

社会インフラの劣化異常度を考慮した 最適維持管理計画モデル

大窪 和明¹

¹正会員 東北大学大学院 国際文化研究科 (〒 980-8576 宮城県仙台市青葉区川内 41)
E-mail: kazuaki.okubo.d5@tohoku.ac.jp

長期にわたって運用される社会インフラの劣化に影響を与える要因は様々であり、劣化速度には不確実性がある。本研究では、ロバスト最適化問題の枠組みの中で、劣化速度の異常度を考慮して将来シナリオを設定し、保全工事の実施時期や規模について最適な計画を求めるモデルを提案する。具体的には、計画開始時点までに得られた健全度のデータから劣化速度の異常度を評価する指標を作成し、制約条件式に加えたサブ問題が二次錐最適化問題として表せることを示す。さらに、道路ネットワーク上の橋梁の維持管理計画問題に提案モデルを適用し、劣化速度、維持管理費の予算や交通量といった設定条件と、計画の特徴や予防保全による費用の平準化効果との関係を分析する。

Key Words : *Infrastructure management, robust optimization, anomaly detection*

1. はじめに

人々の生活や経済活動を支える社会インフラの老朽化が進行する中、将来的に補修・修繕などの維持管理や更新にかかる費用の増大が予想されている。近年では、最新の調査機器や情報処理技術の活用、予防保全の促進など費用の増大に備えた取り組みが進められている¹⁾。特に、予防保全による社会インフラの長寿命化は、将来と比較して良好な状態にある社会インフラが多いため、比較的、余裕がある現在の予算を、将来の維持管理のために投資できるため、将来の費用低減に有効な方法であると考えられる。この予防保全を、より効果的に実施していくためには、現在だけでなく、将来的に目指すべき都市構造を見据えた上で、そのときの利用状況を想定し、長期的に残すべき社会インフラを選択していく必要がある。そのためには、目指すべき将来の利用状況に対して、どの時期に、どの程度の規模の工事を、どの社会インフラに実施するのが望ましいのか、を求めることができる最適維持管理計画モデルが必要である。

社会インフラの予防保全による長寿命化がもたらす効果を調べた研究には、瀬木・小林²⁾ や石倉・鈴木³⁾ による研究が挙げられる。瀬木・小林では、無限期間での社会インフラの最適インフラ投資政策を分析し、予防保全による長寿命化には家計消費水準の増加効果と、世代間のインフラ更新費用負担の平準化効果があることを指摘している。石倉・鈴木でも無限期間でのインフラ投資政策を扱い、維持管理技術の発展を考慮可能

な枠組みを提案している。本研究では、有限期間での最適維持管理計画モデルを提案し、将来の社会インフラの利用状況に応じて、保全工事の最適な実施時期や規模を求める最適維持管理計画モデルを提案することを目的とする。また、将来の人口減少も踏まえ、将来的に利用者が一部の社会インフラに集中するような状況や、単年度ごとに予算制約が区切られた状況から複数期間で使用可能な予算が確保されている状況に変更した場合など設定条件の差異と、計画の特徴や瀬木・小林が指摘したような予防保全による費用負担の平準化効果との関係を分析する。

長期的な維持管理計画を考える上では、将来の利用状況を想定するだけでなく、劣化によって発生する損傷事故の発生を回避することは必須であり、計画期間中、どのような劣化過程の将来シナリオを想定するかは重要である。また、劣化過程の想定は、予防保全がもたらす効果にも大きく関わってくると考えられる。将来の劣化過程に不確実性がある中で、頑健な最適解を提供する手法にロバスト最適化がある。この枠組の中では、計画期間内の将来の劣化過程について深刻な将来シナリオを設定し、その中で最適な計画を求める⁴⁾。動的な枠組みの中では、過度に保守的な最適解を避けるため、将来の劣化過程の深刻度に応じて将来シナリオを求める最適化問題をサブ問題とし、そこから得られた将来シナリオを用いてロバストな最適解を求める方法が用いられる^{5),6),7)}。

本研究では、2014年に社会インフラの定期点検が義務化され、健全度に関する観測データが全国各地に蓄

積されている現状を踏まえ、計画の開始時点に観測データを利用して、劣化速度の異常度を評価する指標が作成できる状況を考える。その上で、計画期間中に生じる予測誤差の大きさを、この評価指標を用いて評価し、想定する劣化速度の異常度の大きさに応じた将来シナリオの設定方法を提案する。

2. ロバスト最適維持管理計画モデル

(1) モデルの枠組み

a) 道路ネットワークの設定

本研究では、社会インフラの一例として、道路橋を考える。ここでは多起点多終点の道路ネットワークを考え、各リンクに橋梁が最大で 1 橋だけ架設されており、橋梁の健全度が閾値以下に低下した場合には保全工事を行わない限り、そのリンクが通行止めになる状況を考える。その中で、OD 交通量を外生的に与え、総移動費用が最小となるような交通量、橋梁の保全工事の実施時期、規模を求める問題を考える。

道路ネットワークはノードとリンクで構成され、ノード o を発ノードとして、ノード i と j を結ぶリンク (i, j) を通過する t 期の交通量を $x_{ij}^o(t)$ として表す。ただし、 O を起点ノードの集合、 \mathcal{L} をリンクの集合、 $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$ を計画期間中の期を表す集合とする。各ノードのフロー保存則は、起点別のリンク交通量 $x_{ij}^o(t)$ を用いて、次のように表せる。

$$\sum_{i \in I} x_{ik}^o(t) - \sum_{j \in J} x_{kj}^o(t) + \sum_{s \in D} \delta_{os} q_{os}(t) \delta_{sk} q_{os}(t) = 0, \quad (1)$$

$$\forall k \in \mathcal{L}, \forall o \in O, \forall t \in \mathcal{T}$$

ただし、 q_{od} は起点をノード o 、終点をノード d とする OD 交通量であり、 δ_{os} は $\delta_{ss} = 1$ 、それ以外の場合には、0 の値をとるクロネッカーのデルタを表す。

b) 健全度の定式化

道路ネットワーク上の各リンクは最大でも 1 橋の橋梁が配置されており、橋梁の集合を \mathcal{A} 、橋梁 a の健全度を $v_a(\underline{v} \leq v_a(t) \leq \bar{v})$ で表す。ここでは簡単化のため、健全度を連続変数で表し、 $v_a(t)$ の値が小さくなるほど橋梁の状態が悪く、 $v_a(t) = \bar{v}$ が最良、 $v_a(t) = \underline{v}$ が最悪の状態を表すと仮定する。橋梁 a の 1 期当たりの劣化速度を $u_a(t)$ で表し、 $u_a(t)$ は母平均 μ_a 、母分散 σ_a^2 の正規分布に従う確率変数であると仮定する。健全度を回復させるためには保全工事が必要であり、1 回の保全工事による回復度を $r_a(t)$ で表したとき、橋梁 a の健全度は次の状態方程式で表される。

$$v_a(t) = v_a(t-1) - u_a(t) + r_a(t), \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathcal{T} \quad (2)$$

ただし、回復度 $r_a t$ の取りうる範囲は $0 \leq r_a t \leq \bar{v} - \underline{v}$ とする。

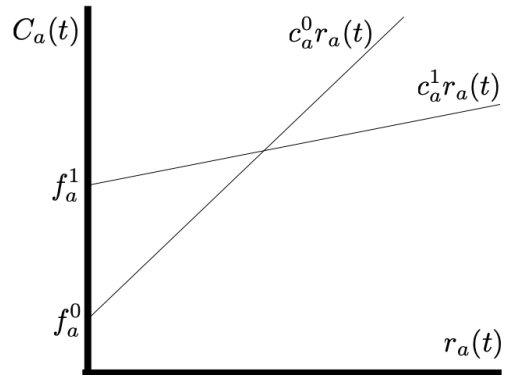


図-1 保全工事の費用関数

橋梁 a の健全度が閾値 v_{th} より小さい場合、その橋梁は通行止めになり、このときの状態を離散変数 σ_a を用いて $\sigma_a(t) = 1$ と表す。逆に、橋梁の健全度が閾値より大きい場合には $\sigma_a(t) = 0$ であり、通常リンク容量が維持されると考える。健全度と $\sigma_a(t)$ との関係は下式のようにまとめることができる。

$$\sigma_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } v_a(t) < v_{th}, \forall a \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathcal{T} \\ 0, & \text{if } v_a(t) \geq v_{th}, \forall a \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathcal{T} \end{cases} \quad (3)$$

したがって、リンク容量の制約は、次のように整理できる。

$$x_{ij}^o(t) \leq \{1 - \sigma_a(t)\} K_{ij}, \quad (4)$$

$$\forall (i, j) \in \mathcal{L}_A, \forall a \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathcal{T}$$

$$x_{ij}^o(t) \leq K_{ij}, \quad (5)$$

$$\forall (i, j) \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_A, \forall a \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathcal{T}$$

と表せる。ただし、 \mathcal{L}_A は橋梁のあるリンクの集合、 K_{ij} はリンク (i, j) の交通容量を表す。

c) 保全工事の定式化

本研究では費用構造の異なる 2 種類 ($m \in \{0, 1\}$) の保全工事の中から 1 つを選択して健全度を回復できると仮定する。橋梁 a への保全工事の有無を $y_a^m(t)$ で表し、 t 期に保全工事を実施した場合を $y_a^m(t) = 1$ 、実施しない場合を $y_a^m(t) = 0$ で表す。保全工事には、固定費用 f_a^m と健全度の回復度 $r_a(t)$ に比例した可変費用がかかるとし、 t 期の橋梁 a の保全工事費用を次のように表す。

$$C_a(t) = \sum_{m \in \{0,1\}} (c_a^m r_a(t) + f_a^m y_a^m(t)), \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathcal{T} \quad (6)$$

ただし、 c_a^m は、保全工事 m の単位当たりの回復度の費用である。回復度 $r_a(t)$ の取りうる範囲は、 $y_a^m(t)$ を用いて、

$$0 \leq r_a(t) \leq (\bar{v} - \underline{v}) \sum_{m \in \{0,1\}} y_a^m(t), \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathcal{T} \quad (7)$$

と表せる。これら 2 種類の費用は、図-1 に示すような費用構造を持つものとし、 $f_a^0 \leq f_a^1, c_a^0 \geq c_a^1$ の関係を満

たすものとする。すなわち、保全工事 0 は保全工事 1 に比べて固定費用 f_a^0 が小さいものの、回復度当たりの費用が高いため、回復度が小さい保全工事において、より小さな費用で工事を実施することができる。逆に、保全工事 1 は、固定費用がより大きいものの回復度当たりの単位費用が小さいため、橋梁が通行止めになった後の事後保全のような健全度を大幅に回復させる必要がある工事において、より小さな費用で実施できる工事である。予防保全、事後保全の区別については、健全度が閾値 v_{th} 以下まで下がり、通行止めが生じた状況で実施する工事を事後保全、それ以前に健全度を回復するような工事を予防保全とする。

各期ごとの予算を $B(t)$ とおいたとき、各期ごとに予算が決まっており、繰越ができない場合の予算制約を、

$$C(t) = \sum_{a \in \mathcal{A}} C_a(t) \leq B(t), \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (8)$$

と表す。一方で、計画期間内の全ての期間における予算が確保されており、この予算内で各期ごとに支出する費用を決めることができる場合には、

$$\sum_{t=1}^T C(t) \leq \sum_{t=1}^T B(t), \quad (9)$$

と表すことができる。

(2) ロバスト最適化問題の定式化

a) 劣化速度の異常度を考慮した制約条件式の定式化

ロバスト最適化問題で考慮する将来シナリオを設定するため、劣化速度の異常度を考慮した制約条件式を定式化する。計画を作成する段階を 0 期とし、この段階で既に橋梁 a の健全度の劣化速度 $u_a(t)$ について N_a 個のサンプルが得られていると仮定する。このサンプルから求めた $u_a(t)$ の標本平均を $\hat{\mu}_a$ 、標本分散を $\hat{\sigma}_a^2$ とおくと、 h 期 ($1 \leq h \leq T$) の健全度の予測値 $E_0[v_a(h)]$ は、

$$E_0[v_a(h)] = E_0[v_a(h-1)] - \hat{\mu}_a + r_a(h), \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (10)$$

と表すことができる。 h 期の予測誤差を $\Phi_a(h)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \Phi_a(h) &= \{v_a(h) - E_0[v_a(h)]\}^2 \\ &= \{v_a(h-1) - E_0[v_a(h-1)] + u_a(t) - \hat{\mu}_a\}^2 \\ &= \Phi_a(h) + \{u_a(h) - \hat{\mu}_a\}^2 \\ &= \sum_{t=1}^h \{u_a(t) - \hat{\mu}_a\}^2, \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (11) \end{aligned}$$

と表せる。ただし、 $\Phi_a(t-1)$ と $(u_a(t) - \hat{\mu}_a)$ とは無相関であると仮定した。ここで、標本平均を用いて計算された $(u_a(t) - \hat{\mu}_a)$ は、次のような正規分布に従うことから、

$$(u_a(t) - \hat{\mu}_a) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_a + 1}{N_a} \sigma_a^2\right), \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (12)$$

$\Phi_a(h)$ は、自由度 h 、スケール因子 $(N_a + 1)\sigma_a^2/N_a$ のカイ二乗分布 $\chi^2(h, (N_a + 1)\sigma_a^2/N_a)$ に従う。また、標本分

散は、自由度 $N_a - 1$ 、スケール因子 σ_a^2/N_a のカイ二乗分布に従う。

$$\hat{\sigma}_a^2 \sim \chi^2\left(N_a - 1, \frac{\sigma_a^2}{N_a}\right), \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (13)$$

ここでカイ二乗分布の比率と F 分布の関係性に関する性質 (井手⁸⁾、定理 2.6) を利用すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{t=1}^h \{u_a(t) - \hat{\mu}_a\}^2 (N_a - 1) \sigma_a^2}{h \frac{N_a + 1}{N_a} \sigma_a^2} \\ &= \frac{N_a - 1}{N_a + 1} \frac{\sum_{t=1}^h \{u_a(t) - \hat{\mu}_a\}^2}{\hat{\sigma}_a^2} h \sim F(h, N_a - 1), \quad (14) \end{aligned} \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

となり、自由度 $(h, N_a - 1)$ の F 分布に従う統計量を導くことができる。この統計量は、 μ や σ を含まない標本平均 $\hat{\mu}_a$ および標本誤差 $\hat{\sigma}_a$ から成るため、母分散や母分散が未知であっても値を求めることができる。ここで、橋梁 a について式 (14) の値が $\phi_a(h, \alpha_a)$ 以上になる確率を α_a と仮定したとき、

$$\frac{N_a - 1}{N_a + 1} \frac{\sum_{t=1}^h \{u_a(t) - \hat{\mu}_a\}^2}{\hat{\sigma}_a^2} h \leq \phi_a(h, \alpha_a), \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (15)$$

を満たすような $u_a(t)$ を選ぶことができれば、確率 $1 - \alpha_a$ の範囲で起こる予測誤差の範囲で $u_a(t)$ を定めることができる。すなわち、式 (15) は

$$\sum_{t=1}^h \{u_a(t) - \hat{\mu}_a\}^2 \leq \frac{N_a + 1}{N_a - 1} \frac{\hat{\sigma}_a^2}{h} \phi_a(h, \alpha_a), \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (16)$$

のように変形することができ、この式の左辺は、予測誤差 $\Phi_a(h)$ (式 (11)) そのものである。式 (16) は、

$$\|\mathbf{u}_{a,h} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{a,h}\|_2 \leq \sqrt{\frac{N_a + 1}{N_a - 1} \frac{\hat{\sigma}_a^2}{h} \phi_a(h, \alpha_a)}, \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (17)$$

と表せるため、二次錐制約条件式である。ただし、 $\mathbf{u}_{a,h}^\top = \{u_a(1), \dots, u_a(h)\}$ 、 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{a,h}$ は全ての要素が $\hat{\mu}$ の $h \times 1$ の列ベクトル、上添字の \top は転置を表す。

b) 主問題の定式化

以上の設定から、式 (25) を制約条件として計画期間中の劣化速度が最大化された将来シナリオの中で、交通量、保全工事の時期と規模を所要時間および保全工事費用の総和を最小化する次のようなミニマックス問

題を考える.

$$\min \max \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} \left\{ \rho \sum_{o \in \mathcal{O}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{L}} t_{ij} x_{ij}^o(t) + C(t) \right\}, \quad (18)$$

subject to

$$(1), (2), (4), (5), (6), (7), (25)$$

$$(8) \text{ or } (9)$$

$$v_a(t) \geq v_{th} + (\underline{v} - v_{th})\sigma_a(t), \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathcal{T} \quad (19)$$

$$v_a(t) \leq v_{th} - \epsilon + (\bar{v} + \epsilon - v_{th})(1 - \sigma_a(t)), \quad (20)$$

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathcal{T}$$

$$x_{ij}^o(t) \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{L}, \forall o \in \mathcal{O}, \forall t \in \mathcal{T} \quad (21)$$

$$y_a^m(t), \sigma_a(t) \in \{0, 1\}, \quad \forall m \in \{0, 1\}, \forall a \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathcal{T} \quad (22)$$

ただし, β は割引率, t_{ij} はリンク (i, j) の所要時間, ϵ は十分に小さい正の値である. また, ρ は OD 交通の総所要時間を金銭換算するための時間価値である. 式 (3) で表された各橋梁の健全度と通行止めとの関係, および $v_a(t)$ の取りうる範囲は, 式 (19), (20) の制約条件式によって考慮されており, 式 (20) 中の ϵ を考えることによって式 (3) の第 1 式中の健全度が閾値より小さい条件を表現する. また, 制約条件にある式 (8) と式 (9) は, 予算制約が 1 期ごとに区切られる場合 (式 (8)) と, 計画期間内で繰り越せ, 複数年度で予算使用できる場合 (式 (9)) の設定に応じて, どちらか一つが選ばれる予算制約式である.

c) サブ問題の定式化

Bertsimas and Thiele⁵⁾ によるロバスト最適化では, 将来に想定する深刻さを表す指標を制約条件として, $\sum_{t=1}^h u_a(t)$ を最大化するサブ問題を定式化し, 深刻さに応じた将来シナリオの設定方法を提案している. 前項で定義された主問題に含まれる $u_a(t)$ について見ると, 他の制御変数との積の形で表されていないため, Bertsimas and Thiele⁵⁾ と同様に, $u_a(t)$ に関する最大化問題だけを分離したサブ問題として考えることができる. さらに, 式 (2) は,

$$v_a(t) = v_a(0) - \sum_{\tau=1}^t u_a(\tau) + \sum_{\tau=1}^t r_a(\tau), \quad (23)$$

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathcal{T}$$

と表せることを考えると, 本研究で提案する将来シナリオを求めるサブ問題は,

$$\max \sum_{\tau=1}^t u_a(\tau), \quad (24)$$

subject to

$$\|\mathbf{u}_{a,t} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{a,t}\|_2 \leq \sqrt{\frac{N_a + 1}{N_a - 1} \frac{\hat{\sigma}_a^2}{t}} \phi_a(h, \alpha_a), \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (25)$$

となる. この最大化問題から $u_a(t)$ を選ぶことによって, $1 - \alpha_a$ の確率で発生する予測誤差 $\Phi_a(h)$ の中で予測誤差が最大となる最も深刻な将来シナリオを求める二次錐最適化問題として定式化することができた.

3. まとめ

本研究では, 異常検知に基づく将来シナリオを設定可能なロバスト最適化問題を定式化した. 研究発表会においては, 予算制約を a) 各期ごとに決めた場合, b) 複数期で使用できる場合などについての計算結果を示す予定である.

謝辞: 本研究は基盤研究 (C) (課題番号:18K04392) により実施されました. 記して謝意を表します.

参考文献

- 1) 国土交通省, 国土交通省所管分野における社会資本の将来の維持管理・更新費の推計, 2018 年 11 月 30 日. http://www.mlit.go.jp/sogoseisaku/maintenance/_pdf/research01_02_pdf02.pdf
- 2) 瀬木俊輔, 小林潔司: インフラの動学的投資政策と長寿命化便益, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.70, No.3, pp.179-197, 2014.
- 3) 石倉智樹, 鈴木勇氣: 社会資本の長寿命化と維持管理技術発展の便益評価と最適支出計画, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.73, No.3, pp.165-177, 2017.
- 4) Soyster, A. L.: Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming, *Operations Research*, Vol.21, pp. 1154-1157, 1973.
- 5) Bertsimas, D. Thiele, A.: A Robust Optimization Approach to Inventory Theory, *Operations Research*, Vol.54, pp. 150-168, 2006.
- 6) Adida, E. Perakis, G.: A robust optimization approach to dynamic pricing and inventory control with no backorders, *Mathematical Programming*, Vol. 107, pp.97-129, 2006.
- 7) Adida, E. Perakis, G.: Dynamic pricing and inventory control: robust vs. stochastic uncertainty models-a computational study, *Annals of Operations Research*, Vol. 181, pp.125-157, 2010.
- 8) 井手 剛: 入門 機械学習による異常検知 R による実践ガイド, コロナ社, 2015.
- 9) 井手 剛, 杉山将: 異常検知と変化検知, 講談社, 2015.

(2019.10. 4 受付)