^{30-} + \alpha t^{31-} + \beta t^{32+} + \alpha t^{32-} \\ \quad + \beta t^{21+} + \beta t^{10+} = 0 \\ \alpha t^{20-} + \beta t^{21+} + \alpha t^{21-} + \beta t^{10+} = 0 \\ \beta t^{10+} + \alpha t^{10-} = 0 \end{cases} \quad (44)$$

この線形連立方程式 (44) の解および、各 OD ペアの最適通行順序をもとにして得られる DSO フローパターンを図-5 に示す。図-5 は、ノード 2, 1, 0 への時々刻々の到着フローを表している。例えば OD ペア (3, 0) に着目すると、この OD フローは始点 3 からノード 2, 1 を通行し終点 0 へ至るので、図において緑色で表される OD ペア (3, 0) フローはリンク自由走行時間分 (d_3, d_2) だけずれて各ノードへ到着することを表している。また、リンク 2 に関するサブ問題のソーティング特性より決定される OD ペアの最適通行順序 (2, 0) \rightarrow (2, 1) は、図においてノード 1 への到着順序として表されている。ここで、OD ペア (2, 0), (2, 1) の他にリンク 2 を通行する OD ペアである (3, 0), (3, 1) の最適フローパターンは、リンク 1 に関するサブ問題により決定されることに注意されたい。

5. おわりに

本研究では、コリドーネットワークネットワークにおける多起点多終点 OD パターンを対象とした DSO 配分問題の理論特性を明らかにした。具体的には、まず、DSO 配分問題からリンクベースのサブ問題を基本モジュールとする階層的最適化問題を導いた。そして、各サブ問題の最適解には、OD ペアの通行順序に相当するソーティング特性が存在することを明らかにした。さらに、このソーティング特性を活用すると、DSO 配分問題は最終的に高々リンク数次元の凸計画問題に帰着することを示した。

これまでのコリドーネットワークにおける DSO 配分問題の解法に関する研究の多くは、数値計算アルゴリズムの提案に留まっている。これに対し、DSO 配分問題の構造を活かした解析的解析アプローチを明らかにした点は本研究の大きな貢献である。さらに、本研究で示した DSO フローパターンの規則性 (OD ペアの通行優先順序) は、交通流制御戦略への応用も期待できる。

今後の課題として、需要サイド渋滞抑制スキームへの応用を踏まえ、ドライバーの選択行動を記述した動的利用者均衡 (DUE: Dynamic User Equilibrium) 配分と DSO 配分との対応関係の解明が挙げられる。すでに、本研究と関連が深い Fu et al.¹⁴⁾ では、単一ボトルネックネットワークにおいて、両者に 1 対 1 の対応関係が存在することが示されている。本研究のコリドーネットワークにおける解析でも、同様の関係性の存在が示唆されており、この詳細については改めて別の機会に報告したい。

謝辞： 本研究は、JSPS 科研費 JP18H01551 の助成を受けた研究の一部です。ここに記し、感謝を表します。

付録 I [DSO-LP] の最適性条件

コリドーネットワークにおける DSO 配分問題 [DSO-LP] の最適性条件を次に示す。

$$\begin{cases} -\rho^{rs} + s(t) + \sum_{i \in \mathcal{L}^{rs}} p_i(t - c_{is}) = 0 & \text{if } q^{rs}(t) > 0 \\ -\rho^{rs} + s(t) + \sum_{i \in \mathcal{L}^{rs}} p_i(t - c_{is}) \geq 0 & \text{if } q^{rs}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad \forall (r, s) \in \Omega \quad (\text{I.1})$$

$$\begin{cases} -\sum_{rs \in \Omega_i} q^{rs}(t + c_{is}) + \mu_i = 0 & \text{if } p_i(t) > 0 \\ -\sum_{rs \in \Omega_i} q^{rs}(t + c_{is}) + \mu_i \geq 0 & \text{if } p_i(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (\text{I.2})$$

$$\int_{\mathcal{T}} q^{rs}(t) dt = Q^{rs} \quad \forall (r, s) \in \Omega \quad (\text{I.3})$$

ここで $p_i(t), \rho^{rs}$ は、それぞれボトルネック容量制約、OD 需要の保存則に対応する双対変数である。

付録 II 最適輸送理論とモンジュ性

本章では、本研究の解析アプローチにおいて重要な役割を果たす最適輸送理論の枠組みを示す。特に、本文で示した階層的最適化問題のサブ問題に対応する最適輸送問題および、問題の構造を決定するモンジュ性を重点的に扱う。なお、本章で扱う記号は本文の定義とは異なることに注意されたい。

最も代表的な最適輸送問題のクラスのひとつであるヒッチコック問題は、供給地を表すノード集合 \mathcal{I} と需要地を表すノード集合 \mathcal{K} からなる二部グラフ構造のネットワークにおける最適輸送問題である。具体的なネットワーク条件を以下に示す。 I 個の供給地と K 個の需要地を表す各ノードには、それぞれ供給量 S_i および需要量 Q_k が定義されており、これらの地点を結ぶリンクには輸送コスト $c_{i,k}$ が定義されている。主要な記号の定義の一覧を以下に示す。

- I : 供給地数
- K : 需要地数
- $i \in \mathcal{I}$: 供給地と供給地集合
- $k \in \mathcal{K}$: 消費地と消費地集合
- S_i : 供給地 i の供給量
- Q_k : 消費地 k の需要量
- $c_{i,k}$: 地点 i, k 間の輸送コスト
- $x_{i,k}$: 地点 i, k 間の輸送量 (決定変数)

ここで、需要量と供給量の総和は一致しているものとする：

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} S_i = \sum_{k \in \mathcal{K}} Q_k$$

ヒッチコック問題は、需要量制約および供給量制約を満足し、かつ総輸送費用を最小化するフローパターンを求める問題として、以下の線形計画問題の形で定式化される：

[2D-OPT]

$$\min_{\mathbf{x}} \quad Z(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k \in \mathcal{K}} c_{i,k} x_{i,k} \quad (\text{II.1})$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k \in \mathcal{K}} x_{i,k} = S_i \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (\text{II.2})$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} x_{i,k} = Q_k \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (\text{II.3})$$

$$x_{i,k} \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (\text{II.4})$$

この [2D-OPT] は二重制約型の構造を有しており、

時刻について離散系か連続系かの違いを無視すれば、本研究のサブ問題と対応する構造である。

このように定式化された [2D-OPT] の解析を行う上で重要ないくつかの概念および定理を導入する。

定義 4. 輸送コスト行列 C が以下の条件を満たすとき、 C はモンジュ性を満足する。

$$c_{i,k} + c_{i+1,k+1} \leq c_{i,k+1} + c_{i+1,k} \quad \forall 1 \leq i < I, 1 \leq k < K \quad (\text{II.5})$$

特に等式条件が不要な場合は、狭義モンジュ性を満足する。

ヒッチコック問題 [2D-OPT] の実行可能解を見つける方法として、北西隅のルール (Northwest corner rule) が存在する。北西隅のルールについて以下の定理が成立する¹⁵⁾¹⁶⁾。

定理 1. 北西隅のルールは、任意のヒッチコック問題に対して、実行可能解を与える。

定理 2. 北西隅のルールは、輸送コスト行列 C がモンジュ性を満足する最適輸送問題に対して、最適解を与える。

これまでに示した離散型のヒッチコック問題に関する定理は、供給地および需要地が連続の場合にも同様に成立する。確率変数 $x \in X = \mathbb{R}$ および $y \in Y = \mathbb{R}$ およびそれに対応する分布関数 F_1, F_2 を導入する。さらに、確率変数 (x, y) に対応する分布関数 F も定義する。連続な輸送コスト関数 $c: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて、連続型の最適輸送問題は以下のように表される。

[2D-COTP]

$$\min_{F \in \mathcal{F}(F_1, F_2)} Z_{2D}(F) \equiv \int_{X \times Y} c(x, y) dF(x, y) \quad (\text{II.6})$$

where $\mathcal{F}(F_1, F_2) \equiv \{F(x, \infty) = F_1(x), F(\infty, y) = F_2(y)\}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (\text{II.7})$

ここで $F_1(\infty) = F_2(\infty)$ である。また、[2D-COTP] に関して次に示す定理が成り立つ^{17),18)}：

定理 3. 輸送コスト分布 $c: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が劣モジュラ関数であるとき、[2D-COTP] の解 $F^*(x, y) \in \mathcal{F}(F_1, F_2)$ は次に示す FrechetHoeffding 分布として得られる：

$$F^*(x, y) = \min\{F_1(x), F_2(y)\} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{II.8})$$

なお、このような最適輸送理論と単一ボトルネックにおける DSO 配分問題との対応関係についての詳細は Akamatsu et al.¹⁰⁾ を参照されたい。

付録 III 補題・命題の証明

(1) 補題 2, 補題 3 の証明

補題 2 および補題 3 の証明を示す。ここで、明瞭に証明を行うために、時刻系を離散化して議論を行う⁷⁾。

サブ問題の輸送コスト $[\hat{s}_i^s(t)]$ について、以下の手順で、輸送コスト行列を再構築すればモンジュ性を満たすことが可能である：

- 行：時刻，列：OD ペアとする
- 列方向を、(1) 目的地が遠い順，(2) 自由走行時間が長い順，の優先順位で並べ替える。

次に、このように構築された輸送コスト行列が実際にモンジュ性を満たすことを示す。証明を明瞭にするために OD ペアに通し番号を与え、 $\hat{s}^{rs}(\tau_i) = y_{k,t}$ とする。

同一目的地の場合 インデックス k と $k+1$ が表す OD ペアが同一目的地の場合をまず考える。このとき $y_{k,t} = y_{k+1,t}$ および $y_{k,t+1} = y_{k+1,t+1}$ が成立している。よって、

$$y_{k,t} + y_{k+1,t+1} = y_{k+1,t} + y_{k,t+1} \quad (\text{III.1})$$

が成立するため、モンジュ性を満たす (補題 3)。

異なる目的地の場合 次に、インデックス k と $k+1$ が表す OD ペアが異なる目的地の場合を考える。目的地間の自由走行時間を d とする。このとき、離散時間の微小時間幅を Δt とすると行列の各要素は以下である。

$$\begin{cases} y_{k,t} = s(t) \\ y_{k+1,t} = s(t-d) \\ y_{k,t+1} = s(t) + \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=t} \Delta t \\ y_{k+1,t+1} = s(t+d) + \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=t+d} \Delta t \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

ここで A, B を以下のように定義する：

$$A \equiv y_{k,t} + y_{k+1,t+1} = s(t) + s(t+d) + \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=t+d} \Delta t \quad (\text{III.3})$$

$$B \equiv y_{k+1,t} + y_{k,t+1} = s(t+d) + s(t) + \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=t} \Delta t \quad (\text{III.4})$$

⁷⁾ より丁寧な証明および連続時間系における証明は Akamatsu et al.¹⁰⁾ の Appendix C. Proofs of Monge property を参照されたい。

スケジュールコスト関数の 1 階導関数 $\frac{ds(t)}{dt}$ が t について単調増加関数 ($;\frac{d^2s(t)}{dt^2} > 0$) であれば,

$$\left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=t} < \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=t+d} \quad (\text{III.5})$$

が成立する. よって $A < B$ となり狭義モンジュ性が成立する (補題 2).

(2) 命題 4 の証明

命題 4 の証明の方針を示す. 各 OD ペアの先頭時点 (initial) および後尾時点 (final) において成立する [4N-DSO-LP] の最適性条件に着目する:

$$\begin{cases} \text{(initial)} & -\rho^{rs} + s(t^{rs-}) + \sum_{i \in \mathcal{L}^{rs}} p_i(t^{rs-} - c_{is}) = 0 \\ \text{(final)} & -\rho^{rs} + s(t^{rs+}) + \sum_{i \in \mathcal{L}^{rs}} p_i(t^{rs+} - c_{is}) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

次に, この ρ^{rs} を削除し整理することで命題 4 に示す方程式系を得る:

$$\sum_{\hat{\Omega}_i} \{s(t^{rs+}) - s(t^{rs-})\} + \sum_{\mu_m > \mu_i} \sum_{\hat{\Omega}_m} \{s(t^{rs+})\} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{L} \quad (\text{III.7})$$

付録 IV 時刻変数の関数関係

4 章で示した 4 ノードネットワークの具体例の中で言及した時刻変数の関数関係を示す. 改めて [4N-M'] の決定変数は, リンクベースサブ問題のソーティング特性から把握できる先頭通行 OD ペアの通行開始時刻 $t^{30-}, t^{20-}, t^{10-}$ である. そのほかの時刻変数 t は, OD 需要の保存則より具体的に以下のように計算される:

$$\begin{aligned} t^{30+} &= t^{30-} + \frac{Q^{30}}{\mu_3} \\ t^{31-} &= t^{30-} + \frac{Q^{30}}{\mu_3} - d_3 \\ t^{31+} &= t^{30-} + \frac{Q^{30} + Q^{31}}{\mu_3} - d_3 \\ t^{32-} &= t^{30-} + \frac{Q^{30} + Q^{31}}{\mu_3} - d_3 - d_2 \\ t^{32+} &= t^{30-} + \frac{Q^{30} + Q^{31} + Q^{32}}{\mu_3} - d_3 - d_2 \\ t^{20+} &= t^{20-} + \frac{Q^{20}}{\mu_2 - \mu_3} \\ t^{21-} &= t^{20-} + \frac{Q^{20}}{\mu_2 - \mu_3} - d_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{21+} &= t^{31+} + \frac{Q^{21} - (\mu_2 - \mu_3)(t^{31+} - t^{21-})}{\mu_2} \\ t^{10+} &= t^{20+} + \frac{Q^{10} - (\mu_1 - \mu_2)(t^{20+} - t^{10-}) - \mu_3(t^{20+} - t^{30+})}{\mu_1} \end{aligned}$$

参考文献

- 1) 飯田恭敬, 朝倉康夫, 田中啓之: 複数経路を持つ都市高速道路網における最適流入制御モデルの定式化と解法, 土木学会論文集, 1992.
- 2) 朝倉康夫, 柏谷増男, 山内敏通: 観測データの利用による都市高速道路の動的な LP 型流入制御モデル, 土木計画学研究・論文集, 1996.
- 3) Shen, W. and Zhang, H. M.: On the morning commute problem in a corridor network with multiple bottlenecks: Its system-optimal traffic flow patterns and the realizing tolling scheme, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.43, No.3, pp.267–284, March 2009.
- 4) van den Berg, V. and Verhoef, E. T.: Congestion tolling in the bottleneck model with heterogeneous values of time, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.45, No.1, pp.60–78, January 2011.
- 5) Wada, K. and Akamatsu, T.: A hybrid implementation mechanism of tradable network permits system which obviates path enumeration: An auction mechanism with day-to-day capacity control, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, Vol.80, pp.304–326, June 2013.
- 6) Akamatsu, T. and Wada, K.: Tradable network permits: A new scheme for the most efficient use of network capacity, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol.79, pp.178–195, June 2017.
- 7) Munoz, J. C. and Laval, J. A.: System optimum dynamic traffic assignment graphical solution method for a congested freeway and one destination, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.40, No.1, pp.1–15, January 2006.
- 8) Shen, W. and Zhang, H. M.: System optimal dynamic traffic assignment: Properties and solution procedures in the case of a many-to-one network, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.65, pp.1–17, July 2014.
- 9) Osawa, M., Fu, H., and Akamatsu, T.: First-best dynamic assignment of commuters with endogenous heterogeneities in a corridor network, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.117, pp.811–831, November 2018.
- 10) Akamatsu, T., Wada, K., Iryo, T., and Hayashi, S.: Departure time choice equilibrium and optimal transport, *MPRA Paper* Item ID:90361, 2018.
- 11) 酒井高良: 環状ネットワークにおける動的システム最適配分, 東北大学情報科学研究科 修士論文, 2020.
- 12) Rachev, S. T. and Rüschemdorf, L.: *Mass Transportation Problems: Volume I: Theory*, Springer Science & Business Media, March 1998.

- 13) Burkard, R. E.: Monge properties, discrete convexity and applications, *European journal of operational research*, Vol.176, No.1, pp.1–14, January 2007.
- 14) Fu, H., Akamatsu, T., and Wada, K.: Dynamic traffic assignment in a corridor network: Optimum vs. equilibrium, Technical report.
- 15) Hoffman, A. J.: On greedy algorithms that succeed, *Surveys in combinatorics*, Vol.1985, pp.97–112, 1985.
- 16) Hoffman, A. J.: On simple linear programming problems, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Vol. 7, pp. 317–327, books.google.com, 1963.
- 17) Cambanis, S., Simons, G., and Stout, W.: Inequalities for $ek(x, y)$ when the marginals are fixed, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, Vol.36, No.4, pp.285–294, 1976.
- 18) Dubuc, S., Kagabo, I., and Marcotte, P.: A note on the uniqueness of solutions to the transportation problem, *INFOR. Information Systems and Operational Research*, Vol.37, No.2, pp.141–148, 1999.

(2020.3.8 受付)