

# グラフ理論を用いた道路ネットワークの 災害時連結性評価

田嶋 眞樹<sup>1</sup>・中山 晶一朗<sup>2</sup>・山口 裕通<sup>3</sup>・小林 俊一<sup>4</sup>

<sup>1</sup>学生会員 金沢大学大学院 自然科学研究科環境デザイン学専攻 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)  
E-mail:masaki.t\_1126@stu.kanazawa-u.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 金沢大学 理工研究域地球社会基盤学系 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)  
E-mail:nakayama@staff.kanazawa-u.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 金沢大学 理工研究域地球社会基盤学系 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)  
E-mail:koba@se.kanazawa-u.ac.jp

<sup>4</sup>正会員 金沢大学 理工研究域地球社会基盤学系 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)  
E-mail:hyamaguchi@se.kanazawa-u.ac.jp

道路ネットワークは人、物資などの輸送の上で重要な役割を担うインフラストラクチャーの一つである。しかし、日本は地震災害や台風、豪雨などの自然災害が頻発する地域といえる。それらの自然災害は時に広範囲に渡る被害をもたらす、複数の道路に対する途絶の危険性が生じる。そのため、他地域からの支援物資や支援者などを被害地域全体に行き渡らせるためにも全体としての連結性を確保することが望まれ、また、交通ネットワーク全体における同時多発的な被害を考慮した連結性の評価が必要であるといえる。本研究では、グラフ理論を応用して、道路ネットワークの同時複数切断を考慮した連結性評価の指標を提案する。

**Key Words :** *Connectively assesment, Graph theory, Road network, Disaster*

## 1. はじめに

道路ネットワークは人、物資などの輸送に関して日常的に非常に大きな役割を担っていると言える。一方で、近年、我が国においては地震災害や台風、豪雨、水害などの自然災害が多発している。有事の際には、一部の道路途絶などによるネットワークへの深刻な悪影響が発生し、人・物資などの輸送が滞ってしまう可能性が高い。そのため、各都道府県は災害時に、支援物資や支援者を輸送できるように、緊急輸送道路を指定し当該道路を災害時にも通行できるように整備することを通じて、災害時における円滑な物流を行うための交通ネットワークの構築を目指している。しかし、それらの自然災害は時に広範囲に渡る被害をもたらす、同時多発的な道路途絶の危険性が生じる。そのため、他地域からの支援物資や支援者などを被害地域全体に行き渡らせるためにも全体としての繋がりが強いネットワークが必要であり、また交通ネットワーク全体における同時多発的な被害を考慮した連結性の評価が必要である。

道路ネットワークの連結性の計算は様々な方法で行わ

れている。その中でグラフ理論を用いた評価として小林ら<sup>1)</sup>の研究がある。この研究では、交通ネットワークをラプラシアン行列で表現し、その第2最小固有値および固有ベクトルを用いた評価を行っているが、それは1つのリンクが切断された際の固有値の値の大小を比較した連結性評価であって、複数リンクの同時切断を考慮した評価は少ない。それは、複数リンクを考慮すると計算回数の増加という課題があるためである。本研究では、複数リンクの同時切断を考えた道路ネットワークの連結性評価の方法を提案することを目的とする。具体的には、仮想ネットワーク上で同時に複数のリンクを切断したネットワークシミュレーションを通じて複数リンクの同時切断が起こるような災害に対しても強いネットワークとはどのような特徴を持つネットワークかを明らかにする。そして計算効率の課題を回避しつつ、これらの疑問に答えるために、小規模なネットワークから徐々に計算上の工夫を模索しながら大規模なネットワークへ展開していく。

## 2. グラフ理論を利用した連結性評価

(1) 隣接行列

まずはじめに、ネットワークを一意に表現する方法である、隣接行列について説明する。この行列は無向で重みのないネットワークのリンクとノードの接続関係を記述している。ノード数 $N$ のネットワークの隣接行列 $\mathbf{A}$ の行列成分 $a_{ij}$ は、

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{ノード } i, j \text{ が接続}) \\ 0 & (\text{ノード } i, j \text{ が非接続}) \end{cases} \quad (1)$$

と表される。対角成分である $a_{ii} = a_{jj} = 0$ である。また、無向グラフではノード $i$ がノード $j$ に連結していることとノード $j$ がノード $i$ に連結していることを区別しないので $a_{ij} = a_{ji}$ であり、実対称行列である。

(2)隣接行列の最大固有値

無向グラフ $G$ が連結であれば任意のノード $i$ と $j$ の間を移動可能なリンク集合が存在することになる。このことから隣接行列は線形代数学において既約行列であるといえる。また、隣接行列が既約行列であることの必要十分条件はグラフが連結であることである<sup>2)</sup>。規約行列の最大固有値に関しては、Perron-Frobenius (ペロン-フロベニウス) の定理が知られている。

この定理を無向連結グラフの隣接行列に当てはめると、隣接行列の最大固有値は正で縮退がなく、その固有ベクトルの成分はすべて正である。

また、連結したグラフを表す隣接行列の最大固有値 $\lambda_{max}$ とグラフからいくつかノードやリンクを取り除いたグラフの隣接行列の最大固有値 $\lambda'_{max}$ には

$$\lambda_{max} > \lambda'_{max} \quad (2)$$

が成立する。

(3)Wignerの半円則

まず、Wignerの半円則を理解するために必要なランダム行列について説明する。ランダム行列が $N \times N$ 実対称行列でそのランダム行列 $\mathbf{S}$ の行列要素 $s_{ij}$ はそれぞれ独立に同じ分布関数に従っている確率変数であり、その分散を $\sigma$ とする。実対称行列であるため $\mathbf{S}$ の固有値は実数である。以上のようなランダム行列の固有値の分布に対しては以下に述べるWignerの半円則が成り立つことが知られている。実対称行列 $\mathbf{S}$ は、実直交行列 $\mathbf{R}$ によって

$$\mathbf{S} = \mathbf{RDR}^{-1} \quad (3)$$

と対角化できる。ここで $\mathbf{R}^{-1}$ は $\mathbf{R}$ の逆行列であり、 $\mathbf{D}$ は

対角行列でその要素 $d_{ij}$ は $\mathbf{S}$ の固有値である。固有値の分布の特徴を表す量として固有値密度は、

$$\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta\left(x - \frac{x_i}{\sqrt{N}}\right) \quad (4)$$

で表される。またその固有値密度の平均 $\langle \rho(x) \rangle$ を取り上げる。ここで $N$ はノード数、 $x_i$ は対角要素、 $\delta(x)$ はデルタ関数である。平均固有値密度 $\langle \rho(x) \rangle$ は、規格化条件

$$\int \langle \rho(x) \rangle dx = 1 \quad (5)$$

を満たすため、確率密度関数とみなすことができる。また、 $\langle \rho(x) \rangle$ は $N$ が十分大きいときに

$$\langle \rho(x) \rangle \sim \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sigma} \sqrt{4\sigma^2 - x^2} & (|x| < 2\sqrt{\sigma}) \\ 0 & (|x| > 2\sqrt{\sigma}) \end{cases} \quad (6)$$

のようになる。

隣接行列は行列要素が0または1のみの行列である。それはつまり、ネットワーク構造が複雑になるとともに0または1の値が複雑なパターンで現れることになる。隣接行列をランダム行列と見なしたとき、与えられた道路ネットワークの固有値密度関数の形を調べ、半円則からどのように歪んでいくのか調べることで、ネットワークの不均一さを測ることができるのではないだろうか。

3. 仮想道路ネットワークへの適用

(1) 連結性評価の過程

初めに本稿で述べる連結性評価の過程について説明する。

a) 仮想ネットワークの作成

100ノードのネットワークにおいて完全連結グラフを作成する。図-1は8ノードにおける完全連結グラフであり、これを100ノードに拡大したものをを用いる。

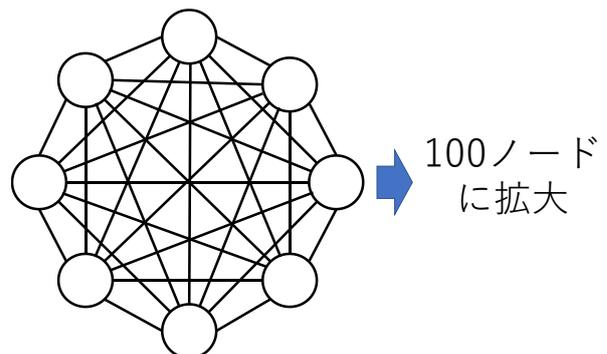


図-1 完全グラフの例

b) 同時複数リンク切断の考慮

リンク切断のパターンとしてはリンク数を $L$ とすると $2^L$ 通りのパターンが存在する。これはネットワークの規模とともに指数関数的に増大するためすべてのリンク切断パターンを考慮するのは不可能である。そのため本研究ではあらかじめ指定したリンク数を完全ランダムに切断し、それを繰り返すことで同時複数リンク切断を考慮する。

作成したネットワークにおいて0%~90%のリンク量の完全ランダム切断を行い全固有値を計算、を1つの作業としてこれを1000回繰り返した際の各固有値の平均値 $\bar{\lambda}$ を計算する。

c) 連結性評価

最大固有値の平均値 $\bar{\lambda}_{max}$ を用いた評価及びWignerの半円則による固有値分布の形の歪みから連結性が低下した際にどのような挙動が現れるかを見る。

(2) 完全グラフにおける連結性評価

完全グラフとは任意の2ノード間にリンクが存在するグラフのことを指す。まず、0%~90%のリンク切断数における隣接行列の最大固有値の推移を図-1に示す。リンクを取り除くごとに $\bar{\lambda}_{max}$ は小さくなっていくことが読み取れる。次に、0%~90%のリンク切断数において計算された固有値の分布を図-2~図-11に示す。0%リンク切断の状態では、対角成分のみが0であり、その他の成分はすべて1であるため、 $\bar{\lambda}_{max}$ 以外はすべて-1となった。リンクを切断することで行列成分にランダム性が出てくると、図-3から図-11に示すように固有値分布は概ね半円のような形になる。また、50%リンク切断時の図がランダム行列の性質に一番近いものである。しかし、現実のネットワークにおいては50%以上の割合で行列要素に0が現れることが予想でき、現実のネットワークに当てはめることを考えると図-7から図-11のグラフの推移をみる必要があると考えられる。これらから、リンクが切断されることで固有値分布は縦に伸びた楕円上に変化していくことが予想される。

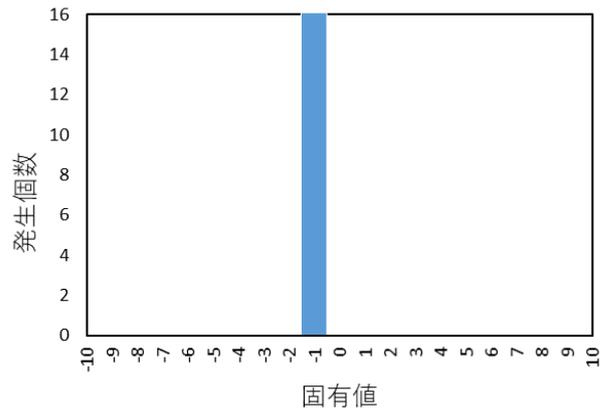


図-2 0%リンク切断時固有値分布

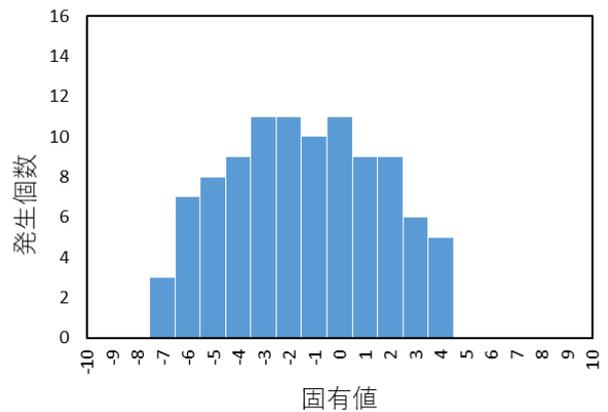


図-3 10%リンク切断時固有値分布

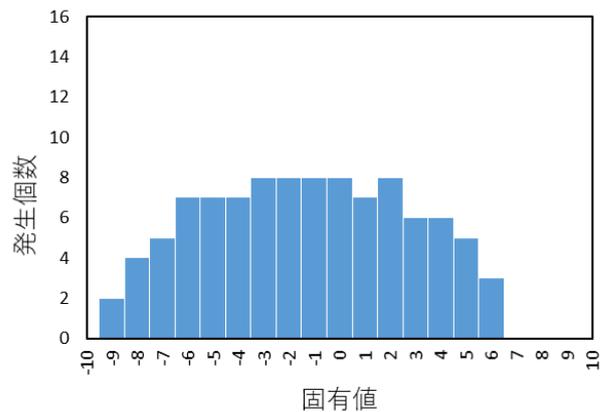


図-4 20%リンク切断時固有値分布

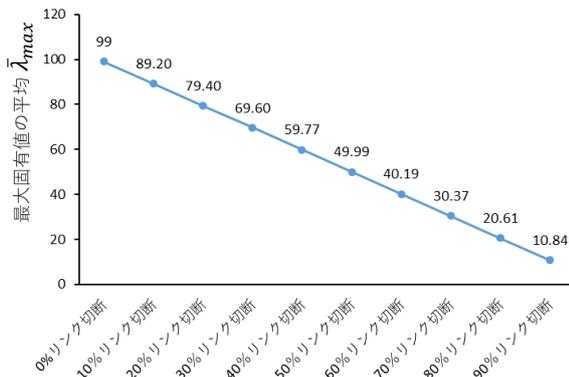


図-1 切断数による最大固有値の変化

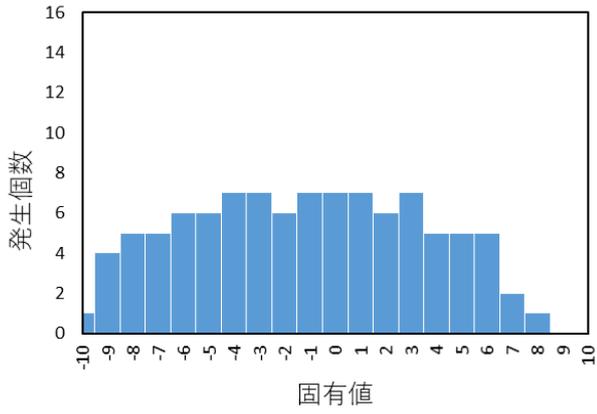


図-5 30%リンク切断時固有値分布

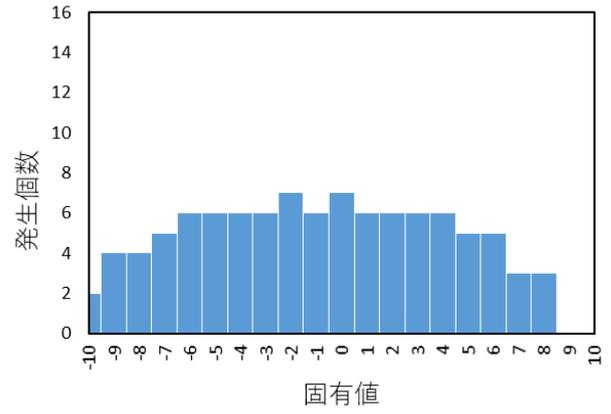


図-8 60%リンク切断時固有値分布

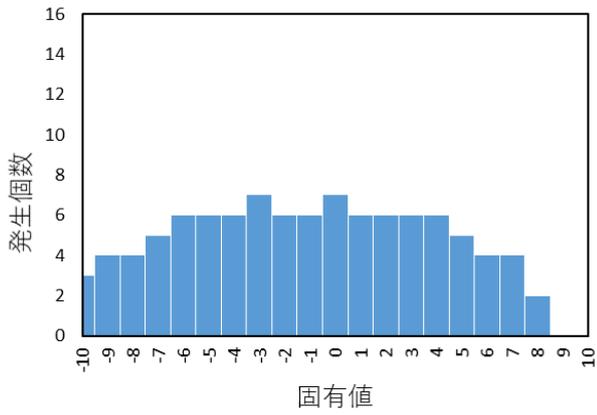


図-6 40%リンク切断時固有値分布

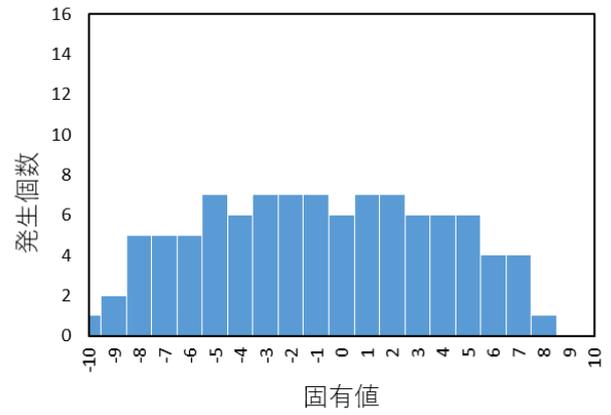


図-9 70%リンク切断時固有値分布

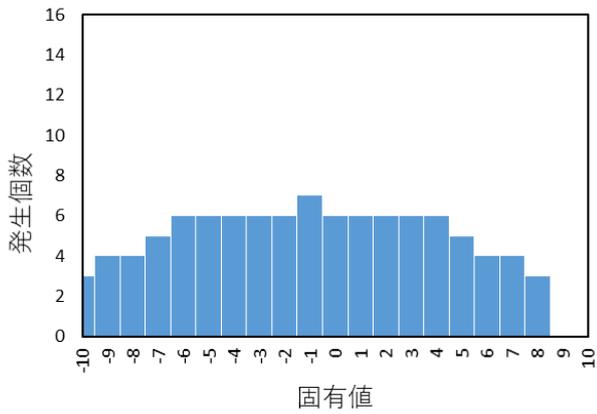


図-7 50%リンク切断時固有値分布

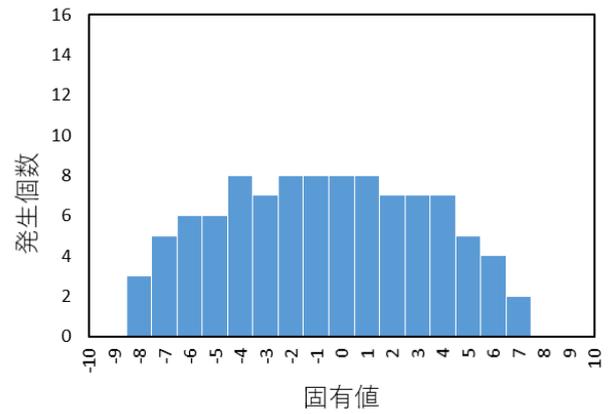


図-10 80%リンク切断時固有値分布

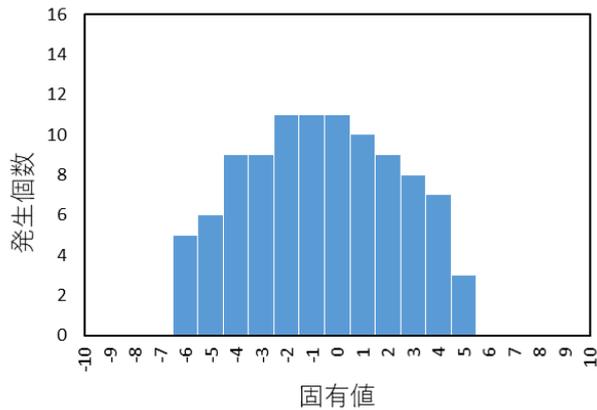


図-11 90%リンク切断時固有値分布

#### 4. まとめと今後の展望

ネットワークの隣接行列の最大固有値、固有値分布を用いた連結性評価の手法の実用性を検討した。この手法は、1リンクが全体に及ぼす影響の度合いではなく、災害により全体に受ける被害を考えた評価である。これらによるとリンクが切断され、全体の連結性が低下していくにつれて何らかの挙動を示すことは自明である。

今後の展望としては、リンク長が変動させた場合やノードに接続するリンク数を変動させた場合など、違った変化を持たせたネットワークに当てはめ、その際には最大固有値の変化の割合や固有値分布にどのような挙動が現れるのか解明する。また、同時に隣接行列から作られるラプラシアン行列の連結性評価との比較を行っていく。隣接行列とラプラシアン行列による評価を結びつけることで、この連結性評価の手法の発展が期待できる。

#### 参考文献

- 1) 小林俊一・中山晶一朗・松井千里・若林桂汰：道路ネットワークのラプラシアン行列による脆弱性解析，土木計画学研究・講演集，Vol.55，CD-ROM、2017。
- 2) 矢久保孝介：複雑ネットワークとその構造，共立出版株式会社，2013
- 3) 渡辺澄夫・永尾太郎・樺島祥介・田中利幸・中島伸一：ランダム行列の数理と科学，森北出版株式会社，2014

(2019.10.4受付)

## ROAD NETWORK CONNECTIVITY ASSESSMENT CONSIDERING DISASTER BY GRAPH THEORY

Masaki TAJIMA, Shoichiro NAKAYAMA Hiromichi YAMAGUCHI and Shun-ichi KOBAYASHI

The road network is one of the infrastructures that play an important role in transporting people and goods. However, Japan is a region where natural disasters such as earthquake disasters, typhoons and heavy rains occur frequently. These natural disasters cause widespread damage, and there is a risk of disruption to multiple roads. Therefore, it is desirable to ensure connectivity as a whole in order to distribute relief supplies and supporters from other areas throughout the damaged area. In addition, it is necessary to evaluate connectivity considering simultaneous and frequent damage in the entire traffic network. In this study, we propose an index of connectivity evaluation considering simultaneous multiple cuts of road network by applying graph theory.