最小木を利用した被災リンクの修復順序評価について

Tran Thanh Hai[1]・小林 俊一[2]・中山 晶一朗[3]・山口 裕通[4]

[1]学生会員　金沢大学大学院生 自然科学研究科 環境デザイン学専攻 (〒 920-1192 石川県金沢市角間町)
[2]正会員　博士　(工)　金沢大学准教授　理工学研究域地球社会基盤学系 (同上)
E-mail: koba@se.kanazawa-u.ac.jp
[3]正会員　博士　(工)　金沢大学教授　理工研究域地球社会基盤学系 (同上)
E-mail: nakayama@staff.kanazawa-u.ac.jp
[4]正会員　博士　(工)　金沢大学助教　理工研究域地球社会基盤学系 (同上)

地震，水害，雪害などの災害により複数のリンクが通行不能となったため，道路網が分断されて機能を果たせず所期の目的を果たせない事例が発生している．特に災害直後には，まず何らかの経路で全てのノードへの接続性を確保することが道路網に要求される最低限の性能である．著者らは道路網の複数リンクが通行不能のために分断された状態を想定し，各ノードへの接続性確保に必要となる緊急復旧リンクの選定法として Kruskal の最小木アルゴリズムや最短経路計算の Dijkstra 法を応用した方法をすでに提案している．本論文では，上記の方法で得られた木構造を利用し，巡回セールスマン問題の近似アルゴリズムを参考にして，与えられた出発点から修復リンクをすべて経由して元に戻る「良修復ループ」とリンク修復順序について議論する．

Key Words: *Road network, Accessibility, Large-scaled disaster, Recovery Plan*

1. 緒言

地震，津波，水害，雪害などの災害により複数のリンクが通行不能になれば，道路網に障害が発生し，その所期の目的を果たせないことは過去の大規模な自然災害の事例を通しても明らかである．避難活動，緊急支援活動，復興活動を迅速に果たすためには，まず道路網の早期復旧が必要であることは言うまでもない．復旧戦略は，獲得情報の精粗，要求される活動や物資などが時系列で変化するため，それぞれのフェイズに応じた作業が必要となる．

災害直後には，まず何らかの経路で全てのノードへの接続性を確保することが道路網に要求される最低限の性能である．最低限の接続性を数理的に評価するためには，グラフ理論における木構造の概念が有用である．ここで「木」とは，グラフ上のいくつかのリンクを用いて，閉路（ループ）がない状態で全てのノードについて接続性が確保される構造のことをいう．したがって，ともかく何らかの経路で全てのノードへの接続性を確保することは，グラフ上で木構造を構築することを意味する．

被災直後に緊急で行う復旧活動や，その救援ルートを確保するための道路啓開については，ネットワークに木構造を形成することと親和性が高い．例えば，東日本大震災直後に国土交通省によって実施された「くしの歯作戦」[1]は，道路啓開のリソースが供給可能な地点から各地域の重要地点に向けて木構造を構成するステップと見ることもできる．

著者らは道路網の複数リンクが通行不能のために分断された状態を想定し，各ノードへの接続性確保に必要となる緊急復旧リンクの選定を取り上げ，修復リンクを選定を行う数理的な手法について提案している[2]．この提案手法では貪欲法の一種である Krasukal[3] のアルゴリズムを援用し，修復コスト最小で全体木を構成する「修復最小全体木」を求め，修復すべきリンク群を選定する．

本論文では，著者らの既往研究を発展させ，全てのノードへの接続性確保に必要となる修復すべきリンク群が設定されたときに，出発ノードから修復すべきリンク群全てを経由して元のノードに戻ってくる巡回路に基づき，リンク修復順序と巡回路長の改善を検討する．

2. 提案手法

(1) 問題の設定

本論文では無向グラフを対象とする．ネットワークは位置を表すノード，それらを接続するリンクで表現される．各リンクの情報として，リンク番号のほかに始点ノード番号，終点ノード番号およびリンクの重みを用いる．

木構造とはネットワークに属するいくつかのリンクを選択し，閉路（ループ）がない状態で全てのノードについて接続性を確保されている構造のことである．それらの木の中でリンクの重みの合計が最小となるものを最小木という．また部分木とは，ネットワークの一部のノード群が閉路（ループ）のない状態で接続している構造のことである．

さて，あるネットワークが大規模災害によって被災した結果，複数のリンクが通行不能になった状態を考える．ここで，ネットワークの接続性を確保するためには以下の重要が有用である．

- 互いに接続するノード群からなる部分木の数．部分木の数が 1 の場合は全体木を意味し，互いに全てのノードへの接続性が確保されている．2 以上の場合は，部分木の数から 1 引いた数の通行不能リンクを修復する必要がある．
- 通行不能リンクのうち，どのリンクを修復すべきか．
- またそれらをどのような順序で修復すべきか．

本論文では，これらを 2 つのプロセスで処理することを提案する．

- 修復最小全体木の計算
- 修復ループの改善

以下，詳細を説明する．

(2) 修復最小全体木を求めるプロセス

修復すべきリンクの選定については，問題を以下のように単純化する[2]．

仮定： 通行可能リンクの移動コスト·時間は無視できる．

仮定： リンクの重みとしてリンク長の他に，通行不能リンクについては修復コスト（たとえば修復に要する時間等）も既知とする．

制約条件： 互いにすべてのノードへの接続性を確保すること．

目的関数： 通行不可能リンクの修復コストの和を最小とする

この問題の解として得られる全体木を「修復最小全体木」と呼ぶことにする．「修復最小全体木」を求める手順には，貪欲法の一種である最小木に関する Kruskal アルゴリズムを援用する．

1. 通行可能リンクに対して Kruskal アルゴリズムを適用して部分木を求める．ネットワークが部分領域で完全に分離されていれば複数の部分木が求まる．また，部分木の総延長の和が最小となるような部分木が得られる．
2. つぎに，全体木が得られるまで通行不能リンクに対して kruskal アルゴリズムを適用する．
3. こうして得られた「修復最小全体木」は，修復リンクの修復コストの和が最小となる木である．

(3) 修復ループを改善するプロセス

まずリンクの修復活動について，以下の仮定を置く．

修復活動： 1 つの修復チームが 1 つずつリンクを修復していくと仮定する．

起終点ノード： 修復用機材の基地など，修復活動の起点となる場所を指定する．また修復活動後は元に戻る必要があると考え，終点ノードは起点ノードと同一とする．

修復ループ： 起点ノードから出発し，修復すべきリンクを順に修復し，最終的には元のノードに戻る．

修復ループの候補としては，「修復最小全体木」を辿るループを初期解とする．木構造からループを得る具体的な方法については付録 A を参照のこと．

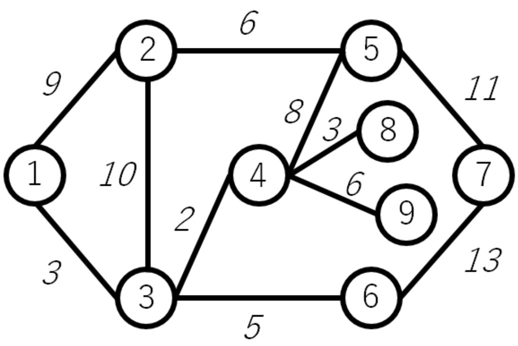
与えられた出発点から修復すべきリンク群をすべて経由して元に戻る巡回路の中で，巡回路長を短縮化した「良ループ経路」の探索とリンク修復順序について議論する．特に巡回経路長の短縮化には，巡回セールスマン問題の近似解法アルゴリズムである 2-opt 法[4] や Chirtofides の 1.5-近似[5] を参考して，局所的に解を改善する方法を取る．

修復活動では，修復すべきリンクの両端のノードを必ず通る必要がある．これを「着目ノード群」と呼ぶことにする．巡回セールスマン問題とは違って，修復ループにおいては着目ノード以外はスキップしても構わない.「修復最小全体木」から作った修復ループは，着目ノード群以外の多数のノードを経由している.「修復ループ」の中で隣り合う「着目ノード」どうし，あるいは着目ノードと起終点ノード間を結ぶ最短経路は「修復最小全体木」以外のリンクを通ることもある．そこで通行可能リンクと既に修復したリンクの情報を用いて最短経路を計算し,「修復ループ」の巡回路長の短縮を図る．このようにして得られるループのことを「良修復ループ」と呼ぶことにする．

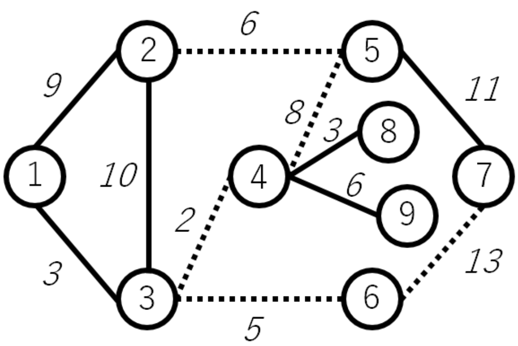
「良修復ループ」の性質を理論的に説明することは難しい．修復リンクの順序は「修復最小全体木」から求めたループの初期解で決まる．一方，隣接する着目ノード間の経路は最短距離経路を利用するため，起終点ノードと修復リンクの順番が与えられれば，それに対応する最短修復ループとなる．この意味で良い修復ループの解を与えていると考えたい．しかし，ループの初期解は複数あり，修復リンクの順番は一般に一意ではないので，修復ループのうちで最短である保証はない．

3. 例題を用いた説明

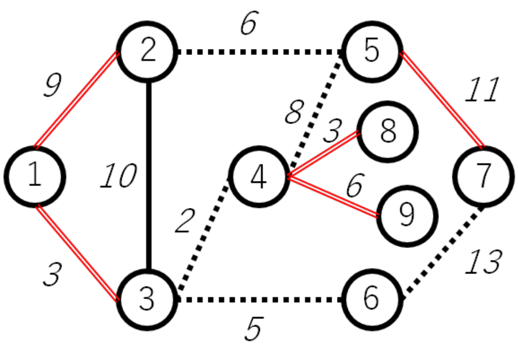
前節で説明した提案手法を具体的な例題を通して説明する．例題のネットワークを**図-1** に示す．リンクに



図–1 例題のネットワーク



図–2 通行可能リンクと通行不能リンク

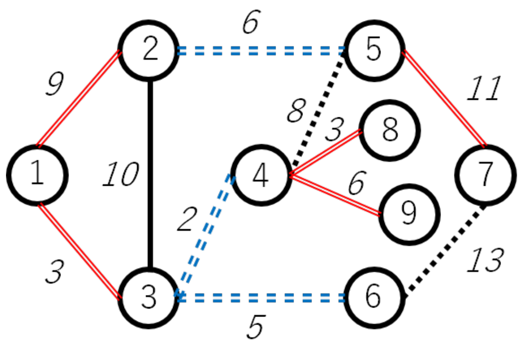


図–3 通行可能リンクに Kruskal アルゴリズムを適用した結果

示されている数字は重みを表す．ここでは簡単のため，リンクが通行可能な時はリンク長，リンクが通行不能な時はリンク長に比例したリンク修復コスト（時間）を表すこととする．もちろん，リンク修復コストとリンク長を独立した量としても，本方法は一般性を失わない．

(1) 修復最小全体木を求めるプロセス

さて，このネットワークが大規模災害によって**図-2**のように被災したとする．図中の実線は通行可能リンク，破線は通行不能リンクとする．このとき通行可能リンクに対して Kruskal アルゴリズムを適用すると，**図-3**に示すような部分木が得られる．部分木を構成するリンクを二重線で表す．この場合，4 つの部分木が得られる．それぞれの部分木に含まれるノードは $(1,2,3)$, $(5,7)$, $(4,8,9)$, (6) である．したがって，$4-1=3$ つのリンクを修復することで全体木が構成できるはずである．



図–4 修復最小全体木

次に引き続いて，通行不能リンクについて Kruskal のアルゴリズムを適用する．そうすると**図-4**に示す修復最小全体木が得られる．ここに 2 重破線は復旧すべきリンクを表す．

(2) 修復ループを改善するプロセス

a) 木構造に基づくループの生成

ここでは隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を利用した図解法を説明する．ループ先頭のノードを i として，ループ先頭の次の移動先 j を以下のルールで決める．

1. ループ先頭をノード i とする．
2. 隣接行列の i 行成分 $A(i,*)$ に着目する．
3. 正の成分 $A(i,j)>0$ が存在するか？
   - YES: 隣接行列の成分を $A(i,j)=0$, $A(j,i)=-A(i,j)$ に書き換えて，ループ先頭をノード j に移動．
   - NO: 負の成分 $A(i,j)<0$ が存在するか？
     - YES: 隣接行列の成分を $A(i,j)=0$ に書き換えて，ループ先頭をノード j に移動．
     - NO: ループ生成終了．
4. ループ先頭がノード j に移動完了．

図-4 の修復最小全体木について，隣接行列は以下の

とおりである．

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

また木に属するリンク数が 8 であるので，ループは $8\times 2=16$ の辺を通ることになり，経由するノード数は起終点をあわせて延べ 17 個になる．生成されるループの k 番目のノードを $L(k)$ とする．

例として起終点ノードを 6 とした場合について，ループ生成を行う．先ずループ先頭はノード 6 であるので，ループ成分は $L(1)=6$．隣接行列の 6 行目に着目すると，正の成分 $A(6,3)=1$ が存在するので，このリンクを経由してループ先頭がノード 3 に移動し，$L(2)=3$．また行列の成分を $A(3,6)=-A(6,3), A(6,3)=0$ に書き換える．このときの隣接行列は

$$\mathbf{A}'=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

となる．

次にループ先頭が 3 であるので，隣接行列の 3 行目に着目する．正の成分が 2 つあるので，そのいずれかに進めばよい．ここではノード 1 に進むことにする．すると $L(3)=1$，また書き換えられた隣接行列は

$$\mathbf{A}'=\begin{bmatrix}0&1&-1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

となる．同様の手順でループ先頭はノード 2，さらに 5, 7 へと進み，$L(4)=2, L(5)=5, L(6)=7$ となる．ループ先頭がノード 7 まで進むと隣接行列は

$$\mathbf{A}'=\begin{bmatrix}0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&1\\0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

となり，7 行目の成分を見るとノード 7 から未到達のノードはないことが分かる．そこで成分が -1 のリンクを辿って既到達ノードの 5 へ戻ることになる．ノード 5 に戻る際には隣接行列の成分を $A(7,5)=0$ と書きかえる．

同様のプロセスを踏むと最終的には修復ループとして

$$L=(6,3,1,2,5,7,5,2,1,3,4,8,4,9,4,3,6)$$

が得られる．

b) 修復ループの短縮化

本ケースの着目ノード群は起終点ノード 6 のほか，修復リンクの両端ノードを加えた $(2,3,4,5,6)$ である．先ほど得られた修復ループの成分のうち，着目ノード群に記号 $*$ を付けると

$$L=(6^*,3^*,1,2^*,5^*,7,5^*,2^*,1,\\ 3^*,4^*,8,4^*,9,4^*,3^*,6^*)$$

と書ける．したがって修復ループが通るべき着目ノード群だけを順に書くと

$$L^*=(6^*,3^*,2^*,5^*,5^*,2^*,3^*,4^*,4^*,4^*,3^*,6^*)$$

となる．これを「良修復ループ」とする．

c) 良修復ループの解釈

良修復ループの成分からリンクの修復順と修復作業開始側のノードが分かる．リンク修復順は $(6,3), (2,5), (3,4)$ となり，各リンクでは左側のノードから右側のノードに向かって修復を進める．

まだ修復リンクへの移動経路として，ノード $(2^*,3^*)$ 間の経路では，修復最小全体木に属するリンクよりも短い経路が存在するため，それを利用する．

本例題は単純であるために，隣接する着目ノードを結ぶ最短経路が図から読み取れるが，一般には Dijkstra 法で最短経路を確認しなければならない．

d) ループ生成に起因する課題点

計算初期に木構造からループを生成する過程では，いずれの未到達ノードに進むかを選ぶ自由度が残されている．一方，それによってリンク修復順序が決まってしまうことになる．さらに答えも変わる可能性がある．

例えば起終点ノードを 1 とした場合に，生成可能な 2 つの修復ループを考える．

$$L_1 = (1,2,5,7,5,2,1,3,6,3,4,9,4,8,4,3,1)$$
$$L_2 = (1,3,4,9,4,8,4,3,6,3,1,2,5,7,5,2,1)$$

ループ生成時にリンク長の長い方の未到達ノードから順に選択したのが L_1，逆にリンク長の短い方の未到達ノードから順に選択したのが L_2 である．ここから修復ループの短縮化を図ると，それぞれ異なる巡回路長の解

$$L_1^* = (1,2,5,5,2,3,6,3,4,4,4,3,1), \text{Cost=48}$$
$$L_2^* = (1,3,4,4,4,3,6,3,2,5,7,5,2,1), \text{Cost=42}$$

が得られる．この事実からも，提案手法は良い近似を与えると考えたいが，最適解である保証はない．

4. 結言

本論文では，分断されたネットワークの緊急復旧ルートおよび修復順序を選定を目的とし，ネットワークの木構造を利用した定量的評価手法について検討した．

著者らが提案する評価手法は以下の 2 段階で構成される．

- Kruskal アルゴリズムを援用し，修復コスト最小で全体木を構成する「修復最小全体木」を求め，修復すべきリンク群を決定する．
- 修復機材の基地を想定した起終点ノードを指定し，修復最小全体木を利用したループを初期解として生成する．それをもとにして全ノードを通るループから，最低限として起終点ノードと修復リンクの両端のノードを通るループを生成し，さらにその巡回路長の短縮を図り,「良修復ループ」を求める．

本提案手法は，設定が単純で計算量も多項式のオーダーで収まるのが特徴である．また得られる解は必ずしも最適解ではないが,「良修復ループ」として復旧すべきリンクと復旧順序，また復旧必要な移動経路の情報が含むため，工学的な応用が期待できる．

今後の課題としては，複数の修復ユニットで同時に修復作業を行う場合を想定するなど，問題設定の条件を緩めてより現実に近い条件に対する解を求めるアルゴリズムを検討したい．

付録 I　利用する各種アルゴリズムの説明

(1) 最小木問題に関する Kruskal のアルゴリズム

無向グラフを対象とする．ネットワークは位置を表すノード，それらを接続するリンクで表現される．各リンクの情報として，リンク番号のほかに始点ノード番号，終点ノード番号およびリンクの重みを用いる．

Kruskal（クラスカル）のアルゴリズム[3] は，貪欲法の一種でネットワークの最小木を求めるアルゴリズムである．木構造を構成するリンクのメンバーシップを求める際に，リンク長の短いものから長いものを順に照査し，当該リンクがループを発生しないことが確認できれば最小木メンバーに追加する．このようにして部分木を更新し，最終的に最小木を求める．

またループの判定については部分木集合を導入し，照査するリンクの始点ノードと終点ノードが異なる部分木集合に属している場合にのみ，最小木メンバーに追加した上で部分木集合情報をマージして更新する．部分木集合は到達可能な代表ノードを表す集合で，その元は代表ノードが属する部分木から到達可能な全てのノード番号である．初期値では，到達可能な代表ノードに属する到達可能なノードは自分自身のみであり，元の数は 1 である．部分木集合情報のマージでは，元の数の多い方の集合にマージする．

(2) Dijkstra 法による最短経路計算

Dijkstra（ダイクストラ）法[6] は始点ノード s を与えたとき，そこから他の全てのノードへの最短距離と最短経路を求める方法である．得られた最短経路は始点ノード s を根とする木構造となる．各ノード i について始点からの最短距離 $d(i)$，始点ノードを含む部分木集合 S のメンバーシップ $m(i)$ および上流側ノード番号 $prev(i)$ を定義する．変数の初期値として，最短距離は十分大きな値，メンバーシップは始点ノードは”true”，それ以外は”false”．また上流側ノード番号はゼロを与えておく．

第 1 ステップでは，始点ノードに接続するリンクのリンク長に基づき，最短距離 $d(i)$ と上流側ノード番号 $prev(i)$ を更新する．その上で，$d(i)$ の最小値を与えるノード番号 i^* を探す．このノード i^* を集合 S のメンバーに追加し，$m(i^*)$ を”true” に更新する．

後続ステップでは，新規に集合 S に加わったノード i^* に接続するリンクを調べ，リンク先のノード u までの最短距離 $d(u)$ が短縮される場合は最短距離 $d(u)$ を更新し，上流側ノード番号も $prev(u) = i^*$ と更新する．その上で，集合 S に含まれないノード（$m(i) ='' false''$）のうち，最短距離 $d(i)$ が最も小さなノードを探す．そして，このノードを集合 S のメンバーに追加する．

以下同様の操作を繰り返すことによって，全てのノード i について，始点ノード s からの最短距離 $d(i)$ と最

短経路上の上流側ノード $prev(i)$ が求められる．

(3) 巡回セールスマン問題と近似解法

a) 巡回セールスマン問題とメトリック巡回セールスマン問題

巡回セールスマン問題とは,「都市のリストと，都市間を結ぶリンクの長さが与えられたとき，ある都市から出発して全ての都市を訪問して元に戻ってくるルートのうち，距離が最も小さくなるものを探せ」という組合せ最適化問題である．この問題は NP 困難として知られ，多項式時間アルゴリズムが見つかっていない計算量的に困難な問題である．

メトリック巡回セールスマン問題とは，完全グラフで都市間の移動コストが正，また移動コストは三角不等式 $l_{ij} \leq l_{ik} + l_{kj}$ を満たす巡回セールスマン問題である．このような条件を課してたメトリック巡回セールスマン問題であっても NP 困難であることに変わりはないことが知られている．

b) 最小木を利用した近似解法

メトリック巡回セールスマン問題に対しては多項式時間である程度良い解を得るためのアルゴリズムが知られている．例えば，Christofides のアルゴリズム[5] を使うと，得られる近似解の巡回路長は最適解の 1.5 倍以下となることが知られている．同様に 2-opt 法[4] を用いると，得られる近似解の巡回路長は最適解の 2 倍以下になる．これらはいずれも最小木を初期解として，巡回路の改善を図るアルゴリズムである．

参考文献

1) 啓開「くしの歯」作戦：国土交通省東北地方整備局 震災伝承館: http://infra-archive311.jp/s-kushinoha.html, 2019 年 10 月 3 日アクセス．
2) Tran Thanh Hai, 小林 俊一，坪川 秀太朗，中山晶一朗，山口 裕通：ネットワーク上に構成する木構造を利用した道路網の緊急復旧ルート選定に関する一考察，第 58 回 土木計画学研究発表会，土木計画学・研究講演集 Vol. 58 (CD-ROM)，2018.
3) Kruskal, J.B.: On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem, Proc. of the AMS, Vol. 7, No. 1, pp. 48-50, 1956.
4) Croes, G.A.: A method for solving traveling-salesman problems, Operations Research, Vol. 6, pp. 791-812, 1958.
5) Christofides, N.: Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem, Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, 1976.
6) Dijkstra, E.W.: A note on two problems in connexion with graphs, In Numerische Mathematik, Vol. 1, pp. 269-271, 1959.

(2019. 10. 5 受付)

A STUDY ON THE REPAIR ORDER OF DAMAGED LINKS BASED ON A TREE STRUCTURE

Tran Thanh HAI, Shun-ichi KOBAYASHI, Shoichiro NAKAYAMA and Hiromichi YAMAGUCHI