Point-queue モデルを用いた多起点・一終点型の動的交通配分:システム最適と利用者最適

長江 剛志 [1]・付 芸 [2]

[1]正会員 博士 (情報科学) 東北大学准教授 工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-11-814)
E-mail: nagae@tohoku.ac.jp
[2]学生会員 東北大学大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-11-814)
E-mail: fu.yi.t2@dc.tohoku.ac.jp

本研究では，多起点・一終点ネットワークを対象とし，各リンクにおける渋滞待ち行列が point-queue 型モデルで表現される時，動的システム最適 (DSO：*dynamic system optimal*) 配分と動的利用者最適 (DUO：*dynamic user optimal*) 配分との間の隠れた関係を明らかにする．具体的には，vehicle holding が生じない DSO 配分で満たされるべき最適性条件が，“準反射的” な DUO 配分における最適性条件と共通の数学的構造を持つことを明らかにする．

Key Words: 動的交通配分，多起点・一終点，*point queue* モデル

1. はじめに

本研究では，動的交通配分において幅広く用いられる 2 つの配分原則—— システム最適 (DSO: *dynamic system optimal*) 配分と利用者最適 (DUO: *dynamic user optimla*) 配分—-の数理的特性を明らかにする．

DSO 配分モデルについては，多くの既存研究が存在するが，その数理的特性が十分に明らかにされているとは言い難い．Ziliaskopoulos[1] は，交通フローの進展をセル伝搬モデル (CTM: *cell transmission model*)[2),3),4] として記述する枠組の下で，DSO 配分問題を線形計画問題として定式化した．しかし，このモデルでは，前方が空いているにも関わらず車両が停止する，*vehicle holding* と呼ばれる不自然な配分が得られることが知られている．Nie[5] は，CTM を用いた枠組の下で，多起点・一終点ネットワークを対象として，ネットワーク全体の総所要時間を変えないまま, vechicle holding が存在しない (holidng-free な) 配分を求めるアルゴリズムを開発した．[6] は，多起点・一終点ネットワークを対象として，渋滞現象の記述に point-queue, spatial queue および CTM のいずれかを用いる一般的な枠組の下で DSO 配分問題を定式化し，以下の 2 点を明らかにした：(i) DSO 配分において，vehicle holding が存在するいかなる配分も，所要時間を増加させることなく，holding-free な配分に変換できる; (ii) holding-free 条件を緩和した DSO 配分問題は，上記 3 つの渋滞モデルのいずれを用いるかによらず等しい最適解を持ち，その解とは「どのリンクにも渋滞が生じないように起点で holding した配分」に他ならない．これらの研究により，多起点・一終点ネットワークについて holding-free な DSO 配分を求めることが可能にはなったが，その数理的特性，特に，利用者の自由意志によって実現する配分との対応関係については，十分に明らかにされているとは言い難い．

一方，DUO 配分モデルについては，Friesz et al. [7] および[8] 以来，その殆どのモデルが経路変数ベースで定式化されており，それ故，リンク変数ベースで定式化される DSO 配分問題との対応関係を見通しよく分析し得るものではなかった．唯一の例外である[9] は，交通フローを一般的な kinematic wave [10),11] で表現する枠組の下で，リンク変数ベースの DUO 配分モデルとして，以下の 2 つを定式化した:(i) あるノードを時刻 τ に出発した利用者の終点までの最小交通費用を当該時刻 τ におけるリンク所要時間のみを用いて評価する反射的 (reactive)DUO; (ii) 最小交通費用を，実際に利用者が経験する費用を先読みして評価する予測的 (predictive)DUO. しかし，この研究では反射的 DUO 配分に対する解法の開発に主眼がおかれ，他の配分モデルとの関係については，明確には議論されていない．

これに対し，本研究では，まず，多起点・一終点ネットワークにおいて，渋滞現象を point-queue で表す枠組において，DSO 配分および DUO 配分問題を，それぞれ，リンク変数ベースの相補性問題として定式化する．次に，holding-free な DSO 配分で満たされるべき条件が，“準反射的”DUO 配分が満たすべき条件と，共通の (ほぼ等価な) 数学的構造を持つことを明らかにする．

本稿は以下のように構成される．まず，続く §2. で

は，本稿で用いる動的交通配分モデルの枠組を示す．この共通の枠組の下で，§3. および §4. において, DUO 配分および DSO 配分を，それぞれ定式化する．§5. では, holding-free な DSO 配分と準反射的 DUO 配分がそれぞれ満たすべき条件が，全く同じ数学的構造を持つことを明らかにする．最後に, §6. では，まとめと今後の課題を述べる．

2. 動的交通配分モデル

(1) モデルの枠組

ノード集合 $\hat{\mathcal{N}}$ およびリンク集合 $\mathcal{A}$ からなる有向グラフ $\mathcal{G}(\hat{\mathcal{N}}, \mathcal{A})$ を考える．唯一の終点を $s \in \hat{\mathcal{N}}$ とし，終点以外のノード集合を $\mathcal{N} \coloneqq \hat{\mathcal{N}} \setminus \{s\}$ で表す．起点 $i \in \mathcal{N}$ から終点までの経路集合を $\mathcal{K}^i$ で表す．

適当な正の定数 T を用いて分析時間帯を $\mathcal{T} \coloneqq [0, \mathrm{T}]$ とする．時刻 $\tau_i \in \mathcal{T}$ までに起点ノード $i \in \mathcal{N}$ から発生する累積交通需要を所与の関数 $Q_i(\tau_i)$ で表し，時刻 $\tau \in \mathcal{T}$ におけるノード i からの交通需要フローを $q_i(\tau) = \frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}\tau_i}(\tau)$ で表す．

(2) リンク交通量および待ち行列進展条件

任意のリンク $(i, j) \in \mathcal{A}$ について，時刻 $\tau_i \in \mathcal{T}$ までの上流端 i への累積流入交通量を $A_{ij}(\tau_i)$ で表し, 時刻 $\tau_j \in \mathcal{T}$ までの下流端 j からの累積流出交通量を $L_{ij}(\tau_j)$ で表す．各リンクは，いずれも，上流端に自由走行区間をもち，下流端の直前に point-queue 型のボトルネックを持つと仮定する．リンク $(i, j) \in \mathcal{A}$ の自由旅行時間および容量を, それぞれ, c_{ij} および μ_{ij} で表す．ただし，リンク (i, j) がボトルネックを持たない場合は $\mu_{ij} = \infty$ とする．

任意のリンク $(i, j) \in \mathcal{A}$ について，初期時刻 $\tau = 0$ における渋滞待ち行列を所与の定数 $X^0_{ij} \geq 0$ で表す．時刻 $\tau \in \mathcal{T}$ におけるリンク (i, j) の渋滞待ち行列長は，(i) 時刻 τ までにボトルネックに到達した (i.e. 時刻 $\tau - c_{ij}$ までに上流端に流入した) 累積交通量 $A_{ij}(\tau - c_{ij})$ と，(ii) 時刻 τ までに下流端から流出した累積交通量 $D_{ij}(\tau)$ の差:

$$x_{ij}(\tau) = A_{ij}\left(\tau - c_{ij}\right) - L_{ij}(\tau) \tag{1}$$

で表される．ただし，初期時刻 $\tau = 0$ 以前にボトルネックに到達した (i.e. 時刻 $[-c_{ij}, 0)$ における上流端への累積交通量) を

$$A_{ij}(\tau) = X^0_{ij} \qquad \forall t \in [-c_{ij}, 0) \tag{2}$$

とし，初期時点 $\tau = 0$ における累積流出量を $L_{ij}(0) = 0$ とする．

時刻 $\tau \in [-c_{ij}, \mathrm{T}]$ におけるリンク $(i, j) \in \mathcal{A}$ の流入フローおよび流出フローを，それぞれ,

$$\lambda_{ij}(t) = \frac{\mathrm{d}A_{ij}}{\mathrm{d}\tau_i}(t), \qquad \mu_{ij}(t) = \frac{\mathrm{d}L_{ij}}{\mathrm{d}\tau_j}(t)$$

で表す (定義より, 時刻 $\tau < c_{ij}$ においては $\lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) = 0$).

式 (1) より，時刻 $[0, \mathrm{T}]$ におけるボトルネック待ち行列のダイナミクスは以下の式で表される:

$$\frac{\mathrm{d}x_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \lambda_{ij}\left(\tau - c_{ij}\right) - \mu_{ij}(\tau), \qquad x_{ij}(0) = X^0_{ij} \tag{3}$$

(3) フロー保存則，非負制約およびボトルネック容量制約

流入フロー $\lambda_{ij}(\tau)$, 流出フロー $\mu_{ij}(\tau)$ および待ち行列長 $x_{ij}(\tau)$ は，ごく自然な 3 つの物理的制約––保存則，非負制約およびボトルネック容量制約––を満たす必要がある．まず，任意の時刻 $\tau \in \mathcal{T}$ において，終点以外のノード $i \in \mathcal{N}$ では，以下の累積交通量保存則が成立する[1]:

$$\sum_{(n,i)\in\mathcal{A}} L_{ni}(\tau) + Q_i(\tau) = \sum_{(i,m)\in\mathcal{A}} A_{im}(\tau) \tag{4}$$

両辺をノード i の出発/到着時刻 τ で微分すれば，以下のフロー保存則を得る:

$$\sum_{(n,i)\in\mathcal{A}} \mu_{ni}(\tau) + q_i(\tau) = \sum_{(i,m)\in\mathcal{A}} \lambda_{im}(\tau), \quad \forall\tau \in \mathcal{T}, \forall i \in \mathcal{N} \tag{5}$$

次に，各リンクにおける流入/流出フローおよび待ち行列は，以下の非負制約を満足する必要がある：

$$\lambda_{ij}\left(\tau - c_{ij}\right) \geq 0 \quad \forall(\tau - c_{ij}) \in \mathcal{T}, \forall(i, j) \in \mathcal{A}, \tag{6a}$$

$$\mu_{ij}(\tau) \geq 0 \quad \forall\tau \in \mathcal{T}, \forall(i, j) \in \mathcal{A}, \tag{6b}$$

$$x_{ij}(\tau) \geq 0 \quad \forall\tau \in \mathcal{T}, \forall(i, j) \in \mathcal{A} \tag{6c}$$

最後に，各リンクからの流出フローは当該リンクのボトルネック容量 $\bar{\mu}_{ij}$ を超えてはならない:

$$\mu_{ij}(\tau) \leq \bar{\mu}_{ij}, \quad \forall\tau \in \mathcal{T}, \forall(i, j) \in \mathcal{A} \tag{7}$$

以下では，流入フロー，流出フローおよび待ち行列長を以下のようにベクトル表記する:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \{\lambda_{ij}(t)\}, \quad \boldsymbol{\mu}(t) = \{\mu_{ij}(t)\}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \{x_{ij}(t)\}. \tag{8}$$

(4) Nonvehicle holding(NVH) 条件

一般に，上記の物理的制約 (5), (7) および (6) だけでは，*vehicle holding* と呼ばれる非現実的な配分 ––任意のノードで任意の車両を「前方が空いているにも関わらず停止させている」状態–– をもたらし得ることが知られている[1),5),6)]. Shen and Zhang[6)] は，vehicle holding が生じない (NVH: *nonvehcile holding*) 条件を，以下の相

[1] 終点 s に到達した利用者はただちにトリップを終えるため，フロー保存則は必要ない．

補性条件として導入している:

$$\begin{cases} x_{ij}(\tau) > 0 & \rightarrow \mu_{ij}(\tau) = \bar{\mu}_{ij} \\ x_{ij}(\tau) = 0 & \leftarrow \mu_{ij}(\tau) < \bar{\mu}_{ij} \end{cases} \quad \forall \tau \in \mathcal{T}, \forall (i,j) \in \mathcal{A}. \tag{9}$$

NVH 条件はボトルネック容量制約 (7) の必要条件となっている (i.e. NVH 条件 (9) が満たされるならば，ボトルネック制約条件 (7) は必ず満たされる) ことに注意されたい．

3. 動的利用者最適配分モデル

(1) NVH 条件と待ち行列待ち時間の進展条件

NVH 条件 (9) を待ち行列進展条件 (3) に代入すれば，以下を得る:

$$\begin{cases} x_{ij}(\tau) > 0 & \rightarrow \lambda_{ij}\left(\tau - c_{ij}\right) - \frac{\mathrm{d}x_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - \bar{\mu}_{ij} = 0 \\ x_{ij}(\tau) = 0 & \leftarrow \lambda_{ij}\left(\tau - c_{ij}\right) - \frac{\mathrm{d}x_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - \bar{\mu}_{ij} < 0 \end{cases}$$

$$\forall \tau \in \mathcal{T}, \forall (i,j) \in \mathcal{A}. \tag{10}$$

リンク (i,j) のボトルネックに時刻 $\tau \in \mathcal{T}$ に到着した利用者の待ち行列待ち時間を

$$w_{ij}(\tau) = \frac{x_{ij}(\tau)}{\bar{\mu}_{ij}} \tag{11}$$

で表せば，待ち行列進展条件 (10) は，以下の $w_{ij}(\tau)$ の進展条件に帰着させられる:

$$\begin{cases} w_{ij}(\tau) > 0 & \rightarrow \lambda_{ij}\left(\tau - c_{ij}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}w_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + 1\right)\bar{\mu}_{ij} = 0 \\ w_{ij}(\tau) = 0 & \leftarrow \lambda_{ij}\left(\tau - c_{ij}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}w_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + 1\right)\bar{\mu}_{ij} < 0 \end{cases}$$

$$\forall \tau \in \mathcal{T}, \forall (i,j) \in \mathcal{A}. \tag{12}$$

(2) 最適経路選択条件

§2. で述べた枠組の下で，動的利用者最適 (DUO: *dynamic user optimal*) 配分は，以下のように定義される:

> 時刻 $\hat{\tau} \in \mathcal{T}$ に起点 $i \in \mathcal{N}$ を出発する各利用者が，いずれも，時点 $\hat{\tau}$ で評価される終点までの経路費用が最小となる経路 $k \in \mathcal{K}^i$ を選択している状態 (Ran et al.[12]).

Kuwahara and Akamatsu[13] は，この最小所要時間の評価方法および配分原則として，反射的 (reactive) と予測的 (predictive) の 2 つを提案している．これを説明するために，以下の変数を導入しよう：時刻 $\hat{\tau} \in \mathcal{T}$ にノード i を出発してリンク (i,j) を利用する短時間あたりの車両台数 (流入交通量) を $\lambda_{ij}(\hat{\tau}) = \frac{\mathrm{d}A_{ij}(\hat{\tau})}{\mathrm{d}\hat{\tau}}$ で表し，それらの利用者の (ノード j までの) 所要時間を $T_{ij}(\hat{\tau}) = c_{ij} + w_{ij}(\hat{\tau} + c_{ij}) = c_{ij} + \frac{x_{ij}(\hat{\tau}+c_{ij})}{\mu_{ij}}$ で表す．時刻 $\hat{\tau} \in \mathcal{T}$ に起点 $i \in \mathcal{N}$ を出発する利用者の終点までの最小所要時間を $\pi_i(\hat{\tau})$ とする．

このとき, Kuwahara and Akamatsu[13] の配分原則は，以下のように書き下せる：

- 反射的 DUO (RDUO: *reactive* DUO):

$$\begin{cases} \lambda_{ij}(\hat{\tau}) > 0 & \rightarrow \pi_i(\hat{\tau}) = \pi_j(\hat{\tau}) + T_{ij}(\hat{\tau}) \\ \lambda_{ij}(\hat{\tau}) = 0 & \leftarrow \pi_i(\hat{\tau}) < \pi_j(\hat{\tau}) + T_{ij}(\hat{\tau}) \end{cases} \tag{13}$$

  この配分原則では，ノード i を時刻 $\hat{\tau}$ に出発する利用者の終点までの最小所要時間 $\pi_i(\hat{\tau})$ を，当該時刻 $\hat{\tau}$ における各リンクの所要時間のみから評価する．そのため，利用者が経験する旅行時間と $\pi_i(\hat{\tau})$ が一致する保証はないことには，注意が必要である．例えば，時刻 $\hat{\tau}$ にリンク (i,j) に流入した利用者はノード j に時刻 $T_{ij}(\hat{\tau})$ に到着するが，その時点でのノード j から終点までの最小所要時間 $\pi_j\left(\hat{\tau} + T_{ij}(\hat{\tau})\right)$ は，ノード i を出発した時点で評価した $\pi_j(\hat{\tau})$ とは必ずしも一致しない．

- 予測的 DUO (PDUO: *predictive* DUO):

$$\begin{cases} \lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) > 0 & \rightarrow \pi_i(\hat{\tau}) = \pi_j\left(\hat{\tau} + T_{ij}(\hat{\tau})\right) + T_{ij}(\hat{\tau}) \\ \lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) = 0 & \leftarrow \pi_i(\hat{\tau}) < \pi_j\left(\hat{\tau} + T_{ij}(\hat{\tau})\right) + T_{ij}(\hat{\tau}) \end{cases} \tag{14}$$

  この配分原則では，ノード i を時刻 $\hat{\tau}$ に出発する利用者の終点までの最小所要時間 $\pi_i(\hat{\tau})$ として，当該利用者が実際に経験する所要時間を完全に先読みして評価する．そのため，上述のような評価時点での最小所要時間と実際に経験する最小所要時間の間に乖離は生じない．このことから，予測的 DUO は，動的利用者均衡 (DUE: *dynamic user equilibrium*) 配分と等価である．

本研究では，これら 2 つの中間的な配分原則として，下記の配分原則を導入する．

- 準反射的 DUO (SRDUO: *semi-reactive* DUO):

$$\begin{cases} \lambda_{ij}(\tau) > 0 & \rightarrow \pi_i(\hat{\tau}) = \pi_j(\hat{\tau} + c_{ij}) + T_{ij}(\hat{\tau}) \\ \lambda_{ij}(\tau) = 0 & \leftarrow \pi_i(\hat{\tau}) < \pi_j(\hat{\tau} + c_{ij}) + T_{ij}(\hat{\tau}) \end{cases} \tag{15}$$

  この配分原則では，ノード i を時刻 $\hat{\tau}$ に出発する利用者の終点までの最小所要時間 $\pi_i(\tau)$ について，自由走行時間分だけ先読みして評価する．

上述の配分原則は，いずれも，基準とする時刻を，リンク (i,j) の上流端に流入する時刻 $\hat{\tau}$ ではなく, リンク (i,j) のボトルネックに到着する時刻 $\tau = \hat{\tau} + c_{ij}$ に置き換えても等価である．このとき, 準反射的 DUO の最短経路選択条件は,

$$\begin{cases} \lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) > 0 & \rightarrow \pi_i(\tau - c_{ij}) - \pi_j(\tau) - c_{ij} - w_{ij}(\tau) = 0 \\ \lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) = 0 & \leftarrow \pi_i(\tau - c_{ij}) - \pi_j(\tau) - c_{ij} - w_{ij}(\tau) < 0 \end{cases} \tag{16}$$

と書き下せる．

(3) 準反射的 DUO 配分モデル

従って，準反射的 DUO 配分モデルは，以下の混合相補性問題として定式化できる:

[SR-DUO]

最適経路選択条件：

$$\begin{cases} \lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) > 0 \quad \rightarrow \\ \qquad \pi_i(\tau - c_{ij}) - \pi_j(\tau) - c_{ij} - w_{ij}(\tau) = 0 \\ \lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) = 0 \quad \leftarrow \\ \qquad \pi_i(\tau - c_{ij}) - \pi_j(\tau) - c_{ij} - w_{ij}(\tau) < 0 \end{cases} \tag{17a}$$

待ち行列待ち時間進展条件：

$$\begin{cases} w_{ij}(\tau) > 0 & \rightarrow \lambda_{ij}\left(\tau - c_{ij}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}w_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + 1\right)\bar{\mu}_{ij} = 0 \\ w_{ij}(\tau) = 0 & \leftarrow \lambda_{ij}\left(\tau - c_{ij}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}w_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + 1\right)\bar{\mu}_{ij} < 0 \end{cases} \tag{17b}$$

フロー保存則：

$$\sum_{(n,i)\in\mathcal{A}} \left\{ \lambda_{ni}\left(\tau - c_{ij}\right) + \frac{\mathrm{d}w_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\bar{\mu}_{ij} \right\} + q_i(\tau) = \sum_{(i,m)\in\mathcal{A}} \lambda_{im}(\tau) \tag{17c}$$

4. 動的システム最適配分モデル

(1) 定式化

動的システム最適 (DSO: *dynamic system optimal*) 配分モデルは，§2. で述べた枠組の下で，利用者の総旅行時間 (i.e. 自由走行時間および渋滞待ち時間の和) を最小化するようなフローパターン $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x})$ を求める問題として定式化される:

[DSO]

$$\min_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{x}} Z(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}) \coloneqq \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} \int_0^{\mathrm{T}} \left\{ \lambda_{ij}\left(\tau - c_{ij}\right) c_{ij} + x_{ij}(\tau) \right\} \mathrm{d}\tau \tag{18}$$

s.t. (3), (5), (6), (7) and (9).

以下では，この DSO 配分問題が [SR-DUO] と等価となることを示す．そのために，まず，(2) で [DSO] から NVH 条件 (9) を取り除いた (i.e. vehicle-holding を許容した) DSO モデル (以下では，VH 許容 DSO 配分問題 [VH-DSO] と呼ぶ) が線形計画問題となることを利用し，その最適性条件を混合相補性問題として記述する．次に，こうして得られた混合相補性条件が, NVH 条件が満足される下では，[SR-DUO] と等価となることを明らかにする．

(2) VH 許容 DSO 配分問題の最適性条件

VH 許容 DSO 配分問題 [VH-DSO] は, 明らかに, 線形計画問題[1)]である．いま，待ち行列進展条件 (3), フロー保存則 (5) およびボトルネック容量制約 (7) についての双対変数を，それぞれ, $\{\phi_{ij}(\tau)\}$, $\{\psi_i(\tau)\}$ および $\{\eta_{ij}(\tau)\}$ とすれば，[VH-DSO] の最適性条件は，以下のように書き下せる:

[VH-DSO-Opt]

待ち行列進展条件:

$$\mu_{ij}(\tau) = \lambda_{ij}\left(\tau - c_{ij}\right) - \frac{\mathrm{d}x_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \tag{19a}$$

フロー保存条件:

$$\sum_{n\in I_i} \mu_{ni}(\tau) + q_i(\tau) = \sum_{m\in O_i} \lambda_{im}(\tau) \tag{19b}$$

ボトルネック容量清算条件:

$$\begin{cases} \eta_{ij}(\tau) > 0 & \rightarrow \mu_{ij}(\tau) = \bar{\mu}_{ij} \\ \eta_{ij}(\tau) = 0 & \leftarrow \mu_{ij}(\tau) < \bar{\mu}_{ij} \end{cases} \tag{19c}$$

最適流入フロー条件:

$$\begin{cases} \lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) > 0 & \rightarrow -\phi_{ij}(\tau) + \psi_i(\tau - c_{ij}) - c_{ij} = 0 \\ \lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) = 0 & \leftarrow -\phi_{ij}(\tau) + \psi_i(\tau - c_{ij}) - c_{ij} < 0 \end{cases} \tag{19d}$$

最適流出フロー条件:

$$\begin{cases} \mu_{ij}(\tau) > 0 & \rightarrow \phi_{ij}(\tau) - \psi_j(\tau) - \eta_{ij}(\tau) = 0 \\ \mu_{ij}(\tau) = 0 & \leftarrow \phi_{ij}(\tau) - \psi_j(\tau) - \eta_{ij}(\tau) < 0 \end{cases} \tag{19e}$$

最適待ち行列条件:

$$\begin{cases} x_{ij}(\tau) > 0 & \rightarrow -\frac{\mathrm{d}\phi_{ij}}{\mathrm{d}\tau}(\tau) - 1 = 0 \\ x_{ij}(\tau) = 0 & \leftarrow -\frac{\mathrm{d}\phi_{ij}}{\mathrm{d}\tau}(\tau) - 1 < 0 \end{cases} \tag{19f}$$

5. システム配分と利用者最適配分の等価性

本節では，NVH-DSO における双対変数 $\eta_{ij}(\tau)$ および $\psi_i(\tau)$ が DUO における待ち行列待ち時間 $w_{ij}(\tau)$ および最小所要時間 $\pi_i(\tau)$ に一致するならば，両者が等価となることを示す．

(1) NVH 条件の下での DSO 最適性条件

VH 許容 DSO 配分問題の最適性条件 (19) は，NVH 条件 (9) が満たされる下では，[SR-DUO] と等価となることを示そう．

a) 最適流入/流出フロー条件

VH 許容 DSO 配分問題の最適流入/流出フロー条件 (19d) および (19e) が，NVH 条件 (9) が満たされる時に DUO 配分問題の最適経路選択条件 (17a) と共通の数学的構造を持つことを示す．

まず，$\psi_i(\tau - c_{ij}), \psi_j(\tau)$ および $\eta_{ij}(\tau)$ の間で下記の不等式が成り立つ:

$$\psi_i(\tau - c_{ij}) - c_{ij} \leq \phi_{ij}(\tau) \tag{20a}$$

$$\phi_{ij}(\tau) \leq \psi_j(\tau) + \eta_{ij}(\tau) \tag{20b}$$

ここで，式 (20a) および (20b) で等号が成立するための十分条件は, それぞれ, $\lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) > 0$ および $\mu_{ij}(\tau) > 0$ であることに注意されたい．

次に，$\lambda_{ij}(\tau - c_{ij})$ と $\mu_{ij}(\tau)$ の間に以下の命題が成立する:

命題 5..1. 時刻 τ にリンク (i, j) のボトルネックに到着するような正の流入フローが存在する (i.e. $\lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) > 0$) とき，NVH 条件 (9) が満たされるならば，時刻 τ における当該ボトルネックからの流出フローは必ず正である ($\mu_{ij}(\tau) > 0$)．同様に，$\mu_{ij}(\tau) = 0$ ならば, $\lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) = 0$ である．

Proof. $\lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) > 0$ である時に, $\mu_{ij}(\tau) = 0$ となるケースがあると仮定して矛盾を導く．時刻 τ にリンク (i, j) 上に正の待ち行列 $x_{ij}(\tau) > 0$ が存在する時，NVH 条件 (9) より $\mu_{ij}(\tau) = \bar{\mu}_{ij} > 0$ となるため矛盾．一方, $x_{ij}(\tau) = 0$ の時, 待ち行列進展条件 (3) より, $\mu_{ij}(\tau) = 0$ を満たすためには $\frac{\mathrm{d}x_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = -\lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) < 0$ となる必要があり，待ち行列長の非負制約 (6c) と矛盾. 従って, $\lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) > 0 \rightarrow \mu_{ij}(\tau) > 0$ および，その対偶である $\mu_{ij}(\tau) = 0 \rightarrow \lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) = 0$ はいずれも真である． □

命題 5..1 より, $\lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) > 0$ ならば式 (20a) および (20b) のいずれも等号が成立することから，

$$\lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) > 0 \rightarrow \psi_i(\tau - c_{ij}) = \psi_j(\tau) + \eta_{ij}(\tau) + c_{ij} \tag{21}$$

が満たされる．一方，式 (20a) もしくは (20b) のいずれか一方でも不等号が成立するならば, $\lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) = 0$ となるから，

$$\lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) = 0 \leftarrow \psi_i(\tau - c_{ij}) < \psi_j(\tau) + \eta_{ij}(\tau) + c_{ij} \tag{22}$$

である．結局，NVH 条件の下では，最適流入/流出フロー条件は，以下の $\lambda_{ij}(\tau - c_{ij})$ のみに関する相補性条件に帰着する:

$$\begin{cases} \lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) > 0 & \rightarrow \psi_i(\tau - c_{ij}) - \psi_j(\tau) - c_{ij} - \eta_{ij}(\tau) = 0 \\ \lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) = 0 & \leftarrow \psi_i(\tau - c_{ij}) - \psi_j(\tau) - c_{ij} - \eta_{ij}(\tau) < 0 \end{cases} \tag{23}$$

式 (23) は，DUO の最適経路選択条件 (17a) と全く同じ構造を持つことに注意されたい．

b) 待ち行列進展条件+ボトルネック容量清算条件

VH 許容 DSO 配分問題の待ち行列進展条件 (19a) をボトルネック容量清算条件 (19c) に代入すれば，以下を得る:

$$\begin{cases} \eta_{ij}(\tau) > 0 & \rightarrow \lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) - \frac{\mathrm{d}x_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - \bar{\mu}_{ij} = 0 \\ \eta_{ij}(\tau) = 0 & \leftarrow \lambda_{ij}(\tau - c_{ij}) - \frac{\mathrm{d}x_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} - \bar{\mu}_{ij} < 0 \end{cases} \tag{24}$$

ここで，$\eta_{ij}(\tau) = x_{ij}(\tau)/\bar{\mu}_{ij}$ が成り立つならば，(24) は DUO の待ち行列待ち時間進展条件 (17b) と全く同じ構造を持つ．

6. おわりに

本研究では，多起点一終点ネットワークにおいて, 渋滞現象を point-queue モデルで表現する動的交通配分について，vehicle-holding が存在しない DSO 配分と準反射的 DUO 配分とが数学的に共通の構造を持つことを明らかにした．特に，準反射的 DUO 配分における待ち行列待ち時間 $w_{ij}(\tau)$ および終点までの最小所要時間 $\tau_i(\tau)$ が，それぞれ，NVH-DSO 配分の双対変数 $\eta_{ij}(\tau)$ および $\psi_i(\tau)$ に一致する時には，両者が完全に等価となることを明らかにした．このことは，例えば，津波や洪水などからの避難の際，避難主体に対して，各リンクの自由走行時間分だけ先読みした所要時間の情報を与えることにより，効率的な避難が可能となり得ることを示唆している．

今後の課題としては，数値計算による検証，一起点・多終点や多起点・多終点ネットワークへの拡張が挙げられる．また，本研究では取り扱っていないが，動的交通配分の極めて重要なクラスである動的利用者均衡 (DUE: *dynamic user equilibrium*) 配分[14),8),7),15),16)] への応用もまた，挑戦的な課題である．

参考文献

1) Ziliaskopoulos, A. K.: A linear programming model for the single destination system optimum dynamic traffic assignment problem, *Transportation Science*, Vol. 34, pp. 1–12, 2000.
2) Daganzo, C. F.: The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 28, No. 4, pp. 269–287, 1994.
3) Daganzo, C. F.: The cell transmission model, part II: Network traffic, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 29, No. 2, pp. 79–93, 1995.
4) Daganzo, C. F.: In traffic flow, cellular automata=kinematic waves, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 40, No. 5, pp. 396–403, 2006.
5) Nie, Y. M.: A cell-based Merchant-Nemhauser model for the system optimum dynamic traffic assignment problem, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 45, No. 2, pp. 329–342, 2011.
6) Shen, W. and Zhang, H. M.: System optimal dynamic traffic assignment: Properties and solution procedures in the case of a many-to-one network, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 65, pp. 1–17, 2014.
7) Friesz, T. L., Bernstein, D., Smith, T. E., Tobin, R. L. and Wie, B. W.: A Variational Inequality Formulation of the Dynamic Network User Equilibrium Problem, *Operations Research*, Vol. 41, No. 1, pp. 179–191, 1993.
8) Smith, M. J.: A new dynamic traffic model and the existence and calculation of dynamic user equilibria on con-

gested capacity-constrained road networks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 27, No. 1, pp. 49–63, 1993.

9) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic user optimal assignment with physical queues for a many-to-many OD pattern, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 35, No. 5, pp. 461–479, 2001.

10) Lighthill, M. J. and Whitham, G. B.: On Kinematic Waves. I. Flood Movement in Long Rivers, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 229, No. 1178, pp. 281 LP – 316, 1955.

11) Richards, P. I.: Shock Waves on the Highway, *Operations Research*, Vol. 4, No. 1, pp. 42–51, 1956.

12) Ran, B., Boyce, D. E. and LeBlanc, L. J.: A New Class of Instantaneous Dynamic User-Optimal Traffic Assignment Models, *Operations Research*, Vol. 41, No. 1, pp. 192–202, 1993.

13) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Decomposition of the reactive dynamic assignments with queues for a many-to-many origin-destination pattern, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 31, No. 1, pp. 1–10, 1997.

14) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic Equilibrium Assignment with Queues for a One-to-Many OD Pattern, *Transportation and Traffic Theory (the 12th ISTTT)*, Vol. 12, pp. 185–204, 1993.

15) Akamatsu, T.: A dynamic traffic equilibrium assignment paradox, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 34, No. 6, pp. 515–531, 2000.

16) Akamatsu, T.: An Efficient Algorithm for Dynamic Traffic Equilibrium Assignment with Queues, 2001.

(平成元年 10 月 3 日 受付)

A DYNAMIC TRAFFIC ASSIGNMENT ON A MANY-TO-ONE NETWORK: SYSTEM OPTIMAL V.S. USER OPTIMAL

Takeshi NAGAE and Yi FU