状態推移確率の解析解を用いた 階層的隠れマルコフ劣化モデルの 効率的推定方法

上野　渉[1]・水谷　大二郎[2]

[1]学生会員　東北大学　工学研究科（〒980-0845 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-04）
E-mail: wataru.ueno.r4@dc.tohoku.ac.jp

[2]正会員　東北大学助教　災害科学国際研究所（〒980-0845 仙台市青葉区荒巻字青葉468-1）
E-mail: mizutani@irides.tohoku.ac.jp

社会基盤施設の中には，ある劣化事象（上層）の劣化速度（ハザード率）が他の劣化事象（下層）の劣化度合い（健全度）に応じて変化するものがあり，上層の劣化過程は階層的隠れマルコフ劣化モデルで記述，推定できる．当該モデルに関して，離散的な局所時間軸を導入し，局所単位期間で下層の健全度が一定であると仮定して階層的隠れマルコフ劣化モデルの状態推移確率を計算する近似的推定方法が提案されている．本研究では，局所時間軸を導入せずとも階層的隠れマルコフ劣化モデル状態推移確率を解析的に導出可能であることを示す．これにより，階層的隠れマルコフ劣化モデルのパラメータ推定において，i）パラメータ推定精度が向上するとともに，ii）完備化尤度関数と潜在変数を用いる必要が無くなりパラメータ推定の計算負荷が軽減される．これらの点を数値計算事例を通じて検証する．

Key Words : *hidden Markov deterioration hazard model, analytic solution, asset management statistical deterioration forecasting, Markov chain Monte Carlo*

1. はじめに

近年，社会基盤施設（以下，施設）の統計的劣化予測に関する研究の発展・蓄積が著しい[1),2)]．本研究では，その中で階層的隠れマルコフ劣化モデル[3),4)]に着目する．階層的隠れマルコフ劣化モデルでは，2種類の劣化事象において，ある劣化事象のハザード率が他方の劣化事象の健全度の時間的推移に応じて動学的に変動していく．ここで，着目する劣化事象を劣化事象A，劣化事象Bとし，劣化事象B（上層）のハザード率が他の劣化事象A（下層）の健全度に応じて変動すると考える．既往研究[3)]では，劣化事象Bのハザード率の動学的な変化は局所離散時間軸上でモデル化されており，その単位期間内では，劣化事象Bのハザード率は当該期間の期首の劣化事象Aの健全度に応じた一定の値を取ると近似されている．局所時間軸上の単位期間長が十分に小さく設定できる場合には，このようにハザード率を近似することに起因したモデルのパラメータ推定バイアスは，施設の耐用年数と比較して相対的に微小であるとみなせるため問題にはならない．しかし，サンプルサイズが大きい場合，モデルのパラメータ推定における単位期間長を長く設定せざるを得ない場合もある．その場合には，（劣化事象Aの健全度の変化による劣化事象Bのハザード率の変化の時間遅れを議論しない限り，）局所離散時間軸の単位期間内に劣化事象Aの健全度が変化しても，その変化は単位期間終了後にのみ劣化事象Bのハザード率に影響を与えると仮定しているため，劣化事象Bのハザード率が過小評価されて，既往研究[3)]のパラメータ推定手法では推定結果にシステム的なバイアスが生じる可能性がある．また，局所離散時間軸を用いて階層的隠れマルコフ劣化モデルの尤度関数を定式化した際には，局所時間軸の時点ごとに不可観測な健全度の組み合わせを考える必要があり，尤度関数（観測されたサンプルの生起確率）の項が膨大になる．そのため，既往研究[3)]では不可観測な健全度を所与と考え，尤度関数の完備化操作を行い，完備化尤度関数を用いてモデルのパラメータと潜在変数をマルコフ連鎖モンテカルロ法（以下，MCMC法）により同時にサンプリングすることにより，モデルのパラメータをベイズ推定するというアプローチを採用している．しかしながら，このようなアプローチでは，上述したようにサンプルサイズが大きくなると計算負荷が問題となる．これらの点を解決した研究は著者らの知る限り過去には存在しない．

以上の問題意識のもと，本研究では，階層的隠れマル

コフ劣化モデルの状態推移確率（劣化事象A，劣化事象Bの健全度ペア間の推移確率）が局所離散時間軸の単位期間ごとに劣化事象Bのハザード率を近似することなく，解析的に導出可能であることを明らかにする，その上で，MCMC法を用いて，モデルのパラメータをベイズ推定する．これにより，階層的隠れマルコフ劣化モデルのパラメータ推定において，i）状態推移確率の解析解を用いることができパラメータ推定精度が向上するとともに，ii）完備化尤度関数と潜在変数を用いる必要が無くなりパラメータ推定の計算負荷が軽減される．以下，2．で階層的隠れマルコフ劣化モデルの状態推移確率の解析解を導出し，3．で状態推移確率の解析解を用いた尤度関数と事後確率密度を定式化する．

2. 状態推移確率

(1) ハザード率

連続的なカレンダー時間軸上の任意の時刻τでの劣化事象A，劣化事象Bの劣化状態を表す関数をそれぞれ$g(\tau)$，$h(\tau)$とする．劣化状態は健全度と呼ばれる，それぞれI個の離散的な状態変数$i\ (i=1,\dots,I)$，J個の離散的な状態変数$j(j=1,\dots,J)$で定義する．値が大きいほど劣化が進展していることを表す．劣化事象Aの健全度iにおけるハザード率をη_iと表す．なお，$g(\tau)\le g(\tau+\alpha)\forall\alpha>0$，$h(\tau)\le h(\tau+\beta)\forall\beta>0$とする．また，時刻$\tau$での劣化事象Bの健全度$j$におけるハザード率は当該時点の劣化事象Aの健全度に応じて連続的に変動するとして，$\theta_{j,g(\tau)}$とする．

劣化事象Aに関しては，ハザード率η_iが時間に関して一定のため，指数ハザードモデルとして健全度iから$i+1$への推移過程をモデル化できる．具体的には，健全度iの寿命を$y(0\le y)$とした場合にその確率密度は，

$$f_i(y)=\eta_i\exp(-\eta_i y) \tag{1}$$

となす．また，健全度iが開始時刻τ_i($i=1$であれば供用開始時刻や直近の更新時刻，$i>1$であれば，健全度が$i-1$からiに推移した時刻)の場合は，その健全度に達してから$\zeta(0\le\zeta)$以上継続する生存確率は，生存関数として，

$$\tilde{F}_i(\zeta)=\exp(-\eta_i\zeta) \tag{2}$$

と表現できる．

劣化事象Bに関しては，ハザード率$\theta_{j,g(\tau)}$が劣化事象Aの健全度に応じて動的に変化する．劣化事象Bの健全度jの開始時刻をτ_jとする．このとき，劣化事象Bの健全度jが開始時刻から$\xi(0\le\xi)$以上継続する確率を表す生存関数は，

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Phi}_j\left(\xi,g(\tau_j),g(\tau_j+\xi),u_{g(\tau_j)},\dots,u_{g(\tau_j+\xi_j-1)}\right)\\
&=\exp\left(-\int_0^{\xi}\theta_{j,g(\tau_j+u)}du\right)\\
&=\exp\left\{-\left(\int_0^{u_{g(\tau_j)}}\theta_{j,g(\tau_j)}du\right.\right.\\
&\quad+\int_{u_{g(\tau_j)}}^{u_{g(\tau_j)+1}}\theta_{j,g(\tau_j)+1}du+\cdots\\
&\quad+\int_{\sum_{s=g(\tau_j)}^{g(\tau_j+\xi)-2}u_s}^{\sum_{s=g(\tau_j)}^{g(\tau_j+\xi)-1}u_s}\theta_{j,g(\tau_j+\xi)-1}du\\
&\quad\left.\left.+\int_{\sum_{s=g(\tau_j)}^{g(\tau_j+\xi)-1}u_s}^{\xi}\theta_{j,g(\tau_j+\xi)}du\right)\right\}\\
&=\prod_{c=g(\tau_j)}^{g(\tau_j+\xi)-1}\exp(-\theta_{j,c}u_c)\\
&\quad\cdot\exp\left\{-\theta_{j,g(\tau_j+\xi)}\left(\xi-\sum_{s=g(\tau_j)}^{g(\tau_j+\xi)-1}u_s\right)\right\}
\end{aligned} \tag{3}$$

となる．なお，時刻τ_jで劣化事象Aの健全度は$g(\tau_j)$であり，時刻$\tau_j+\sum_{c=g(\tau_j)}^{s}u_c\ (s=\mathrm{g}(\tau_j),\dots,g(\tau_j+\omega)-1)$で劣化事象Aの健全度が$s$から$s+1$に推移するとする．また，健全度$j$の寿命$\omega(0\le\omega)$の確率密度$\phi_j\left(\omega,g(\tau_j),g(\tau_j+\omega),u_{g(\tau_j)},\dots,u_{g(\tau_j+\omega-1)}\right)$に関して，

$$\theta_{j,g(\tau_j+\omega)}=\frac{\phi_j\left(\omega,g(\tau_j),g(\tau_j+\omega),u_{g(\tau_j)},\dots,u_{g(\tau_j+\omega-1)}\right)}{\tilde{\Phi}_j\left(\xi,g(\tau_j),g(\tau_j+\xi),u_{g(\tau_j)},\dots,u_{g(\tau_j+\xi_j-1)}\right)} \tag{4}$$

が成立するため，

$$\begin{aligned}
&\phi_j(\omega,g(\tau_j),g(\tau_j+\omega),u_{g(\tau_j)},\dots,u_{g(\tau_j+\omega-1)})\\
&=\theta_{j,g(\tau_j+\omega)}\cdot\prod_{c=g(\tau_j)}^{g(\tau_j+\omega)-1}\exp(-\theta_{j,g(\tau_j+\omega)})\\
&\quad\cdot\exp\left\{-\theta_{j,g(\tau_j+\omega)}\left(\omega-\sum_{s=g(\tau_j)}^{g(\tau_j+\omega)-1}u_s\right)\right\}
\end{aligned} \tag{5}$$

となる．なお，$g(\tau_j+\omega)=g(\tau_j)$のとき，劣化事象Bの健全度$j$の生存関数を

$$\tilde{\Phi}_j\left(\xi,g(\tau_j)\right)=\exp(-\theta_{j,g(\tau_j)}\xi) \tag{6}$$

と，$g(\tau_j+\omega)=g(\tau_j)$のとき，劣化事象Bの健全度$j$の確率密度を

$$\phi_j\left(\omega, g(\tau_j)\right) = \theta_{j,g(\tau_j)}\exp(-\theta_{j,g(\tau_j+\omega)}) \tag{7}$$

とそれぞれ表す

(2) 状態推移確率

任意のカレンダー時刻τ^*で劣化事象A，Bの健全度がそれぞれ$i_1(i_1=1,\ldots,I), j_1(j_1=1,\ldots,J)$であるという条件のもとで，時刻$\tau^{**}=\tau^*+z$で劣化事象A，Bの健全度がそれぞれ，$i_2(i_2=1,\ldots,I), j_2(j_2=1,\ldots,J)$となる確率を状態推移確率とし，$\pi_{i_1,j_1}^{i_2,j_2}(z)$とする．劣化事象Aの健全度$i_1$の開始時刻を$\tau^*\geq\tau_{i_1}^A$，劣化事象Bの健全度$j_1$の開始時刻を$\tau^*\geq\tau_{j_1}^B$とする．以下で状態推移確率$\pi_{i_1,j_1}^{i_2,j_2}(\mathrm{z})$を解析的に導出する．

a) $i_2=i_1$，$j_2=j_1$のとき

$i_2=i_1$かつ$j_2=j_1$のとき，劣化事象A，Bの健全度が期間$[\tau^*,\tau^{**}]$に亘ってi_1，j_1であり続ける確率は，時刻τ^*，τ^{**}や時刻τ^*以前の健全度推移とは独立に，ハザード率とzのみの関数として，

$$\begin{aligned}
&\pi_{i_1,j_1}^{i_2,j_2}(\mathrm{z}) \\
&= \frac{\tilde{F}_{i_1}(\tau^{**}-\tau_{i_1}^A)}{\tilde{F}_{i_1}(\tau^*-\tau_{i_1}^A)} \\
&\cdot\frac{\tilde{\Phi}_{j_1}(\tau^{**}-\tau_{j_1}^B, g(\tau_{j_1}^B), i_1, u_{g(\tau_{j_1}^B)},\ldots,u_{i_1-1})}{\tilde{\Phi}_{j_1}(\tau^*-\tau_{j_1}^B, g(\tau_{j_1}^B), i_1, u_{g(\tau_{j_1}^B)},\ldots,u_{i_1-1})} \\
&= \exp\{-(\eta_{i_1}+\theta_{j_1,i_1})z\}
\end{aligned} \tag{8}$$

となる．なお，表記の都合上，$g(\tau_{j_1}^B)=i_1$のときの，$\tilde{\Phi}_{j_1}(\tau^*-\tau_{j_1}^B, i_1)$も$\tilde{\Phi}_{j_1}(\tau^*-\tau_{j_1}^B, g(\tau_{j_1}^B), i_1, u_{g(\tau_{j_1}^B)},\ldots,$ $u_{i_1-1})$と表す．

b) $i_2-i_1+j_2-j_1>0$のとき

ある時刻$t,t^*(t^*=t+l; 0<l)$で定義された期間$(t,t^*]$において，劣化事象Aの健全度が$g(t)$，劣化事象Bの健全度が$h(t)$のまま継続し，期間$(t,t^*]$の期末t^*で，劣化事象Aの健全度のみが$g(t)+1$に推移する確率を$\kappa_{g(t),h(t)}(l)$，劣化事象Bの健全度のみが$h(t)+1$に推移する確率を$\lambda_{g(t),h(t)}(l)$とする．$\kappa_{g(t),h(t)}(l)$，$\lambda_{\mathrm{g}(t),h(t)}(l)$はそれぞれ，時刻$t,t^*$や時刻$t$以前の健全度推移とは独立に，ハザード率と$l$のみの関数として，

$$\begin{aligned}
&\kappa_{g(t),h(t)}(l) \\
&= \frac{f_{g(t)}(t^*-\tau_{g(t)}^A)}{\tilde{F}_{g(t)}(t-\tau_{g(t)}^A)} \\
&\cdot\frac{\tilde{\Phi}_{h(t)}(t^*-\tau_{h(t)}^B, g(\tau_{h(t)}^B), i_1, u_{g(\tau_{h(t)}^B)},\ldots,u_{g(t)-1})}{\tilde{\Phi}_{h(t)}(t-\tau_{h(t)}^B, g(\tau_{h(t)}^B), i_1, u_{g(\tau_{h(t)}^B)},\ldots,u_{g(t)-1})} \\
&= \eta_{g(t)}\exp\{-(\eta_{g(t)}+\theta_{h(t),g(t)})l\}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_{g(t)h(t)}(l) \\
&= \frac{\tilde{F}_{g(t)}(t^*-\tau_{g(t)}^A)}{\tilde{F}_{g(t)}(t-\tau_{g(t)}^A)} \\
&\cdot\frac{\phi_{h(t)}(t^*-\tau_{h(t)}^B, \mathrm{g}(\tau_{h(t)}^B), i_1, u_{g(\tau_{h(t)}^B)},\ldots,u_{g(t)-1})}{\tilde{\Phi}_{h(t)}(t-\tau_{h(t)}^B, g(\tau_{h(t)}^B), i_1, u_{g(\tau_{h(t)}^B)},\ldots,u_{g(t)-1})} \\
&= \theta_{h(t),g(t)}\exp\{-(\eta_{g(t)}+\theta_{h(t),g(t)})l\}
\end{aligned} \tag{10}$$

と定義できる．ここに，$\tau_{g(t)}^A$は劣化事象Aにおける健全度$g(t)$の開始時刻，$\tau_{h(t)}^B$は劣化事象Bにおける健全度$h(t)$の開始時刻である．

ここで，$K=i_2-i_1+j_2-j_1$，$K_A=i_2-i_1$，$K_B=j_2-j_1$とする．期間$[\tau^*,\tau^{**}]$の時刻$t_k(k=1,\ldots,K)$で劣化事象A，劣化事象Bのいずれかの健全度が推移し，時刻τ^{**}におけるそれぞれの劣化事象の健全度がi_2，j_2になったとする．

$$z_k=\begin{cases} t_k-\tau^* & (k=1\text{のとき}) \\ t_k-t_{k-1} & (k>1\text{のとき}) \end{cases} \tag{11}$$

とする．時刻t_kでは，劣化事象Aまたは劣化事象Bのいずれかの健全度が推移する．この点を表すダミー変数を，

$$\delta_k=\begin{cases} 0 & (\text{時刻}t_k\text{で劣化事象Aの健全度が} \\ & \quad i_1+u_k\text{から}i_1+u_k+1\text{に推移}) \\ 1 & (\text{時刻}t_k\text{で劣化事象Bの健全度が} \\ & \quad j_1+v_k\text{から}j_1+v_k+1\text{に推移}) \end{cases} \tag{12}$$

と定義する．ここに，

$$v_k=\begin{cases} 0 & (k=1\text{のとき}) \\ \sum_{s=1}^{k-1}\delta_s & (k>1\text{のとき}) \end{cases} \tag{13}$$

$$u_k=k-v_k-1 \tag{14}$$

である．ダミー変数ベクトルを$\boldsymbol{\delta}=(\delta_1,\ldots,\delta_K)$と表す．$\sum_{k=1}^K\delta_k=K_B$を満足する$\boldsymbol{\delta}$の集合を$\boldsymbol{\Omega}_{K,K_B}$とする．$\boldsymbol{\Omega}_{K,K_B}$の要素数は，$|\boldsymbol{\Omega}_{K,K_B}|=K!/(K_A!\cdot K_B!)$となる．このとき，$\pi_{i_1,j_1}^{i_2,j_2}(z)$は，

$$\begin{aligned}
&\pi_{i_1,j_1}^{i_2,j_2}(z) \\
&= \sum_{\boldsymbol{\delta}\in\boldsymbol{\Omega}_{K,K_B}}\int_0^z\int_0^{z-z_1}\int_0^{z-z_1-z_2}\cdots\int_0^{z-\sum_{k=1}^{K-1}z_k} \\
&\cdot\prod_{k=1}^K\left[\eta_{i_1+u_k}\exp\{-(\eta_{i_1+u_k}+\theta_{j_1+v_k,i_1+u_k})z_k\}\right]^{1-\delta_k} \\
&\cdot\left[\theta_{i_1+u_k,j_1+v_k}\exp\{-(\eta_{i_1+u_k}+\theta_{j_1+v_k,i_1+u_k})z_k\}\right]^{\delta_k} \\
&\cdot\exp\left\{-(\eta_{i_1+u_k}+\theta_{j_1+v_k,i_1+u_k})\left(z-\sum_{k=1}^K z_k\right)\right\} \\
&dz_K dz_{K-1}\ldots dz_3 dz_2 dz_1
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\delta\in\Omega_{K,K_B}} \prod_{h=1}^{K} \frac{n_{i_1,j_1,h}}{m_{i_1,j_1,h+1} - m_{i_1,j_1,1}} exp(-m_{i_1,j_1,1}z)$$
$$+ \sum_{k=2}^{K} \prod_{h=1}^{K} \frac{n_{i_1,j_1,h}}{m_{i_1,j_1,h} - m_{i_1,j_1,k}} \prod_{h=k}^{K} \frac{n_{i_1,j_1,h}}{m_{i_1,j_1,h+1} - m_{i_1,j_1,k}}$$
$$\cdot \exp(-m_{i_1,j_1,k}z)$$
$$+ \prod_{h=1}^{K} \frac{n_{i_1,j_1,h}}{m_{i_1,j_1,h} - (\eta_{i_2} + \theta_{j_2,i_2})}$$
$$\cdot \exp\{-(\eta_{i_2} + \theta_{j_2,i_2})z\} \tag{15}$$

と，時刻τ^*, τ^{**}や時刻τ^*以前の健全度推移とは独立に，ハザード率とzのみの関数として求めることができる．ここに，

$$m_{i_1,j_1,k} = \eta_{i_1+u_k} + \theta_{j_1+v_k,i_1+u_k} \tag{16}$$

$$n_{i_1,j_1,k} = (\eta_{i_1+u_k})^{1-\delta_k} (\theta_{j_1+v_k,i_1+u_k})^{\delta_k} \tag{17}$$

である．ただし，$K = 1$のとき，

$$\sum_{k=2}^{K} \prod_{h=1}^{K} \frac{n_{i_1,j_1,h}}{m_{i_1,j_1,h} - m_{i_1,j_1,k}} \prod_{h=k}^{K} \frac{n_{i_1,j_1,h}}{m_{i_1,j_1,h+1} - m_{i_1,j_1,k}} \cdot \exp(-m_{i_1,j_1,k}z) = 0 \tag{18}$$

とし，

$$m_{i_1,j_1,K+1} = \eta_{i_2} + \theta_{j_2,i_2} \tag{19}$$

とする．

3. 尤度関数と事後確率密度

施設$e(e = 1, \ldots, E)$に対して，時刻$\bar{\tau}_{e,r}(r = 1, \ldots, R_e)$で劣化事象Aの健全度が観測されているとする，なお，$\bar{\tau}_{e,r} < \bar{\tau}_{e,r+1}$とする．記号「‐」は観測値を表す．また，時刻$\bar{\tau}_{e,1}$及び$\bar{\tau}_{e,R_e}$で施設$e$の劣化事象Bの健全度が観測されているとする．時刻$\bar{\tau}_{e,r}$における施設$e$の劣化事象Aの健全度を$\bar{\iota}_{e,1}$とする．時刻$\bar{\tau}_{e,1}$，$\bar{\tau}_{e,R_e}$における施設$e$の劣化事象Bの健全度をそれぞれ，$\bar{J}_{e,1}$，$\bar{J}_{e,R_e}$とする．施設$e$に対する観測情報を$\bar{\boldsymbol{\Xi}}_e = (\bar{\boldsymbol{\tau}}_e, \bar{\boldsymbol{\iota}}_e, \bar{\boldsymbol{J}}_e)$と整理する．ここに，$\bar{\boldsymbol{\tau}}_e = (\bar{\tau}_{e,1}, \ldots, \bar{\tau}_{e,R_e})$，$\bar{\boldsymbol{\iota}}_e = (\bar{\iota}_{e,1}, \ldots, \bar{\iota}_{e,R_e})$，$\bar{\boldsymbol{J}}_e = (\bar{J}_{e,1}, \bar{J}_{e,R_e})$である．全観測値の集合を$\bar{\boldsymbol{\Xi}} = (\bar{\boldsymbol{\Xi}}_1, \ldots \bar{\boldsymbol{\Xi}}_e, \ldots, \bar{\boldsymbol{\Xi}}_E)$とする．ここで劣化事象Bのハザード率$\theta_{j,i}$を

$$\theta_{j,i} = \psi_j \alpha_i \tag{20}$$

と特定化する．ただし，$\alpha_1 = 1$と基準化する．また，$\psi_J = 0$とする．階層的隠れマルコフ劣化モデルを推定する問題は，パラメータセット$\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\alpha})$を推定する問題となる．ここに，$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_{I-1})$，$\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_{J-1})$，$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_2, \ldots, \alpha_I)$である．$\boldsymbol{\Theta}$に関する尤度関数$\mathcal{L}(\boldsymbol{\Theta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}})$は，$\boldsymbol{\Theta}$を所与としたときの$\bar{\boldsymbol{\Xi}}$の生起確率として，

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\Theta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}})$$
$$= \prod_{e=1}^{E} \sum_{j_2=\bar{J}_{e,1}}^{\bar{J}_{e,R_e}} \sum_{j_3=j_2}^{\bar{J}_{e,R_e}} \cdots \sum_{j_{R_e-1}=j_{R_e-2}}^{\bar{J}_{e,R_e}} \pi_{\bar{\iota}_{e,1},\bar{J}_{e,1}}^{\bar{\iota}_{e,2},\bar{J}_2}(\bar{\tau}_{e,2} - \bar{\tau}_{e,1})$$
$$\cdot \prod_{r=3}^{R_e-1} \pi_{\bar{\iota}_{e,r-1},\bar{J}_{e,r-1}}^{\bar{\iota}_{e,r},\bar{J}_r}(\bar{\tau}_{e,r} - \bar{\tau}_{e,r-1})$$
$$\cdot \pi_{\bar{\iota}_{e,R_e-1},\bar{J}_{e,R_e-1}}^{\bar{\iota}_{e,R_e},\bar{J}_{R_e}}(\bar{\tau}_{e,R_e} - \bar{\tau}_{e,R_e-1}) \tag{21}$$

と定式化できる．なお，$\bar{\iota}_{e,1}$及び$\bar{J}_{e,1}$は，健全度$1, \ldots, I$及び$1, \ldots, J$からランダムに生起すると考え，$\bar{\iota}_{e,1}$及び$\bar{J}_{e,1}$を所与とした条件付確率を式(21)の尤度関数として用いる．

また，$0 < \alpha_i$とし，$1 \leq j < J$のとき$0 < \psi_j$とする．推定するパラメータη_i，ψ_j，α_iの事前確率密度$q_{\eta_i}(\eta_i)$，$q_{\psi_j}(\psi_j)$，$q_{\alpha_i}(\alpha_i)$はガンマ分布に従うとして，

$$q_{\eta_i}(\eta_i) = \frac{1}{\Gamma(\iota_{\eta_i})(x_{\eta_i})^{\iota_{\eta_i}}} (\eta_i)^{\iota_{\eta_i}-1} \exp(-\frac{\eta_i}{x_{\eta_i}}) \tag{22}$$

$$q_{\psi_j}(\psi_j) = \frac{1}{\Gamma(\iota_{\psi_j})(x_{\psi_j})^{\iota_{\psi_j}}} (\eta_i)^{\iota_{\psi_j}-1} \exp(-\frac{\psi_j}{x_{\psi_j}}) \tag{23}$$

$$q_{\alpha_i}(\alpha_i) = \frac{1}{\Gamma(\iota_{\alpha_i})(x_{\alpha_i})^{\iota_{\alpha_i}}} (\alpha_i)^{\iota_{\alpha_i}-1} \exp(-\frac{\alpha_i}{x_{\alpha_i}}) \tag{24}$$

とそれぞれ定義する．ここにι_{η_i}，ι_{ψ_j}，ι_{α_i}は形状パラメータ，x_{η_i}，x_{ψ_j}，x_{α_i}は尺度パラメータである，また，$\Gamma(\cdot)$はガンマ関数である．このとき，$\boldsymbol{\Theta}$の事後確率密度$\chi(\boldsymbol{\Theta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}})$は，

$$\chi(\boldsymbol{\Theta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}})$$
$$\propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\Theta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}}) \prod_{i_1=1}^{I-1} q_{\eta_i}(\eta_{i_1}) \prod_{j=1}^{J-1} q_{\psi_j}(\psi_j) \prod_{i_2=2}^{I-1} q_{\alpha_i}(\alpha_{i_2}) \tag{25}$$

と定式化できる．階層的隠れマルコフ劣化モデルでは，この事後確率密度関数$\chi(\boldsymbol{\Theta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}})$を直接解析的に求めることはできない．そこで，代表的なMCMC法であるメトロポリス・ヘイスティングス（Metropolis-Hastings）法[5)]を用いる．これにより，パラメータ$\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\alpha}$の標本サンプルを事後確率密度関数$\chi(\boldsymbol{\Theta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}})$から抽出することができ，抽出したサンプル列からパラメータを推定できる．

4. おわりに

本研究では，階層的隠れマルコフ劣化モデルの状態推移確率が解析的に導出可能であることを示した．具体的

には，離散的な局所時間軸を定義せず，下層の劣化事象の健全度が任意の時点で変化するものとして状態推移確率を導出し，尤度関数や事後確率密度を示した．本研究で提案した状態推移確率の解析解を用いる手法と，既往研究[3]の手法で，それぞれ仮想データに対する実証分析を行い，パラメータの推定値や計算時間を比較することで，本研究での提案手法の有用性について考察することができる．実証分析結果・及び考察に関しては研究発表会にて発表する．

参考文献

1) 貝戸清之，小林潔司：ビックデータによるインフラマネジメント：アセットメトリクスにむけて，土木学会論文集 D3（土木計画学），Vol.70，No.5，pp.I_21-I_30，2014.
2) 貝戸清之，小林潔司，水谷大二郎：インフラ管理の最適化：アセットメトリクスにむけて，第 26 回 RAMP シンポジウム論文集，日本オペレーションズ・リサーチ学会，pp.1-11，2014.
3) 小林潔司，貝戸清之，江口利幸，大井明，起塚亮輔：舗装構造の階層的隠れマルコフ劣化モデル，土木学会論文集 D3，Vol.67，No.4，pp.422-440，2011.
4) Le Thanh NAM，小林潔司，貝戸清之，起塚亮輔：ポアソン隠れマルコフ劣化モデルによる舗装劣化過程のモデル化，土木学会論文集 F4（建設マネジメント），Vol.68，No.2，pp.6279，2012.
5) 伊庭幸人：計算統計学のフロンティア―計算統計Ⅱ，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺，岩波書店，2005.

(????.?.? 受付)

AN EFFECTIVE ESTIMATION METHOD OF A HIERARCHICAL HIDDEN MARKOV DETERIORATION HAZARD MODEL WITH ANALYTIC SOLUTION OF TRANSITION PROBABILITIES

Wataru UENO and Daijiro MIZUTANI

In some infrastructure, deterioration speed (hazard rate) of a deterioration phenomenon (upper layer) is depended on other deterioration phenomenon (lower layer). We can express the deterioration process of upper layer with hidden Markov deterioration hazard model. On the model, an approximate method is suggested that calculate transition probabilities with assumption that deteriorate condition of lower layer is constant among local unit period. In this research, we suggest the analytic method that calculate transition probabilities without the assumption. This analytic method is superior to approximate one in two point about estimation of parameters of hidden Markov deterioration hazard model. First, estimation accuracy of parameters improves. Second, calculation load is small because completed likelihood function and potential variables are not appeared. We indicate these points through empirical analysis.