更新履歴情報の欠損バイアスを考慮した道路照明柱の劣化予測手法

二宮陽平[1]・貝戸清之[2]

[1]学生会員　大阪大学大学院博士後期課程 工学研究科 地球総合工学専攻・独立行政法人日本学術振興会 特別研究員
（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: y.ninomiya@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[2]正会員　大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

道路標識や照明施設などの小規模附属物は，橋梁やトンネルなどの道路主構造物と比較して寿命が短い．既往の方法論を用いて道路付属物の劣化予測を精緻に行うためには，時系列点検データと同時に，どの施設に対して，いつ更新が行われたのかを把握できる完全な更新履歴データが必要となる．一方で，道路付属物は維持管理の優先性が相対的に低いことから，利用可能な更新履歴データが不完全である場合が多い．本研究では，不完全な更新履歴データをインプットとした新たな劣化予測もモデルを提案する．具体的には，個々の構造物の更新時点および更新回数を潜在的な確率変数と捉えた上で，構造物の劣化・更新過程をモデル化する．最後に，照明柱に関する実際の点検データを用いた実証分析を通して本研究の有用性を議論するとともに，劣化予測結果に基づくライフサイクル費用分析によって今後の照明柱の更新計画の妥当性を検証する．

Key Words : *statistical deterioration prediction, inspection data, missing bias, small-scale infrastructure, latent variable*

1.　はじめに

橋梁やトンネルなどの道路主構造物と比較して，道路標識や照明施設などの道路附属物は，維持管理上の優先性に劣るために，これまで計画的な点検や補修･更新の実施が困難であった．さらに道路附属物は膨大な数が存在する一方で，点検データは十分に蓄積されていない．これは，点検が実施された場合でも異常が検出された結果のみが記録される傾向が強いこと，点検データの電子化が全く進んでいないことがあげられる．したがって，補修や更新に関する履歴も同様の理由により欠損する事例が少なくない．一方で，道路附属物は道路施設の供用と同時に使用が開始され，加えて相対的に寿命が短いことから，潜在的な老朽化は道路施設よりも進展している可能性がある．したがって，道路附属物の更新履歴が獲得できない欠損バイアスを有する点検データを用いた統計的劣化予測手法を開発し，附属物を対象としたマネジメント手法を構築する必要がある．

社会基盤施設の統計的劣化予測として，マルコフ劣化ハザードモデルが提案されている．マルコフ劣化ハザードモデルは複数の時刻で実施された点検によって得られる，施設の健全度や点検間隔に関する情報から施設の劣化過程を表現でき，施設のマルコフ推移確率を非集計的に推定することを可能とする．一方で，モデル推定に用いる点検データの質や量（豊富さ）は実現象をいかに正確に表現するかを左右する．具体的には，施設に対して過去の更新履歴の欠損が生じている可能性のある点検データを用いて推定したマルコフ推移確率が真の推移確率に一致する保証はない．以上の問題意識のもと，本研究では，過去に更新が繰り返し実施されているにも関わらず，管理する複数の施設それぞれに関して，過去に更新が実施された回数のデータが存在しない社会基盤施設に着目し，施設の劣化予測を行う方法論を提案する．具体的には，過去の各時点に更新が実施された施設数を表現するデータを用いて，個々の社会基盤施設の更新時点および更新回数を確率変数として捉えることで，施設の劣化予測を行う方法論を提案する．以下，**2.** では，本研究の基本的な考え方を説明する．**3.** では，更新履歴に関する欠損バイアスを考慮した統計的劣化予測モデルの定式化を行う．**4.** では，ベイズ推計法を援用した，提案モデルの推定手法について説明する．

2.　本研究の基本的な考え方

(1)　小規模附属物の劣化予測

国土交通省が策定している点検要領によれば，道路構造物は，道路橋，道路トンネル，シェッド・大型カルバート，横断歩道橋，門型標識等，舗装，小規模附属物

そして道路土工構造物に分類される．この内，本研究においては小規模附属物に着目する．小規模附属物とは，道路法によれば，道路の構造の保全、安全かつ円滑な道路の交通の確保その他道路の管理上必要な施設又は工作物であり，具体的には標識や照明柱のことを指す．小規模附属物の特徴として，他の構造物と比較して，膨大な数が存在すること，寿命が短いことが挙げられる．このような構造物は，予防保全というよりはむしろ，消耗品として劣化が進んだ後に事後的に措置が取られることが多い．構造物を健全度が最も悪い状態から最も良い状態に回復させる措置を，本研究では更新と呼ぶ．一方で，緊急点検データを活用し，構造物の更新に必要となる費用の試算などを行う必要がある．そのためには，点検データを活用した劣化予測を行い，将来的に必要となる更新費用を見積もる必要がある．

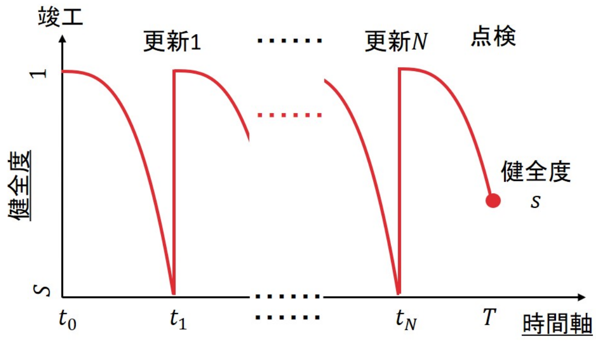
構造物を劣化予測する際には，いつどのくらいの健全性であったというような情報を持つ点検データが必要となる．一方で，特に小規模附属のような寿命の短い構造物の場合，更新を複数回経験していると考えられる．そのため，従来の方法論で劣化予測を行う際には，点検データに加えて，どの構造物に対していつ更新が行われたかを示す更新履歴データ（以下，完全な更新履歴データ）が必要不可欠となる．

いま，**図–1(a)** に示すように，ある時刻 t_0 で竣工され，時刻 $t_1, \cdots, t_N$ でそれぞれ更新を経験し，時刻 T で健全度が s となった構造物を想定しよう．ただし，この構造物は竣工時点あるいは更新が適用された直後の健全度は 1，更新が適用される直前の健全度は S であるとする．このようなデータを用いれば，同図の赤線のように，構造物の劣化過程を特定することが可能となる．劣化予測を行う際には，時間 $t_1 - t_0$ で健全度が 1 から S，$\cdots$，時間 $t_N - t_{N-1}$ で健全度が 1 から S，時間 $T - t_N$ で健全度が 1 から s といった一連の情報をインプットデータとすることができる．

一方で，同じ構造物を劣化予測する際に，更新履歴データが利用可能でない場合を考える．この場合，**図–1(b)** のように，構造物の劣化過程を特定することが困難となる．このように，それぞれの構造物が竣工から点検時点までに何回の更新を経験し，かつそれぞれの更新時点がどの時点であったかという完全な更新履歴データは，精緻な劣化予測のためには欠かせない．

(2) 小規模附属物に関する点検データ

道路法施行令第三十五条の二によれば，道路の機能を維持するために必要な措置を講ずること，とある．また，道路法施行規則第四条の五の五によれば，点検の結果ならびに以上の措置を講じたときは，その内容を



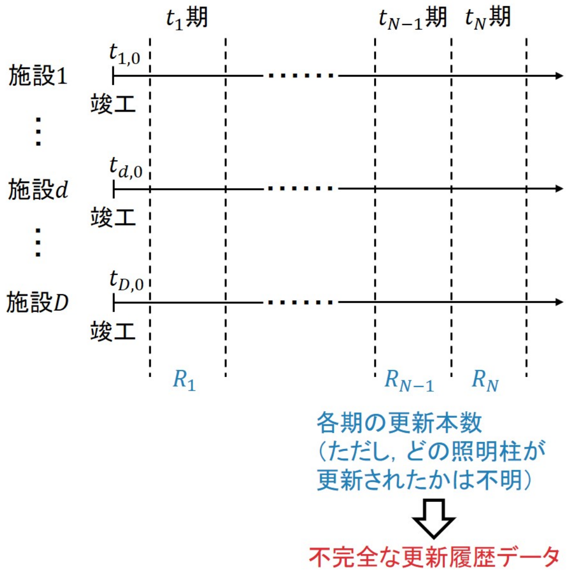
（a） 完全な更新履歴データ

（b） 不完全な更新履歴データ

図–1 構造物の劣化・更新過程

記録し、当該構造物が利用されている期間中は，これを保存すること，とある．そのため，小規模附属物点検要領においては，点検結果を記録するための点検表記録様式が示されている [1]．一方で，措置の内容を記録するための様式は示されておらず，各管理者がそれぞれ独自の方法で措置の内容を記録しているものと考えられる．近年は電子機器の発達・低廉化により，記録をデジタルデータとして保存することが容易になっている．一方で以前までは，措置の記録のほとんどを紙媒体等のアナログデータとして保存していたと推測できる．このようなアナログデータをデジタルデータに盛んに変換されているとも考えにくい．このように，これまでに実施されてきた措置に関する記録はを利用することは難しいと考えられる．

そこで本研究においては，完全な更新履歴データが利用可能ではなく，**図–2** に示すような不完全な更新履歴データを利用して，劣化予測を行う方法論を開発する．ここで，不完全な更新履歴データとは，時間軸を複数の期に分けたときに，各期の更新本数を示すデータと定義する．ただし，不完全な更新履歴データにおいては，どの構造物に対して更新が適用されたかは不



図–2　不完全な更新履歴データ

明とする．

(3)　不完全な更新履歴データにもとづいた劣化予測モデル

図–3 に提案する劣化予測モデルの概念図を示す．同図に示すように，更新を経験した構造物を特定する確率分布を，提案する劣化予測モデルに内包させることにより，個々の構造物の更新時点を明示的に考慮する．ある時刻 τ_n で更新を経験した構造物を特定する確率分布は，ある時刻 τ_n での更新本数が $R(\tau_n)$ 本という不完全な更新履歴情報が利用可能である条件のもとで，個々の構造物が時刻 τ_n で累積する確率分布を要素とする多次元同時確率分布となる．ただし，$\sum_{a=1}^{D} r_a = R(\tau_n)$ を満たすため，$D-1$ 次元同時確率分布 $f(r_1,\cdots,r_{D-1})$ となる．任意の構造物 d が時刻 τ_n で累積する確率分布は，竣工時点 $t_{d,0}$ から τ_n までの期間長を用いて，マルコフ劣化ハザードモデルにより表現できる．

推定手法としては，個々の構造物の更新時点を潜在変数として設定した上で，MCMC を用いてマルコフ劣化ハザードモデルのパラメータと潜在変数を同時推定する．その際，潜在変数の更新の制約条件に不完全な更新履歴データを用いる．潜在変数を用いたマルコフ劣化ハザードモデルに関しては，例えば小林らの研究が挙げられ，当該研究では，劣化が進行した舗装に対して補修が実施されるため観測データの欠損の問題に対して，選択肢サンプリング法を用いることにより，サンプル欠損バイアスを考慮した最尤推定法の提案や，劣化が進行した舗装に対して補修が実施されるため観測データの欠損の問題に対して，選択肢サンプリング法を用いることにより，サンプル欠損バイアスを考慮した最尤推定法の提案，そして，ランダム誤差やシステム誤差を含む，現実に測定された「見かけの健全度」に対して,「真の健全度」の関係を混合分布で表現すると共に,「真の健全度」を用いて定義されるマルコフ推移確率と「見かけの健全度」の関係を隠れマルコフ劣化モデルを用いて表現した研究がある．また，水谷らは，判定基準前後におけるサンプルデータの相対的な偏在によるサンプル欠損の問題に対して，判定基準変更前後の健全度の対応関係をモデル化することにより，構造物の管理期間中に判定基準の変更が実施されたような点検データベースに基づいてマルコフ劣化ハザードモデルを推計する方法論の提案を行った．著者らの知る限り，更新情報の欠損を潜在変数の考慮したマルコフ推移確率の非集計的推計方法を開発した例は他に見当たらない．

3.　モデルの定式化

(1)　モデル化の前提条件

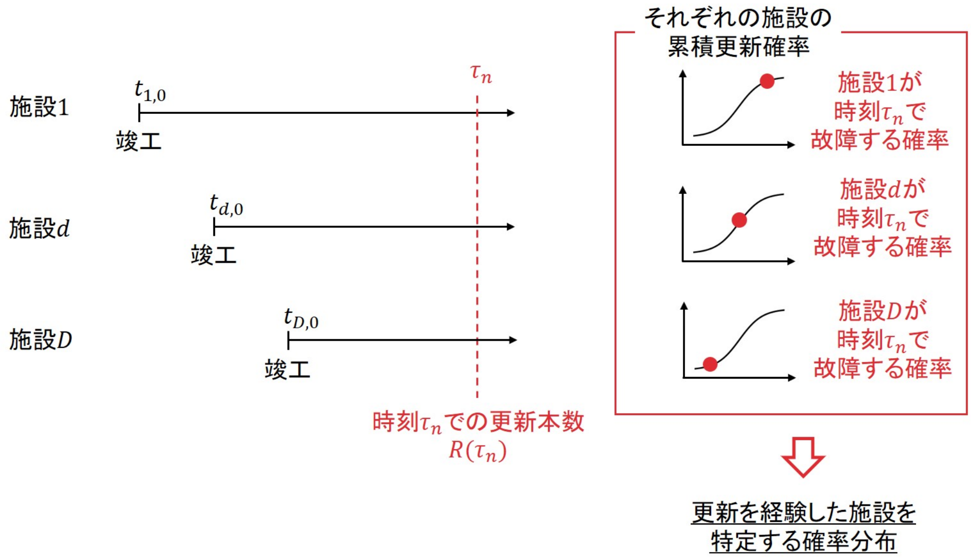
本研究では構造物の劣化過程を，構造物の健全性を表現する I 段階の離散的指標（以下，健全度と呼ぶ）$1,\cdots,I$ の推移を用いて記述する．ただし，健全度が大きくなるほど，劣化が進行している様子を表現する．すなわち，健全度の小さい値から大きい値への推移は，構造物の劣化の進行を表現する．さらに，構造物に対して，その供用開始時点を原点とする離散的時間軸を導入する．離散的時間軸上の点を時点と呼び，任意時点 τ_A における構造物の健全度を状態変数 $h(\tau_A)$ を用いて表す．例えば，$h(\tau_A)=i\ (i=1,\cdots,I)$ であれば時点 τ_A における構造物の健全度が i であることを表現する．

(2)　マルコフ連鎖モデル

構造物の劣化過程をマルコフ連鎖モデルに基いてモデル化する．構造物の任意時点 τ_A における健全度 $h(\tau_A)$ が確率変数であるとする．この確率変数の時間的遷移（確率過程）を

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}[h(t_{n+1})=i)|h(t_0),h(t_1),\cdots,h(t_n)] \\
&=\mathrm{Prob}[h(t_{n+1})=i|h(t_n)] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

の関係が成立すると考える．すなわち，健全度の時間的推移を表現する確率過程が，マルコフ性（将来の健全度が現在の健全度のみに依存し，過去の健全度の推移の履歴とは無関係となる性質）をもつマルコフ過程であると考える．健全度の集合を表す状態空間は有限であるため，単位時間で健全度が任意の $i\ (=1,\cdots,I)$ から任意の $j\ (=1,\cdots,I)$ に推移する単位時間あたり



図–3 提案する劣化予測モデルの概念図

のマルコフ推移確率を

$$\mathrm{Prob}[h(t_{n+1}) = i|h(t_n) = j] = \pi_{i,j}$$
$$(i = 1, \cdots, I;\ j = 1, \cdots, I) \tag{2}$$

と表現する．さらに，(i, j) 成分がマルコフ推移確率 $\pi_{i,j}$ となる I 行 I 列のマルコフ推移確率行列を

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \cdots & \pi_{1,I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{I,1} & \cdots & \pi_{I,I} \end{pmatrix} \tag{3}$$

と定義できる．マルコフ推移確率 (2) は与件の単位時間における健全度間の推移確率を示したものであり，当然のことながら，対象とする時間間隔が異なれば推移確率の値は異なる．このような時間間隔を考慮したマルコフ推移確率に関しては，次項の **3.(3)** で詳細に議論するが，補修や更新が構造物に対して実施されない限り，健全度の値が大きい値が推移する（構造物の状態が回復する）ことは考えられないため，$\pi_{i,j} = 0\ (j < i)$ が成立する．また，推移確率の定義より $\sum_{j=i}^{I} \pi_{i,j} = 1$ が成立する．すなわち，マルコフ推移確率に関して，

$$\begin{cases} \pi_{i,j} \geq 0\ (i = 1, \cdots, I;\ j = i, \cdots, I) & \text{(4a)} \\ \pi_{i,j} = 0\ (i > j \text{のとき}) & \text{(4b)} \\ \displaystyle\sum_{j=i}^{I} \pi_{i,j} = 1 & \text{(4c)} \end{cases}$$

が成立しなければならない．健全度 I はマルコフ連鎖における吸収状態であり，$\pi_{I,I} = 1$ が成立すると考える．

(3) マルコフ推移確率の定式化

マルコフ推移確率をハザードモデルに基いて定式化する．いま，構造物の健全度 i $(i = 1, \cdots, I-1)$ の寿命（健全度が i に達した時点から健全度が $i+1$ に推移する時点までの期間）を確率変数 ζ_i で表す．健全度 i の寿命 ζ_i が，確率密度関数 $\phi_i(\zeta_i)$，分布関数 $\Phi_i(\zeta_i)$ に従うと考える．ある時点 τ_A において構造物の健全度が i であり，そこから時間 y_i が経過した時点で健全度 $i+1$ に到達する確率密度をハザード関数[6),7)] を用いて表現する．ハザード関数 $\lambda_i(y_i)$ は，構造物の健全度が i に達した時点から時間 y_i が経過するまで健全度 i の状態が継続したという条件の下で，微小期間 $[y_i, y_i + \Delta y_i)$ 中に健全度 $i+1$ に進展する条件付き確率となる．すなわち，時間 y_i まで健全度が i のまま継続する生存確率 $\tilde{\Phi}_i(y_i)$ $(= 1 - \Phi_i(y_i))$ を用いて，

$$\lambda_i(y_i)\Delta y_i = \frac{\phi_i(y_i)\Delta y_i}{\tilde{\Phi}_i(y_i)} \tag{5}$$

と表せる．ハザード関数がサンプル時間軸上の時点 y_i に依存せず，常に一定値 $\theta_i > 0(i = 1, \cdots, I-1)$ をとる場合，指数ハザード関数を

$$\lambda_i(y_i) = \theta_i \tag{6}$$
$$(i = 1, \cdots, I-1)$$

と表現する．指数ハザード関数を用いることにより，劣化過程が過去の履歴に依存しないというマルコフ性を表現できる．さらに，ハザード関数 θ_i $(i = 1, \cdots, I-1)$ が構造物の構造条件や環境条件に依存して変化すると

考え，具体的なハザード関数を

$$\theta_i = \exp(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta}_i') \qquad (7)$$
$$(i = 1, \cdots, I-1)$$

と定義する．記号「$'$」は転置操作を表す．また，$\boldsymbol{x} = (x_0, \cdots, x_A)$ は特性変数ベクトル，$\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{0,i}, \cdots, \beta_{A,i})$ は各特性変数がハザード関数 θ_i へ及ぼす影響の度合いを表現する未知パラメータベクトルである．I は特性変数の数を表す．なお，$x_0\beta_{0,i}$ は定数項を表すとし，$x_0 = 1$ とする．式 (7) により，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{I-1})$ の関数としてマルコフ推移確率を表現することができ，構造物の構造条件や環境条件が劣化過程に及ぼす影響を定量化できる．

さらに，指数ハザード関数を用いれば，健全度 i の寿命が y_i 以上となる確率 $\tilde{\Phi}_i(y_i)$ は，

$$\tilde{\Phi}_i(y_i) = \exp(-\theta_i y_i) \qquad (8)$$
$$(i = 1, \cdots, I-1)$$

と表現できる．

サンプル時間軸上の τ_A で，健全度が i であり，かつ時点 τ_A から追加的に $z\ (\geq 0)$ 以上にわたって健全度 i が継続する確率 $\tilde{\Phi}_i(\tau_A + z|\zeta_i \geq \tau_A)$ は，

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Phi}_i(\tau_A + z|\zeta_i \geq \tau_A) \\
&= \mathrm{Prob}\,[\zeta_i \geq \tau_A + z|\zeta_i \geq \tau_A] \\
&= \frac{\exp\{-\theta_i(\tau_A + z)\}}{\exp(-\theta_i\tau_A)} \\
&= \exp(-\theta_i z) \qquad (9) \\
&(i = 1, \cdots, I-1)
\end{aligned}$$

と表される．すなわち，時点 τ_A において健全度が i であり，時点 $\tau_B = \tau_A + z$ においても健全度が i と判定される確率は，

$$\mathrm{Prob}\,[h(\tau_B) = i|h(\tau_A) = i] = \exp(-\theta_i z) \qquad (10)$$
$$(i = 1, \cdots, I-1)$$

となる．確率 $\mathrm{Prob}[h(\tau_B) = i|h(\tau_A) = i]$ はマルコフ推移確率 $\pi_{i,i}(z|\boldsymbol{\beta})$ に他ならない．指数ハザードモデルを用いた場合，推移確率 $\pi_{i,i}(z|\boldsymbol{\beta})$ はハザード関数 θ_i と時間間隔 z のみに依存し，時点 τ_A，時点 τ_B に関する情報を用いなくとも推移確率を推計することが可能となる．以上の議論を拡張し，指数ハザード関数を用いて，時点 τ_A と時点 $\tau_B = \tau_A + z$ の間で健全度が i から $j\ (> i)$ に推移するマルコフ推移確率 $\pi_{i,j}(z|\boldsymbol{\beta})$ $(i = 1, \cdots, I-1; j = i, \cdots, I)$ は，

$$\begin{aligned}
&\pi_{i,j}(z|\boldsymbol{\beta}) = \mathrm{Prob}\,[h(\tau_B) = j|h(\tau_A) = i] \\
&= \sum_{k=i}^{j} \prod_{m=i}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} \exp(-\theta_k z) \\
&(i = 1, \cdots, I-1;\ j = i+1, \cdots, I) \qquad (11)
\end{aligned}$$

と表すことができる [2)]．ただし，表記上の規則として，

$$\begin{cases}
\displaystyle\prod_{m=i}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} = 1 & (\text{k=i のとき}) \quad (12a) \\
\displaystyle\prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} = 1 & (\text{k=j のとき}) \quad (12b)
\end{cases}$$

が成立すると考える．さらに，表記の便宜上，

$$\begin{aligned}
&\prod_{m=i,\neq k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \exp(-\theta_k z) \\
&= \prod_{m=i}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \prod_{m=k}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} \exp(-\theta_k z) \quad (13)
\end{aligned}$$

と簡略化する．また，$\pi_{i,I}$ に関しては，マルコフ推移確率の条件より次式で表せる．

$$\pi_{i,I}(z|\boldsymbol{\beta}) = 1 - \sum_{j=i}^{I-1} \pi_{i,j}(z|\boldsymbol{\beta}) \qquad (14)$$
$$(i = 1, \cdots, I-1)$$

(4) 尤度関数の定式化

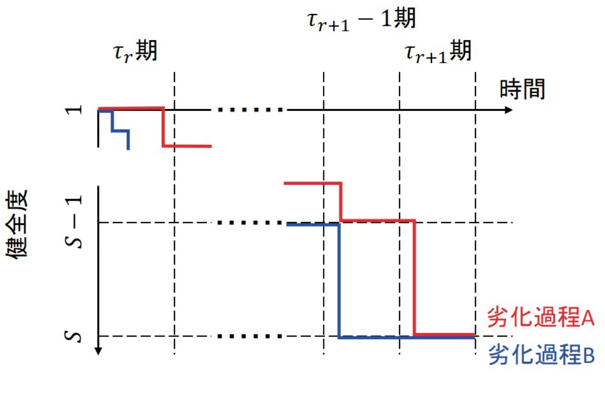
$I\ (\geq 1)$ 個の構造物を対象とする．構造物の供用開始時刻が小さい構造物から順にそれぞれ，構造物番号 $1, \cdots, I$ を付与する．各期の期間長は同一であるものとし，それらを 1 に基準化する．構造物の竣工期を構造物 $1, \cdots, I$ に関してそれぞれ，$\tau_{0,1}, \cdots, \tau_{0,I}\ (= \boldsymbol{\tau}_0)$ と設定する．各構造物それぞれにつき 1 回の点検データが利用可能であると考える．点検の実施期および点検で観測された健全度を，構造物 $1, \cdots, I$ に関してそれぞれ，$\tau_{E,1}, \cdots, \tau_{E,I}\ (= \boldsymbol{\tau}_E)$ および $s_1, \cdots, s_I\ (= \boldsymbol{s})$ と設定する．$\boldsymbol{\Xi}_{i,1} = (\tau_{0,i}, \tau_{E,i}, s_i, \boldsymbol{x}_i)$ とする．説明変数ベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}_1, \cdots, \bar{\boldsymbol{x}}_I\ (= \bar{\boldsymbol{x}})$ が利用可能であるとする．

ある期に健全度が S に達した構造物は，当該期の期末に更新が適用され，健全度が 1 に回復すると考える．

a) 完全な更新履歴データが利用可能である場合

完全な更新履歴データが利用可能である場合の尤度関数を定式化する．任意の構造物 $i\ (= 1, \cdots, I)$ に着目し，構造物 i の劣化･更新過程をモデル化する．供用開始時刻から最新点検時刻までの更新回数を R_i と設定する．それぞれの更新に対して，更新が実施された期が過去の更新から順に更新番号 $1, \cdots, R_i$ を付与し，更新 $1, \cdots, R_i$ が実施された期をそれぞれ $\tau_{i,1}, \cdots, \tau_{i,R_i} (= \boldsymbol{\tau}_i)$ と設定する．$\boldsymbol{\Xi}_{i,2} = (R_i, \boldsymbol{\tau}_i)$ とする．

マルコフ劣化ハザードモデルにおいては，**図–4** に示すような劣化過程 A や B を考慮している．同図には，劣化過程 A として，τ_r 期の期首に竣工または更新があって健全度が 1 であり，τ_{r+1}− 1 期内に健全度が $S-1$ に達し，τ_{r+1} 期に健全度が S に達する劣化過程を描いている．また，劣化過程 B として，τ_r 期の期首に竣工または更新があって健全度が 1 であり，τ_{r+1}− 1 期まで



図–4 劣化過程

に健全度が $S-1$ に達し，$\tau_{r+1}-1$ 期に健全度が S に達する劣化過程を描いている．いずれの劣化過程も t_r 期の期首に健全度が 1，τ_{r+1} 期の期末に健全度が S であるという劣化過程となり，この確率はマルコフ劣化ハザードモデルを用いて表現することができる．

一方で，本研究で対象とする構造物の劣化・更新過程の場合，マルコフ劣化ハザードモデルを少しだけ拡張する必要がある．図–4 の劣化過程 B のような健全度が S に到達する期が τ_r 期より前の場合，更新が τ_r 期より前の期の期末で適用されることとなる．したがって，τ_r 期の期首に竣工または更新があって健全度が 1 であり，τ_{r+1} 期に健全度が S に達し，同期末に更新が適用される確率 ρ_i は，τ_r 期の期首から $\tau_{r+1}-1$ 期の期末で健全度が 1 から $S-1$ に推移した条件のもとで，τ_{r+1} 期の期末に健全度が S となっている条件付き確率となる．したがって，

$$\rho_i(\tau_r,\tau_{r+1},S,\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\beta}) = 1-\frac{1-\pi_{1,S}(\tau_{r+1}-\tau_r,\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\beta})}{1-\pi_{1,S}(\tau_{r+1}-1-\tau_r,\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\beta})} \tag{15}$$

となる．

構造物 i は $1,\cdots,R_i$ のライフサイクルを繰り返し，τ_{R_i} の期首で健全度が 1 であり，$\tau_{E,i}$ で健全度が s_i に達するから，

$$\rho\rho_i(\boldsymbol{\Xi}_{i,1},\boldsymbol{\Xi}_{i,2}|\boldsymbol{\beta}) = \prod_{r=1}^{R_i}\rho(\boldsymbol{x}_i,\tau_{i,r},\tau_{i,r+1}|\boldsymbol{\beta})*\rho'(\boldsymbol{x}_i,\tau_{i,R_i},\tau_{i,E},s_i|\boldsymbol{\beta}) \tag{16}$$

となる．

同様に，構造物 $1,\cdots,I$ に関する点検データの尤度関数を定式化できる．点検データ全体に関する尤度関数は，

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}}) = \prod_{i=1}^{I}\rho\rho_i(R_i,\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\tau}_i,s_i|\boldsymbol{\beta}) \tag{17}$$

となる．

b) 完全な更新履歴データが利用可能でない場合の尤度関数

供用開始時刻から最新点検時刻までの期間に適用された更新回数およびそれぞれの更新が実施された時刻が未知であるとして，構造物の劣化・更新過程をモデル化する．$\bar{\boldsymbol{\Xi}}_3=(R_{\tau_1},\cdots,R_{\tau_1})$ とおく．

任意の期 t_w $(r=1,\cdots,W)$ において，存在している構造物番号の集合 B_w は，竣工期が当該期よりも小さい構造物の番号の集合となる．したがって，

$$B_w=\{i|t_{i,0}\le t_r\} \quad (w=1,\cdots,W) \tag{18}$$

と表せる．これらの構造物のうち，任意の構造物 i $(\in B_w)$ に着目する．当該構造物が t_w 期に健全度が S に達し同期末に更新が適用される確率は，

$$\rho_i(\tau_a,t_w,S,\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\beta}) \tag{19}$$

となる．

t_w 期に R_{t_w} 個の構造物が更新される確率は，

任意の期 t_w $(w=1,\cdots,W)$ において更新が適用された可能性のある構造物番号の集合を要素とする集合族 $\mathfrak{P}'(B_w)$ は，B_w のべき集合 $\mathfrak{P}(B_w)$ を構成する複数の集合 p の内，要素の数が 0 以上 D_w 以下の集合を要素とする集合族となる．したがって，

$$\mathfrak{P}'(B_w)=\{\mathfrak{p}\subset\mathfrak{P}(B_w)|0\le\#(p)\le D_w\} \tag{20}$$

と表せる．よって，点検データ全体の尤度関数は，

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}}) = \sum_{v_1\in\mathfrak{P}'(B_1)}\cdots\sum_{v_W\in\mathfrak{P}'(B_W)}\prod_{i=1}^{I}\rho_i(\tau_{i,0},\boldsymbol{\tau}_i,\tau_{i,E},R_i,s_i,\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\beta}) \tag{21}$$

と定義できる．ただし，$\bar{\boldsymbol{\Xi}}=()$ である．また，

$$R_i=\sum_{w=1}^{W}\#(p\in v_w|p=1) \quad (i=1,\cdots,I) \tag{22}$$

と定義する．さらに，$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i=(\tilde{\tau}_{i,1},\cdots,\tilde{\tau}_{i,R_i})$ とし，

$$\tau_{i,r}=\arg\min_{0\le d\le Z}\left\{\sum_{w=1}^{d}\#(p\in v_w|p=i)=r\right\} \quad (i=1,\cdots,I;\ r=1,\cdots,R_i) \tag{23}$$

と定義する．以上で定式化したような構造物群全体に関する更新情報考慮した上で構造物の劣化過程を表現

するモデルを，これ以降，施設更新・劣化推定モデルと呼ぶ．

4. パラメータの推定手法

(1) MCMC 法を用いたベイズ推定

提案した施設更新・劣化推定モデルのパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ および照明柱の更新時点を同時推定するために，本研究ではベイズ推定法を援用した推定手法を構築する．ベイズ推定法においては，ベイズの定理を援用することにより，パラメータの真の値の確率分布（事後確率分布）を推定する．ベイズの定理から，パラメータの事後確率分布は，情報が無いときのパラメータの確率分布（事前確率分布）およびデータが得られる確率（尤度関数）の積に比例する．よって，パラメータの事後確率分布を推定するためには，事前確率分布および尤度関数を設定する必要がある．

本研究では，施設更新・劣化推定モデルの全パラメータの事前確率分布に無情報事前分布を設定することにより，推定するパラメータの事後確率分布の客観性を担保する．具体的には，確率分布の変数変換を行っても，少なくとも尤度がある程度存在する範囲においては一様性を確率分布が保つようにするために，部分的な一様分布を設定する．Jeffreys はフィッシャーの情報量の平方根に比例するように定めることで，このような局所一様分布が得られることを示している．

尤度関数の定式化に関しては次節で詳述する．一方で，事後確率分布は非常に複雑になることが多いため，それに基づいた議論や考察をすることが難しくなるといった欠点が存在する．このような問題を解決するために，1) 事前確率分布に事後確率分布と自然共役な関係にある確率分布を設定する，2) 事後確率分布に従う確率標本を発生させ，確率分分布を表現するといった手法が一般的に用いられる．本研究では，MCMC 法を援用し，後者 2) の手法に基いて，パラメータの事後確率分布を推定する．

(2) 尤度関数の完備化操作

各時点で適用された更新回数および各更新が適用された照明柱番号は利用可能なデータではないが，仮に $v_1 = \tilde{v}_1, \cdots, v_W = \tilde{v}_W$ である場合を考える．このとき，データ $\bar{\boldsymbol{\Xi}}$ が観測される尤度関数は，

$$\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{R}) = \prod_{i=1}^{I} \rho_i(\tau_{i,0}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i, \tau_{i,E}, \tilde{R}_i, s_i, \boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\beta}) \tag{24}$$

と表現できる．以上の操作は完備化と呼ばれる．尤度関数の完備化によって，計算負荷の低減が達成される．ただし，完備化された尤度関数 (24) を構成する潜在変数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ および $\tilde{R}$ は，利用可能なデータではない．そのため，完備化された尤度関数を用いて，潜在変数ベクトルを推定する必要がある．潜在変数に関する全条件付き事後確率は，

$$\mathrm{Prob}[\tilde{\tau}_{1,1} = \tau_{1,1}, \cdots, \tilde{\tau}_{I,R} = \tau_{I,R}|\bar{\boldsymbol{\Xi}}, \boldsymbol{\beta}] \propto \frac{\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{R})}{\int \tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{R}) \partial\tau_{1,1} \cdots \partial\tau_{I,R}} \tag{25}$$

と表現できる．全条件付き事後確率 (25) には，未知パラメータ $\boldsymbol{\beta}$ が含まれているため，潜在変数の全条件付き事後確率を先験的に求めることは不可能である．そこで本研究では，MCMC 法を用いて，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}$ の事後分布に従う確率標本を発生させるのと同時に，全条件付き事後確率 (25) に基いて，潜在変数を発生させる．このような未知パラメータベクトルの確率標本と潜在変数の発生を反復的に繰り返す．これにより，完備化される前の尤度関数 (21) を用いて求めたパラメータの最尤推定値に，完備化された尤度関数 (24) を用いて求めたパラメータのベイズ推定値に収束することが証明されている [11]．

5. おわりに

本研究では，近年まで事後保全型の維持管理施策が実施されており，さらに過去の点検および補修・更新履歴が記録されていない道路照明柱を対象とした劣化予測モデルの開発を行なった．具体的には，過去の更新回数と更新時点を潜在変数として明示的に考慮した劣化予測モデルを提案した．その際，従来では道路照明柱に対して事後的な更新施策が採用されていたという部分的な情報を用いて，潜在変数の確率密度を定義することによりモデル推定精度の向上を図った．なお，本研究で提案した方法論を実在する社会基盤施設の点検データに適用した実証分析および今後の研究課題に関しては，研究発表会当日に発表する予定である．

謝辞：本研究は，総合科学技術・イノベーション会議の SIP（戦略的イノベーション創造プログラム）「大規模修繕を考慮した BMS の開発と高速道路における実践」（管理法人：JST）によって実施された．また，本研究の一部を実施するあたり，独立行政法人日本学術振興会科学研究費助成事業「特別研究員奨励費（研究課題/領域番号：JP18J20014）」の助成を受けた．ここに記して感謝の意を表する．

参考文献

1) 国土交通省道路局：小規模附属物点検要領，2017.
2) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.69-82，2005.
3) 水谷大二郎，貝戸清之，小林潔司，秀島栄三，山田洋太，

平川恵士：判定基準を考慮した隠れマルコフ劣化ハザードモデル，土木学会論文集 D3，Vol.71，No.2，pp.70-89，2015.
4) 小林潔司，貝戸清之，林秀和：測定誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデル，土木学会論文集 D，Vol.64，No.3，pp.493-512，2008.
5) 小林潔司，熊田一彦，佐藤正和，岩崎洋一郎，青木一也：サンプル欠損を考慮した舗装劣化予測モデル，土木学会論文集 F，Vol.63，No.1，pp.1-15，2007.
6) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
7) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
8) 和合肇：ベイズ計量経済分析，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用，東洋経済新聞社，2005.
9) 伊庭幸人ほか：計算統計 2 マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺 (統計科学のフロンティア 12)，岩波書店，2005.
10) Titterington, D. M., Smith, A. F. M. and Markov, U. E.: *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, John Wiley & Sons, 1985.
11) Diebolt, J. and Robert, C. P.: Estimation of finite mixture distributions through Bayesian sampling, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol.56, pp.363-375, 1994.
12) 織田澤利守，山本浩司，青木一也，小林潔司：道路付帯施設の最適補修同期化政策，土木学会論文集 F，Vol.64，No.2，pp.200-217，2008.6
13) 山本浩司，青木一也，小林潔司：道路付帯施設アセットマネジメントシステム，土木情報利用技術論文集，Vol.15，pp.173-184，2006.