

# 複数の拠点ノード間の相互接続性に着目した リンク重要度の評価について

小林俊一<sup>1</sup>・北倉大地<sup>2</sup>・中山晶一朗<sup>3</sup>・山口裕通<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 金沢大学准教授 理工研究域 地球社会基盤学系 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)  
E-mail:koba@se.kanazawa-u.ac.jp

<sup>2</sup>非会員 金沢大学学生 理工学域 環境デザイン学類 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)  
E-mail:d-ktkr0829@stu.kanazawa-u.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 金沢大学教授 理工研究域 地球社会基盤学系 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)  
E-mail:nakayama@se.kanazawa-u.ac.jp

<sup>4</sup>正会員 金沢大学助教 理工研究域 地球社会基盤学系 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)  
E-mail:hyamaguchi@se.kanazawa-u.ac.jp

著者らはネットワークの構造に着目し、ネットワーク接続性に基づく性能評価に関心がある。災害時における道路ネットワークの要求性能として、特に重要なノード間の接続性だけは確保することを想定し、その定量的評価手法の検討を進めている。これまで、ネットワークの数理的特徴と1次元多バネ多質点系力学モデルの類似性に着目し、局所固有ベクトル中心性概念に基づく拠点ノード群の抽出方法や、バネに蓄積される弾性エネルギーに基づく2ノード間の接続強度評価法を提案してきた。本論文では複数の拠点ノード間の相互接続性に着目し、バネ張力から各リンクの相対的重要度を表すリンク重要度指標を提案する。この指標は容易に計算可能であり、災害に対するネットワークの強靭化を検討する際に活用が期待できる。

**Key Words : Network, Accessibility, Link importance, Disaster**

## 1. はじめに

### (1) 研究背景

現実の道路ネットワークの解析を行うために、道路ネットワークはノードとリンクによって表現される。ここで言うノードとはある任意の地点を指し、リンクとはノード間を結ぶ経路を指す。

災害の発生等の要因によって、これらの道路ネットワークが大きな被害を受け、その接続性が失われてしまう例は過去にも多く存在する。ひとたび接続性が失われてしまえば、孤立地点の発生や円滑な流通の損失による二次的な被害の拡大の恐れがある。

そういった事態を避けるために、来る災害に備えようとした場合、どのリンクを優先的に補強するべきか、また災害発生時にネットワークが分断された場合に、どのリンクを優先的に修復すればよいのか、ということを考える必要がある。その上で、どのノード間のリンクの優先度が高いのかを知るための指標が必要となる。

### (2) 研究目的

これらの背景を踏まえ、本研究では、任意の2地点間の接続性に当該リンクがどの程度寄与しているのかを考察する手段としてバネ・質点系アナロジーを用いる。ネットワークにおけるノードを質点、リンクをバネと仮定し、質点に力が加えられた場合の各バネに加えられる力を計算し、これらを新たな評価の指標とすることで、リンクの優先度を推し量る新たな材料の一つとして提案する。

### (3) 本論文の構成

本論文ではまず、研究にあたって用いた数学的手法について説明する。その上で拠点ノードの抽出法及びバネ・質点系による解析法を述べ、実際に簡単なネットワークを例にとりて提案手法を確認していく。

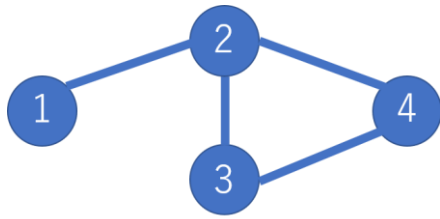


図-1 ネットワーク図

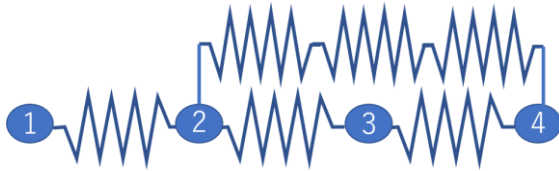


図-2 図-1のネットワークに対応したバネ・質点系

## 2. 分析に用いる数学的手法

### (1) 隣接行列とラプラシアン行列

道路ネットワークにおけるノード・リンク間の接続関係を記述する上で必要となる隣接行列について述べる。ノード数 $n$ の道路ネットワークにおいて、 $n \times n$ の隣接行列 $A$ の成分 $A_{ij}$ は以下で定義される。

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.1)$$

ここに $E$ はリンクの集合を表しており、成分はノード $(i, j)$ がリンクで結ばれていれば1, 結ばれていなければ0となる。図-1に示すネットワークを例にとれば、隣接行列 $A$ は、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

と表現できる。

加えて、各ノード $i$ に接続するリンクの重みの総数を次数と呼び、次数を対角成分にもつ行列を次数行列と呼ぶ。前述したこれらの行列を用いると、ラプラシアン行列が以下の式で定義される。

$$L = D - A \quad (2.3)$$

このラプラシアン行列は定義より明らかに対称行列であり、任意のベクトル $x$ に対して以下の2次形式が成り立つので、明らかに半正定値対称行列である。

$$x \cdot Lx = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} (x_i - x_j)^2 \geq 0 \quad (2.4)$$

半正定値対称行列の固有値は必ず非負で、固有ベクトルは必ず直交することが知られているため、以下の形でスペクトル分解ができる。

$$L = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i \quad (2.5)$$

ここに、スカラー $\lambda_i$ は非負の固有値、ベクトル $\mathbf{a}_i$ は固有値 $\lambda_i$ に対応する単位の固有ベクトル、演算子 $\otimes$ はテンソル積である。また各固有値に対応する単位固有ベクトルは直交するので、以下の式が成り立つ。

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (2.6)$$

ここに、 $\delta_{ij}$ はクロネッカーデルタである。

### (2) ネットワークのラプラシアン行列とバネ・質点系アナロジーの対応

ここでは道路ネットワークのラプラシアン行列と、バネ・質点系の振動問題が数学的に共通の性質を持つことを説明する。マトリクス固有値問題を利用したネットワーク分割のようなものを考える。

図-1に示したネットワークに対応した、バネ・質点系を図-2に示す。バネ定数、質量がそれぞれ $k$ 及び $m$ で一定とすれば、運動方程式は、

$$m \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{F} \quad (2.7)$$

と書ける。ここに $u_i$ は質点 $i$ の変位である。この質点系には、ディリクレ境界条件にあたる変位拘束条件が課されておらず、浮遊したような状態のバネ・質点系であることに留意する。

角速度 $\omega$ の正弦振動を考えれば、 $\ddot{u}_i = -\omega^2 u_i$ となるので、この運動方程式は以下の固有値問題と関連付けられる。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{m\omega^2}{k} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

### (3) 固有ベクトル中心性

中心性とは、ネットワークにおける各ノードの重要性を示すための指標である。これに対して固有ベクトル中心性は、あるノードの中心性をそのノードと隣接するノードの中心性の和と関連付けた中心性である。ある無向グラフ $G$ の隣接行列 $A$ し、ノードの中心性を成分とするベクトルを $\mathbf{c}$ とすると、ある頂点 $i$ の中心性 $c_i$ は、そのノードと接する中心性の和と関連付けられる。一方、これら隣接ノードの中心性は元のノード $i$ の中心性にも依存するため、再帰的な関係である。よって、適当な初期値を仮定した上で再帰的な繰り返し計算によって中心性の値を求めようとすることは自然である。

以上を踏まえると、各ノードの中心性ベクトル $\mathbf{c}$ と隣

接行列 $\mathbf{A}$ は,

$$c_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n A_{ij} c_j, \quad \mathbf{c} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{A} \mathbf{c} \quad (2.9)$$

の関係を満たす. ここに $1/\lambda$ は正值の比例定数とする. 式(2.9)は固有値と固有ベクトルの定義に他ならない. また比例定数 $1/\lambda$ は絶対値最大固有値になる. したがって, 固有ベクトル中心性では隣接行列の絶対値最大とそれに対応した固有ベクトルを用い, 固有ベクトルの各成分の値が中心性スコアとなる.

### 3. 拠点ノードの抽出法とバネ・質点系を用いた解析法

#### (1) 既往研究との比較

本研究ではリンク重要度の評価を目的としているが, 同様の目的の既往研究の手法として, フィードラーベクトルを利用した比率カット最小問題が挙げられる. この手法も, 本研究同様バネ・質点系のアナロジーを用いているが考え方が少し異なっている. この手法では, まずバネの運動方程式 $m\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [L]\{\mathbf{u}\} = \mathbf{F}$ において,  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ の自由振動を想定している. そして, 第2最小固有値を求めることで, ネットワークを二分化した際にその境界となるリンクを重要なリンクと評価している. しかし短所として, 二分化するリンクはネットワークの寸法や範囲に依存しているため, 対象とするネットワークのサイズの変化に対して得られる解が大きく変化してしまうことが挙げられる.

それに対し本研究では,  $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ の静的解析, すなわち $[L]\{\mathbf{u}\} = \mathbf{F}$ を解くことで解を得る. また複数の重要ノード, 本研究ではこれを拠点ノードと定義する, を選びそれらの接続性に着目して, それらの拠点ノード間をつなぐ上でより重みのあるリンクを重要なリンクとする. ここで言う重みづけについては解析法の項で後述する. また, なぜ拠点ノード間の接続性について議論するのかについてだが, 本研究では災害が起こった際に迅速な復旧が必要とされるケースを想定しており, そのような場合に重要となるのはあくまで道路が繋がっていることである. 重要な地域間の移動が最低限確保されることであると考えためである. そのため本研究では, 各リンクにおける交通量などは考慮せず, 幾何学的な道路ネットワークの繋がりに関してのみ議論を進める.

#### (2) 拠点ノードの抽出法

複数の重要なノードを拠点ノードと定義したが, その決定方法はいくつかある. 選定に際しては任意でもその後の解析を行うことは可能であるが, 本研究ではネット

ワーク全体の性質を評価するために, 固有ベクトル中心性の概念を利用しながら, 局所的なネットワークの特性を反映しつつ, 空間的な偏在を反映した形で複数の拠点ノードを抽出できる, 局所固有ベクトル中心性という手法を用いた.

実際の道路ネットワークを考えようとした時, 交通の観点などから重要とされるノードは一か所に集中していることは少なく, 各地域にそれぞれ拠点となりうる地点が点在している. このことを踏まえ, 一旦選定した拠点ノードの近傍リンクをネットワークから排除し, 改めて固有ベクトル中心性に基づき逐次的に拠点ノードを選定する方法を考え, これを局所固有ベクトル中心性と呼ぶこととする.

#### (3) バネ・質点系の条件設定及び解析法

本研究ではネットワークが最低限果たすべき機能として, ネットワーク内から拠点ノードを選定し, 当該ノード間の接続性を維持することを念頭に置いている.

この拠点ノード間の接続性を検討するため, バネ・質点系に対して拠点ノードに斉次ディリクレ境界条件を課した解析を行う. 具体的には, ある1つの拠点ノードに単位荷重を加え, 残りの拠点ノードには全て0荷重を与える境界条件を与え, 加速度項を無視した静的解析を行う.

更に具体的な計算方法について説明する. 今, 図-3のような, ノード1及び3が拠点ノードであり, 特定のノードに強制的な荷重を与えたときの静的な解を求めることを考える. 図-3に示された条件に従えば, ノード1に強制荷重 $f_1 = 1$ を加え, ノード3に $f_3 = 0$ を与えたときの解を求める. ペナルティー法を用いて, このつり合い式は以下の形で表現できる.

$$k \begin{bmatrix} 1+M & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2+M & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \times M \\ 0 \\ 0 \times M \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

ここに,  $M$ はペナルティ定数で十分に大きな正の数を与える. 全てのノードの変位を求めた後, リンクの伸び縮み量である各ノードの変位差を求め, そこにバネ定数を乗ずれば各リンク, すなわち各バネにかかる張力が求められる. 本研究ではこの張力によってリンクを順位付

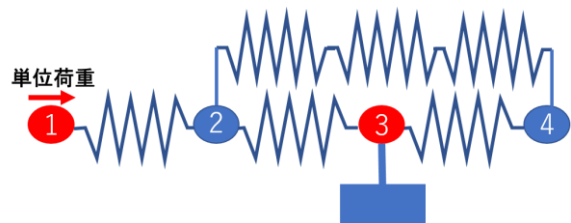


図-3 ノードを固定したバネ・質点系

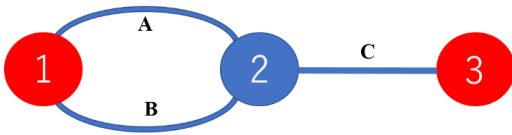


図4 ネットワーク例パターン1

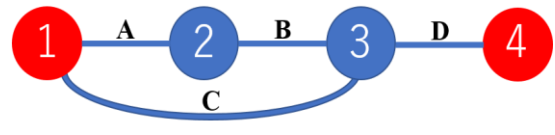


図6 ネットワーク例パターン2

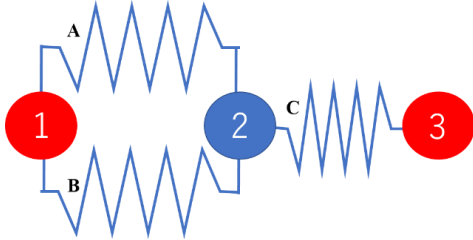


図5 図4に対応したバネ・質点系

表-1 パターン1, ノード1固定3荷重

各ノードの変位		バネにかかる張力	
ノード1	0.0	リンクA	0.5
ノード2	0.5	リンクB	0.5
ノード3	1.5	リンクC	1.0

表-2 パターン1, ノード1固定2荷重

各ノードの変位		バネにかかる張力	
ノード1	0.0	リンクA	0.5
ノード2	0.5	リンクB	0.5
ノード3	0.5	リンクC	0.0

けし、より張力が加わっているリンクをより重要なリンクと定義付ける。また、バネ定数についてだが、ここまでの計算例ではあくまで全てのリンクの特性が等しいという過程に基づいて例示されているが、実際には各リンクには長さが異なり統一のバネ定数で表現できるとは考え難い。そこで本研究では、リンク長の逆数を用いることで、各リンクの特性を反映するものとする。

#### 4. 仮想ネットワークを用いた提案手法の検討

##### (1) リンク長を考慮しない場合

ここでは簡単な3パターンネットワークを例にとって、提案手法の検討を行う。以下の例では、リンク長はすべて一律で1[km]であるものとする。

図-5に示したバネ・質点系は、図-4のネットワークに対応したものとなっている。今、このバネ・質点系において、ノード1, 3を拠点ノードとし、1を固定、3に単位

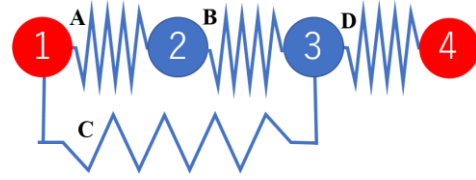


図7 図6に対応したバネ・質点系

表-3 パターン2, ノード1固定4荷重

各ノードの変位		バネにかかる張力	
ノード1	0.0	リンクA	0.33
ノード2	0.33	リンクB	0.33
ノード3	0.67	リンクC	0.67
ノード4	1.67	リンクD	1.0

荷重を加えた場合を考える。各ノード1~3の変位及びリンクA~Cにかかる張力を表-1に示す。

この例では明らかに、拠点間の接続において並列に接続されたA, Bのリンクより、1本鎖であるCのリンクが重要であると予想でき、実際にバネに加わる張力もA, Bに比べCが大きくなっている。

では、拠点ノードがノード1, 2で、1を固定し2に単位荷重を加えるとどうなるだろうか。各ノードの変位及びリンクにかかる張力を表-2に示す。

ここではリンクCは拠点間の接続に関係しておらず、かかる張力も0となっている。すなわち拠点間の接続において議論されるのはあくまで拠点同士を結ぶ線上のリンクであり、線上にないリンクについては、ここでは張力が0のリンクとして取り出され、議論に含まれない。

次に図-6に示したネットワークを例にとる。対応するバネ・質点系は図-7に示す。ノード1, 4を拠点ノードとし、1を固定、4に単位荷重を加えた場合を考えると、各ノードの変位及びリンクにかかる張力を表-3に示す。

この例でも表-1に示した場合と同様、一本鎖になっているリンクDは明らかに重要そうに見受けられ、計算の結果最も大きな張力が働いていることから重要であることが分かる。一方先程と違う点として、並列に繋がれたリンクの片方が2本のリンクの連続で表現されている。計算結果を見ると、A, Bに比べリンクCにかかる張力は大きくなっている。これは、リンクA, Bは両方が壊れて初めて接続が失われるのに対し、Cはそのリンクが壊れるだけで接続が失われるということからCの方がA, Bよりも重要度が高いように見受けられることと一致する。



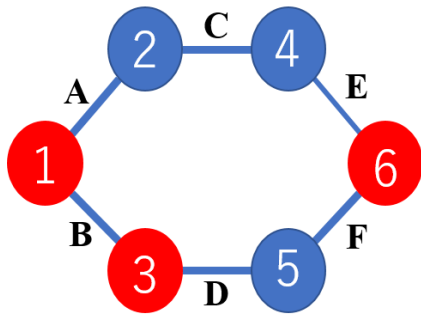


図-8 ネットワーク例パターン3

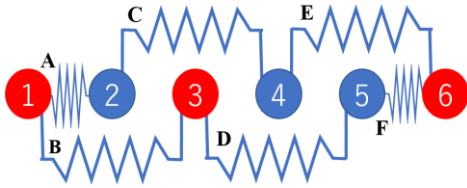


図-9 図-8に対応したバネ・質点系

表-4 パターン3, ノード1, 3固定6荷重

各ノードの変位		バネにかかる張力	
ノード1	0.0	リンクA	0.4
ノード2	0.4	リンクB	0.0
ノード3	0.0	リンクC	0.4
ノード4	0.8	リンクD	0.6
ノード5	0.6	リンクE	0.4
ノード6	1.0	リンクF	0.6

最後に図-8に示したネットワークを例にとる. 対応するバネ・質点系は図-9に示す. ノード1, 3, 及び6を拠点ノードとし, ひとつに単位荷重, 残りを固定したパターンについて, リンクにかかる張力を表-4に示す.

表-4に示した例を見てみると, リンクA, C, EよりもリンクD, Fの方が大きな張力がかかっており, より重要度の高いリンクであることが分かる. 実際に拠点ノードを結ぶことを考えたときに必要なリンクの本数がより少ない後者の方が重要であることも整合性がとれている.

(2) リンク長を考慮する場合

大きく3つの例を挙げてネットワークの解析法を具体的に示したが, ここではリンク長は全て等しいという仮定の下で議論が行われていた. では, リンク長を変えると得られる結果にどのような影響が出るのだろうか.

再び図-5のバネ・質点系を例にとる. ただしリンクごとに長さが異なり,  $A = 1[km]$ ,  $B = 2[km]$ ,  $C = 1[km]$ とする. それを踏まえて計算した結果を, 先程表-1で示した一律リンク長による結果と比較して表-5で示

表-5 パターン1, ノード1固定3荷重  
リンク長変化

	バネにかかる張力	
	リンク長統一	変化
リンクA	0.50	0.67
リンクB	0.50	0.33
リンクC	1.00	1.00

表-6 パターン2, ノード1固定4荷重  
リンク長変化

	バネにかかる張力	
	リンク長統一	変化
リンクA	0.33	0.50
リンクB	0.33	0.50
リンクC	0.67	0.50
リンクD	1.00	1.00

す.

この結果を見て分かるように, 同じ並列で結ばれたリンクでも, 長さが変わることによってそれぞれにかかる張力は変化しており, リンクの長さが長いほど張力は小さくなっている. これはすなわち拠点ノード間を結ぶ複数のリンクが存在する際に, リンク長が短いリンクほど重要度が高くなるということを示している.

同様に, 図-7を例にとり, リンク長をそれぞれ  $A = 1[km]$ ,  $B = 1[km]$ ,  $C = 2[km]$ ,  $D = 1[km]$ として計算した結果を, 一律リンク長で計算した表-3の結果と比較して表-6で示す.

この結果から, 並列に結ばれたリンクA, Bを通るルートとリンクCを通るルートでかかっている張力が等しくなっている. このことから, あるノード間を考える際に中継するノードの存在に関わらず, そのリンクの長さによってのみ張力が決まるということである. すなわち, たくさん中継地点となるようなノードがある経路上の短い各々のリンクも, 単一の長いリンクも, 議論しているのが同じ拠点ノード間であれば重要度に優劣はつかないということがこの結果から分かる.

5. 結論

本論文では, 道路ネットワークにおけるリンク重要度の評価方法として, 道路ネットワークをバネ・質点系に見立て, そこから求められる張力を指標とする提案を行った. 提案手法の要点は以下の通りである.

- 災害時の復旧など緊急に迫られた際を想定しており、各地域の重要地点である拠点ノード間の接続性が最低限保たれていることが重要であるという視点で考える。
- 拠点ノードの抽出方法については局所固有ベクトル中心性による手法を用いることで、ネットワークのサイズが変化した際も柔軟に対応できるようになる。
- 拠点ノード間の接続性を評価するために力学アナロジーに基づき各拠点ノードにディリクレ境界条件を課する。解析を行う上ではこの条件をペナルティ法を用いることで表現している。
- 求められた張力が大きいほど負荷が大きいことを示しており、実際の道路ネットワークにおいてもより大きな負荷がかかっていると考えられ、重要度が高いと考えられる。
- リンク長の逆数をバネ定数に用いることで各リンクの特性をラプラシアン行列に反映している。  
更にネットワークの例を用いて検討した結果、以下の特徴を有することが確認された。
- 拠点ノード間に固定、荷重の条件を課した際に、バネの張力が大きくかかっているリンクは実際のネットワーク例において重要に見受けられるリンクと一致する。
- リンク長を考慮しない場合とする場合では結果に差が生じており、現実的な解析を行う上で経路の長さは重要であることからリンク長を考慮して計算を行うことが望ましい
- 拠点ノード間を結ぶいくつかの経路がある場合、短いリンクの連続によって表現された経路も、単一の長いリンクによって表現された経路も、それぞれのリンクに注目した場合各リンクにかかる張力は等しく、重要度に優劣はつかない。  
今後の展望として、実際の道路ネットワークからノード・リンクの情報を取り出し、局所固有ベクトル中心性によって拠点ノードを取り出した上で解析を行い、得られた結果の妥当性を既往研究から得られている評価と比較していきたい。

#### 参考文献

- 1) 坪川秀太郎：バネ・質点系のアナロジーに基づく道路ネットワーク性能の定量的評価に関する考察，金沢大学修士論文，2018.
- 2) 小林俊一ら：固有ベクトル中心性の概念を拡張したネットワーク上の拠点ノード抽出および領域分割手法の提案，土木学会論文集 D3，Vol.74，No.5，pp. L747-L760，2018.

(2019. 10. 5 受付)

## EVALUATION OF LINK IMPORTANCE BASED ON THE ACCESSIBILITY TO MULTIPLE IMPORTANT NODES

Shun-ichi KOBAYASHI, Daichi KITAKURA, Shoichiro NAKAYAMA  
and Hiromichi YAMAGUCHI