

# 環状ネットワークにおける 動的システム最適配分

酒井 高良<sup>1</sup>・赤松 隆<sup>2</sup>

<sup>1</sup>学生会員 東北大学 大学院情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: takara.sakai.t1@dc.tohoku.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 東北大学教授 大学院情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

動的システム最適 (DSO : Dynamic System Optimal) 配分は, 利用者の総交通費用を最小化するフローパターンを与えるという意味でベンチマーク状態となるだけでなく, 渋滞を抑制するための最適な動的混雑料金を導く基礎となる概念である. 実際, 一部の最新研究では簡単な構造のネットワーク (単一起/終点) を対象に, DSO パターンから最適な動的混雑料金を導く方策が理論的に示されている. これに対し, 本研究では環状ネットワーク (多起点多終点) を対象とした DSO 配分の理論的特性を明らかにすることを目的とする. 具体的には, 環状ネットワークにおける DSO 配分問題を線形計画問題として記述し, ネットワークの対称性を活かした効率解法およびその解パターンの特性を示す. さらに, それら DSO パターンと動的利用者均衡 (DUE : Dynamic User Equilibrium) 配分との対応関係を明らかにし, 動的混雑料金制度をはじめとする交通流制御戦略について整理する.

**Key Words:** 都市高速道路, 動的システム最適配分, ランプ流入制御, 環状ネットワーク

## 1. はじめに

### (1) 背景

都市高速道路網における渋滞は解決すべき問題である. この問題に対して, 動的ランプ流入制御手法や動的混雑料金制度などの施策<sup>1)</sup> が数多く提案・実装されてきた. これらの渋滞抑制手法の基礎となる概念として, 利用者の総交通費用を最小化するフローパターンを与える動的システム最適 (DSO : Dynamic System Optimal) 配分<sup>1</sup> がある. 多くの既存研究では, この DSO を望ましい状態とし, それを達成するような制御戦略の構築というフレームワークを採用している. このようなフレームワークの制御問題は, 最終的に解くべき問題が線形計画問題<sup>2) 3) 4)</sup> となるため, 問題の数理的性質の良さから完成度の高い制御手法として評価されてきた. しかしながら, 制御戦略構築の基礎となる DSO の理論的性質に関する知見がコリドーネットワークに限定されているため, 多くの提案制御手法もコリドーネットワークのみを対象としたものとなっている<sup>2</sup>. 複雑な構

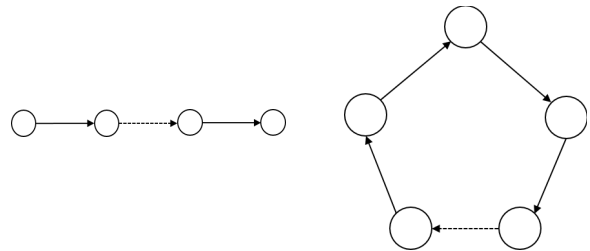


図-1 コリドーネットワーク 図-2 環状ネットワーク

造を持つ都市高速道路網において制御を有効に作用させるためには, ネットワーク構造をより拡張・一般化した議論を進める必要がある.

本研究では, このような背景から, 多くの都市高速道路網において共通の環状構造に着目し, 環状ネットワークにおける DSO 理論を整理することを試みる. 具体的には, 図-2 に示すようなネットワーク構造を想定している.

ここで, 環状ネットワークに着目する理由, 意義について簡単に述べる. まず第一に, 既存研究における知見は, コリドーネットワークにおける Many-to-One OD パターンに限定されている. コリドーネットワークの一段階の一般化として, その始点・終点を繋げた環状ネットワークを採用することは妥当だと言える. また, 環状ネットワーク構造は, 世界中の都市高速道路網

<sup>1</sup> 本研究では, ネットワーク上のすべてのリンクで交通量が容量以下 (渋滞が発生しない) であり, かつ総交通費用が最小化された状態を DSO と定義する. この他に, リンク上での渋滞を許容した DSO という定義も存在するが, 本研究では主に扱わない.

<sup>2</sup> より一般的なネットワークへの拡張を試みた研究<sup>5) 6) 7)</sup> は存在するが, OD 選択率を与件としたり, 時間に依らず一定の JCT における分岐率を用いている点で, 経路選択行動を内生化できていない.

において共通であることも、応用を踏まえた点で大きな利点となる。さらに、都市高速道路網を対象に交通現象解析を行った研究<sup>8)</sup>では、環状線内に渋滞が発生すると、ネットワーク全体に渋滞が波及しやすくなり、大きな悪影響を与えることが示唆されている。そのため、ネットワーク全体のボトルネックとして、環状線の流動性を優先的に高める施策の重要性も指摘<sup>9)</sup>されている。

## (2) 目的

以上より、本研究では第一に、環状ネットワークにおける DSO 配分の理論的特性を整理することを目的とする。さらに第二の目的を、それら理論的特性を踏まえた動的交通流制御の最適戦略を示すこととする。

具体的には、環状ネットワークにおける DSO 配分問題を線形計画問題として記述し、コリドーネットワークにおける DSO 配分問題のとの関係性を示す。次に、既存研究で示されているコリドーネットワークにおける DSO パターンを適切に重ね合わせることで、環状ネットワークにおける DSO パターンが実現することを明らかにする。最後に、環状ネットワークにおける DSO と DUE の対応関係を明らかにし、動的交通流制御の最適戦略を示す。

## (3) 本稿の構成

本稿の構成を以下に示す。続く 2 章において、記号の定義および DSO の基本事項について整理する。3 章において、環状ネットワークにおける DSO 解析の基礎となるコリドーネットワークにおける DSO パターンについて既存研究 Osawa et al.<sup>10)</sup> をもとに整理する。その後、4 章において環状ネットワークにおける DSO 配分について扱う。5 章にて環状ネットワークにおける動的交通流制御手法について整理する。最後に 6 章にて本研究のまとめを述べる。

## 2. モデルの状況設定

本研究で解析対象とするネットワーク構造は、コリドーネットワーク(図-1)および環状ネットワーク(図-2)である。これは、本研究の目的であるコリドーネットワークにおける DSO が、環状ネットワークにおける DSO の解析の基礎となっているためである(詳細は後述)。両者は共に、経路選択の存在しないネットワークであるため、OD フローベース変数で配分問題を定式化することができ、最終的に到着時刻選択 DSO 配分問題に帰着する。これらのことを踏まえて、本章では、OD フロー変数で動的なネットワークフローが満足すべき諸条件を整理する。

表-1 記号の定義一覧

記号	定義
$\mathcal{N}$	ノード集合
$\mathcal{L}$	リンク集合
$rs$	OD ペア
$\Omega$	OD 集合
$\mathcal{L}^{rs}$	OD $rs$ が通過するリンク集合
$\mu_i$	リンク $i$ の容量
$d_i$	リンク $ij$ の自由走行時間
$c_i$	ノード $ij$ 間の自由走行時間
$\Omega^{rs}$	リンク $ij$ を通行する OD 集合
$Q^{rs}$	OD $rs$ の配分時間帯における交通量
$q^{rs}(t)$	時刻 $t$ に終点 $s$ に到着する OD $rs$ 交通量
$s(t)$	スケジュールコスト関数

### (1) 記号の定義

本稿で扱うモデルは、方向付きリンクの集合  $\mathcal{L}$ 、ノードの集合  $\mathcal{N}$ 、および起点・終点ペア (OD) ペアの集合  $\Omega$  から構成される交通ネットワーク上で定義される。ネットワーク上のリンク数とノード数をそれぞれ  $L, N$  とすると、コリドーネットワークの場合  $L = N + 1$ 、環状ネットワークの場合  $L = N$  という関係が成り立つ(図-1, 図-2 参照)。一般的な交通ネットワークの表示法としては、ノード  $i$  に対しリンク  $ij$  と記号を定義することが多いが、本稿では解析対象とするネットワークの性質より、ノード  $i$  の唯一流出リンクをリンク  $i$  と表示する。また、各リンク  $i$  には、ボトルネックが存在することとし、その容量を  $\mu_i$  とする。さらにリンク  $i$  のリンク自由走行時間を  $d_i$  と表す。

本研究で対象とするネットワークは経路選択が存在しないため、ある OD ペア  $rs$  の通過リンク集合  $\mathcal{L}^{rs}$  は、あらかじめ把握可能である。同様に、あるリンク  $i$  を通過する OD ペア集合  $\Omega_i$  も事前に把握可能である。また、経路選択が存在しないため、ノード間の自由走行時間も通過リンクの総和として簡単に算出することが可能である。ノード  $r-s$  間の自由走行時間は、以下のように定義できる：

$$c_{rs} = \sum_{i \in \mathcal{L}^{rs}} d_i \quad \forall rs \in \Omega \quad (1)$$

OD ペア  $rs$  の交通需要を  $Q^{rs}$  とし、時刻  $t$  に目的地  $s$  に到着する OD 交通流率を  $q^{rs}(t)$  とする。すべての利用者は、目的地希望到着時刻  $t^*$  を保持しており、実際の到着時刻  $t$  によってスケジュールコスト関数  $s(t)$  から定まるスケジュールコストを被る。ここで、スケジュールコスト関数  $s(t)$  は  $s(t^*) = 0$  を満たす下に広義凸な関数とする。本研究では、希望到着時刻およびスケジュールコスト関数の形状は、OD ペアによらず全

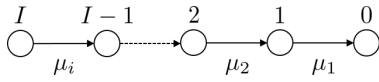


図-3 コリドーネットワーク (Many-to-One)

利用者で同一のものとする。また、明瞭に議論を進めるため、このスケジュールコスト関数  $s(t)$  に関連して、新たに記号  $t^-, t^+, \bar{s}$  を定義する。任意の時間幅  $T > 0$  に対して、 $t^-(T)$  は  $s(t) = s(t+T)$ ,  $t \leq t^*$  を満たす唯一の解を表す。さらに、この  $t^-$  を用いて  $t^+ \equiv t^- + T$ ,  $\bar{s}(T) \equiv s(t^-(T)) = s(t^+(T))$  を定義する。ここまでで、定義した主要な記号の一覧を表-1 に示す。

### (2) 動的な OD フローが満足すべき条件

本研究では、本線上で渋滞 (待ち行列) の発生しない容量制約付きの DSO 配分を扱う。これは、OD 交通量保存則、各リンクの容量制約、交通量の非負制約のもとでの総スケジュールコスト最小化問題となる。具体的に、目的関数および各制約条件について整理する。

■ 総スケジュールコスト： 配分対象時間帯を  $[0, T]$  とすれば、総スケジュールコストは、以下により定まる：

$$S \equiv \sum_{rs \in \Omega} \int_{\mathcal{T}} s(t) q^{rs}(t) dt \quad (2)$$

■ OD 交通量の保存則： OD ペアごとに、時々刻々の OD フローの総和は配分時間帯全体で保存される：

$$\int_{\mathcal{T}} q^{rs}(t) dt = Q^{rs} \quad \forall rs \in \Omega \quad (3)$$

■ リンク容量制約： 各リンクにおいて、いかなる時間帯も、通行フローが容量以下である：

$$\sum_{rs \in \Omega_i} q^{rs}(t + c_i) \leq \mu_i \quad \forall i \in \mathcal{L}, \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (4)$$

ここで、終点が異なるフローは終点間の自由走行時間分だけ、時間遅れを考慮してフローを足し合わせる必要がある。

■ OD 交通量の非負制約： 決定変数となる時々刻々の OD フローは非負である：

$$q^{rs}(t) \geq 0 \quad \forall rs \in \Omega, \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (5)$$

## 3. コリドーネットワーク

本章では、環状ネットワークにおける DSO 配分問題の理論解析の基礎となるコリドーネットワークにおける DSO パターンの導出法<sup>10)</sup> について示す。

### (1) コリドーネットワークにおける到着時刻選択 DSO

対象とするネットワーク構造を図-3 に示す。唯一終点ノード 0 および起点ノード  $i \in \mathcal{I} \equiv \{1, \dots, I\}$  から構成されるネットワークであり、すべてのリンクには容

量  $\mu_i$  のボトルネックが存在している。起点を  $i$ 、終点を 0 とする OD ペアの需要を  $Q^i$  と表現する。また、終点 0 に時刻  $t$  に到着する OD 交通流率を  $q^i(t)$  とする。この変数を用いて、配分時間帯集合を  $\mathcal{T}$  とすると、DSO を達成しうるフローパターンは以下の最適化問題 [Crr-P] の解として求まる：

### [Crr-P]

$$\min_{q^{rs}(t)} \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\mathcal{T}} s(t) q_i(t) dt \quad (6)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{m \geq i} q_m(t) \leq \mu_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (7)$$

$$\int_{\mathcal{T}} q_i(t) dt = Q_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (8)$$

$$q_i(t) \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (9)$$

[Crr-P] の一次の最適性条件を以下に示す：

### [Crr-KKT]

$$\begin{cases} -\rho^i + s(t) + \sum_{m \leq i} p_m(t) \geq 0 & \text{if } q^i(t) = 0 \\ -\rho^i + s(t) + \sum_{m \leq i} p_m(t) = 0 & \text{if } q^i(t) > 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \mu_i - \sum_{m \leq i} q^m(t) = 0 & \text{if } p_i(t) > 0 \\ \mu_i - \sum_{m \leq i} q^m(t) \geq 0 & \text{if } p_i(t) = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (11)$$

$$\int_{\mathcal{T}} q^i(t) dt = Q^i \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (12)$$

ここで  $\rho^i$  および  $p_i(t)$  は、それぞれ OD 需要保存則、リンク容量制約に対応する双対変数である。これらの双対変数は、均衡コストおよびボトルネック通行権価格<sup>11)12)</sup> と解釈でき、交通流制御戦略の指針とすることが可能である。この詳細については、5 章において環状ネットワークと併せて議論する。

### (2) DSO パターンの導出

本節では、[Crr-P] の解析解 (DSO パターン) 導出の手続きについて述べる。まず、議論を明瞭に進めるために False Bottleneck の概念を導入する。False Bottleneck とは、いかなる時間帯においても容量以下のフローしか流れず、実質的に発現することのないボトルネックのことである。この False Bottleneck は、OD 需要およびボトルネック容量の関係により事前に特定することが可能である。具体的には、需要と容量の関係を表すパラメータ  $D_i = \sum_{m \geq i} Q^m / \mu_i$  を各ボトルネックに対し定義する。この  $D_i$  を用いてあるボトルネックが、“False Bottleneck” であることは以下のように定義される。

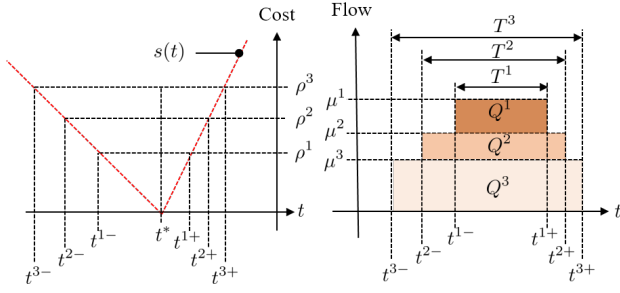


図-4 コリドーネットワークにおける DSO パターン

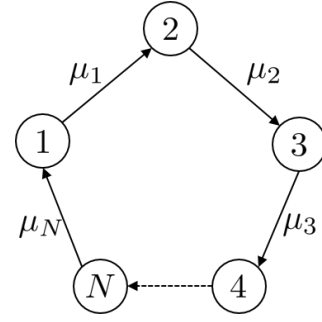


図-5 環状ネットワーク (Many-to-Many)

**定義 1. False Bottleneck:**  $D_m \geq D_i$  を満たすリンク  $m < i$  が存在するボトルネック  $i$  を “False Bottleneck” とする。

False Bottleneck は、DSO パターンに影響を及ぼさない<sup>10)</sup> ため、あらかじめネットワーク上から削除することが可能である。False Bottleneck が削除され再構築されたネットワークを Reduced Network と呼ぶ。

Reduced Network を前提として、最適性条件 [Crr-KKT] を整理しすると以下を得る<sup>10)</sup> :

$$q_i^*(t) = \begin{cases} \hat{\mu}_i & \text{if } t \in \mathcal{T}^i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (13)$$

$$\rho_i^* = \bar{s}(T^i) \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (14)$$

$$p_i^*(t) = \begin{cases} \rho_i^* - s(t) & \text{if } t \in \mathcal{T}^i \setminus \mathcal{T}^{i-1} \\ \rho_i^* - s(t) - \sum_{m \leq i-1} p_m^*(t) & \text{if } t \in \mathcal{T}^{i-1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (15)$$

ここで、 $\hat{\mu}_i \equiv \mu_i - \mu_{i+1}$  である。ただし  $\mu_{I+1} \equiv 0$  とする。また各 OD の通行時間幅は OD 需要の保存則より  $T^i = Q^i / \hat{\mu}_i$  と求めることができる。以上より、終点に近いリンクから順に DSO パターンを定めることができる。

具体的に  $I = 3$  のケースについて、DSO における各変数の関係を図示したものが図-4、である。[Crr-KKT] 中の均衡条件 (10) を満たす時間範囲に各 OD ペアのフローが流れていることが確認できる。

#### 4. 環状ネットワーク

本章では、環状ネットワークにおける到着時刻選択 DSO 配分問題の解法アプローチ、およびそれを実際に 4 ノードネットワークに適用した例を示す。

#### (1) 環状ネットワークにおける到着時刻選択 DSO

対象とするネットワーク構造を、図-5 に示す。ここでは、 $N$  個のノードおよびリンクが環状に連なっており、コリドーネットワーク同様に経路選択は存在しない。OD ペアはノード間で定義され、ノード  $r-s$  間の OD 需要は  $Q^{rs}$  と表される。さらに、時刻  $t$  に終点  $s$  に到着する OD フローを  $q^{rs}(t)$  とする。これらを用いて DSO 配分問題は、以下の最適化問題として表される：

#### [Rng-P]

$$\min_{q^{rs}(t)} \sum_{rs \in \Omega} \int_{\mathcal{T}} s^s(t) q^{rs}(t) dt \quad (16)$$

$$\text{s.t.} \quad \int_0^T q^{rs}(t) dt = Q^{rs} \quad \forall rs \in \Omega, \quad (17)$$

$$q^{rs}(t) \geq 0 \quad \forall rs \in \Omega \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (18)$$

$$\sum_{rs \in \Omega_i} q^{rs}(t + c_{is}) \leq \mu_i \quad \forall i \in \mathcal{L} \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (19)$$

[Rng-P] の一次の最適性条件 [Rng-KKT] を以下に示す：

#### [Rng-KKT]

$$\begin{cases} -\rho^{rs} + s(t) + \sum_{i \in \mathcal{L}_{rs}} p_i(t - c_{is}) \geq 0 & \text{if } q^{rs}(t) = 0 \\ -\rho^{rs} + s(t) + \sum_{i \in \mathcal{L}_{rs}} p_i(t - c_{is}) = 0 & \text{if } q^{rs}(t) > 0 \end{cases} \quad \forall rs \in \Omega \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (20)$$

$$\begin{cases} -\sum_{rs \in \Omega_i} q^{rs}(t + c_{is}) + \mu_i \geq 0 & \text{if } p_i(t) = 0 \\ -\sum_{rs \in \Omega_i} q^{rs}(t + c_{is}) + \mu_i = 0 & \text{if } p_i(t) > 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (21)$$

$$\int_{\mathcal{T}} q^{rs}(t) dt = Q^{rs} \quad \forall rs \in \Omega. \quad (22)$$

ここで  $\rho^{rs}$ ,  $p_i(t)$  は、それぞれ OD 需要保存則およびリンク容量制約に対応する双対変数である。コリドーネットワークとの大きな違いは、リンク容量制約を考慮する際に、時間のずれを考慮する必要がある点である。終点の異なる OD ペアのフローは、終点間の自由

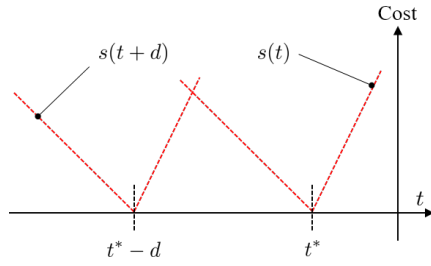


図-6 希望通過時刻のずれ

走行時間分だけずらして各リンクで足し合わせる必要があるためである。

(2) 解法アプローチ

本節では、環状ネットワークにおける DSO パターンを解析的に求める方針・枠組みについて示していく。まず、ネットワーク構造に経路選択の余地が存在しない点はコリドーネットワークと同様である。そのため、同一終点の OD ペアのみを取り出して、それらの OD ペアだけで DSO パターンを求めることは、本稿 3 章で示したコリドーネットワークにおける手順に一致する。しかしながら、このようにして得た終点別の DSO パターンは異終点 OD フロー間の相互干渉を考慮した場合に、実現しない可能性がある。これは、“同じ時刻”に“同一リンク”を異なる終点の OD フローが通過するためである。このときボトルネック容量を超えるフローが流れ、容量制約が満たされなくなる。

以上より、環状ネットワークにおける DSO パターンを求めるには、異終点 OD フロー間の相互干渉を考慮する必要がある。これに関しては、Akamatsu et al.<sup>13)</sup>で示されている、“希望到着時刻の異なる”利用者を考慮した DSO パターン求解手法を利用できる。Akamatsu et al.<sup>13)</sup>では、シングルボトルネックにおいて希望到着時刻が異なる利用者を想定しているが、これは本研究の枠組みでは、特定のリンクにおいて希望“通過”時刻の異なる利用者を想定することと対応する。ここで、あるリンクにおける希望通過時刻は差異は、終点間の自由走行時間に相当する。図-6 に希望通過時刻のずれのイメージを示す。スケジュールコスト関数が時間方向に自由走行時間分だけスライドした状況である。

ここままでに示した解法アプローチを以下にまとめる。

**Step1.** OD ペアを終点別に分類する： $\Omega^i \equiv \{rs \in \Omega, s = i\}, i = 1, 2, \dots, N$

$$\Omega, s = i\}, i = 1, 2, \dots, N$$

**Step2.** 同一終点 OD ペア  $\Omega^i$  ごとに、DSO パターンを求める

**Step3.** 重ね合わせたときに異終点フローで干渉が発生するリンク・OD ペアを特定する

**Step4.** リンク容量制約を満足するよう適切に異終点

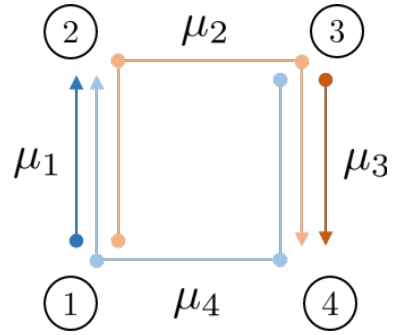


図-7 2 起点 2 終点ネットワーク

OD フローを重ね合わせる

Step2. では Osawa et al.<sup>10)</sup>, Step4. では Akamatsu et al.<sup>13)</sup> の手法を基に解析を行うこととなる。

(3) 4 ノードネットワークにおける解析例

前節で示したアプローチを、4 ノード環状ネットワークに例に、実際に適用する。図-7 に示すように 4 ノードからなる環状ネットワークに  $\Omega = \{(1, 4), (3, 4), (1, 2), (3, 2)\}$  の 4 つの OD ペアが存在する状況を考える。リンク容量  $\mu_2, \mu_4$  は十分大きいものとし、 $\mu_1 < \mu_3$  が成立しているものとする。このような状況設定に対して、改めて環状ネットワークにおける到着時刻選択 DSO 配分問題 [Rng-O2D2-P] およびその最適性条件 [Rng-O2D2-KKT] を示す。ここで、リンク 2,4 のボトルネック容量は十分大きいため、容量制約は常に満足されるとし、リンク 1,3 の容量制約のみ明示的に示している。

[Rng-O2D2-P]

$$\min_{q^{rs}(t)} \sum_{rs \in \Omega} \int_{\mathcal{T}} s(t) q^{rs}(t) dt \quad (23)$$

$$\text{s.t. } q^{rs}(t) \geq 0 \quad \forall rs \in \Omega \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (24)$$

$$\int_{\mathcal{T}} q^{rs}(t) dt = Q^{rs} \quad \forall rs \in \Omega, \quad (25)$$

$$\begin{cases} q^{14}(t + d_1 + d_2 + d_3) + q^{32}(t + d_1) \\ \quad + q^{12}(t + d_1) \leq \mu_1 \\ q^{14}(t + d_3) + q^{32}(t + d_1 + d_4 + d_3) \\ \quad + q^{34}(t + d_3) \leq \mu_3 \end{cases} \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (26)$$

[Rng-O2D2-KKT]

$$\int_{\mathcal{T}} q^{rs}(t) dt = Q^{rs} \quad \forall rs \in \Omega \quad (27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho^{14} + s(t) + p_1(t - d_3 - d_2 - d_1) \\ \quad + p_3(t - d_3) \geq 0 \quad \text{if } q^{14}(t) = 0 \\ -\rho^{14} + s(t) + p_1(t - d_3 - d_2 - d_1) \\ \quad + p_3(t - d_3) = 0 \quad \text{if } q^{14}(t) > 0 \end{array} \right. , \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho^{32} + s(t) + p_3(t - d_1 - d_2 - d_4) \\ \quad + p_1(t - d_1) \geq 0 \quad \text{if } q^{32}(t) = 0 \\ -\rho^{32} + s(t) + p_3(t - d_1 - d_2 - d_4) \\ \quad + p_1(t - d_1) = 0 \quad \text{if } q^{32}(t) > 0 \end{array} \right. , \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho^{12} + s(t) + p_1(t - d_1) \geq 0 \quad \text{if } q^{21}(t) = 0 \\ -\rho^{12} + s(t) + p_1(t - d_1) = 0 \quad \text{if } q^{12}(t) > 0 \end{array} \right. , \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho^{34} + s(t) + p_3(t - d_3) \geq 0 \quad \text{if } q^{34}(t) = 0 \\ -\rho^{34} + s(t) + p_3(t - d_3) = 0 \quad \text{if } q^{34}(t) > 0 \end{array} \right. , \quad (31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -q^{14}(t + d_1 + d_2 + d_3) - q^{32}(t + d_1) \\ \quad - q^{12}(t + d_1) + \mu_1 \geq 0 \quad \text{if } p_1(t) = 0 \\ -q^{14}(t + d_1 + d_2 + d_3) - q^{32}(t + d_1) \\ \quad - q^{12}(t + d_1) + \mu_1 = 0 \quad \text{if } p_1(t) > 0 \end{array} \right. , \quad (32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -q^{32}(t + d_3 + d_2 + d_1) - q^{14}(t + d_3) \\ \quad - q^{34}(t + d_3) + \mu_3 \geq 0 \quad \text{if } p_3(t) = 0 \\ -q^{32}(t + d_3 + d_2 + d_1) - q^{14}(t + d_3) \\ \quad - q^{34}(t + d_3) + \mu_3 = 0 \quad \text{if } p_3(t) > 0 \end{array} \right. . \quad (33)$$

■ **Step1.** まず、終点ごとに OD ペアを分類する。今回の状況設定では

$$\Omega^4 = \{(1, 4), (3, 4)\} \quad (34)$$

$$\Omega^2 = \{(3, 2), (1, 2)\} \quad (35)$$

と分類できる。

■ **Step2.** 同一終点グループ独立に、DSO パターンを求める。ここでは、3章で示したコリドーネットワークにおける解法アプローチがそのまま適用可能である。同一終点グループ  $\Omega^4, \Omega^2$  に対して、各々独立に DSO パターンを求めた結果を図-8 に示す。ここで、終点 2 の OD グループにとっては、リンク 3 が False Bottleneck であることに注意されたい。言い換えると、 $\mu_1 < \mu_3$  であるため、容量制約下では  $\Omega^2$  の OD フローはいかなる時間帯においても  $\mu_1$  以上のフローにならない。そのため、OD(3,2) および OD(1,2) は個別の最適到着時間帯

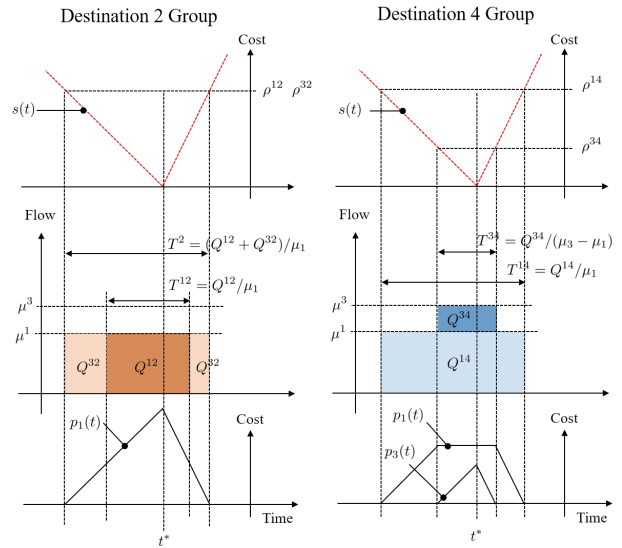


図-8 終点別 DSO パターン

を特定することができないが、OD(3,2), OD(1,2) を合わせたフローが流れるべき時間帯  $T^2$  は把握可能である(詳細は Osawa et al.<sup>10)</sup>).

■ **Step3.** Step2. で求めた終点別の DSO パターンが、環状ネットワークにおいて実際に実現可能か検証する。この手続きの詳細は付録に示し、本文では天下一的相互干渉が発生しないための条件を示す：

$$t^{14+} - 3d < t^{2-} - d, \quad (36)$$

$$t^{2+} - 3d < t^{14-} - d. \quad (37)$$

これらの条件が満たされるか否かは、終点間の自由走行時間  $2d$  の大きさに依存する。本稿では、条件 (36) が満足されない状況：

$$t^{14+} - 3d > t^{2-} - d \quad (38)$$

を具体的に扱う<sup>3</sup>。このような状況では、リンク 1 において OD14 と終点 2 グループの OD フローの干渉が発生している。

■ **Step4.** ここまでで、異終点 OD フロー間の干渉がリンク 1 において発生することがわかっている。つまり、終点別の DSO パターンを素直に重ね合わせた際に、リンク 1 の容量制約が満たされない状況である。そのため、主にリンク 1 に関する変数に着目して、[Rng-O2D2-KKT] を整理し DSO パターンを導出する。配分時間帯  $T$  において、OD(1,4) のフローが目的地に到着を開始する時刻が  $\hat{t}$  であるとする、OD(1,4) および

<sup>3</sup> 本来ならば、 $d$  の大きさによって細かな場合分けが必要となる。本稿では解析のアプローチを端的に示すために、条件 (36) が満足されない状況にみを具体的に示すこととした。その他のケースについても場合分けの手間が増えるのみであり、解析の枠組みは同一である。

$\Omega^2$  の到着開始時刻および到着完了時刻は以下となる：

$$t^{14-} \equiv \hat{t} \quad (39)$$

$$t^{14+} = \hat{t} + T^{14} \quad (40)$$

$$t^{2-} = \hat{t} + 2d \quad (41)$$

$$t^{2+} = t^{2-} + T^{32} \quad (42)$$

ここで OD 需要の保存則 (27) より，以下の関係式を得る：

$$T^{14} = \frac{Q^{14}}{\mu_1} \quad (43)$$

$$T^{34} = \frac{Q^{34}}{\mu_3 - \mu_1} \quad (44)$$

$$T^{32} = \frac{Q^{32} + Q^{12}}{\mu_1} \quad (45)$$

これを用いて，終点別 DSO パターン (図-8) および最適性条件 [Rng-O2D2-KKT] から以下の最適解を得る：

$$\rho^{14*} = s(t^{14-}) \quad (46)$$

$$\rho^{34*} = \bar{s}(T^{34}) \quad (47)$$

$$\rho^{12*} = \rho^{32*} = s(t^{32+}) \quad (48)$$

$$p_1^*(t) = \begin{cases} \rho^{14*} - s(t + 3d) & \text{if } t \in [t^{14-} - 2d, t^{14+} - 2d] \\ \rho^{32*} - s(t + d) & \text{if } t \in [t^{2-} - d, t^{2+} - d] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (49)$$

$$p_3^*(t) = \begin{cases} \rho^{34*} - s(t) & \text{if } t \in [t^{34-} - d, t^{34+} - d] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (50)$$

$$q^{14*}(t) = \begin{cases} \mu_1 & \text{if } t \in [t^{14-}, t^{14+}] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (51)$$

$$q^{34*}(t) = \begin{cases} \mu_3 - \mu_1 & \text{if } t \in [t^{34-}, t^{34+}] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (52)$$

$q^{32*}(t)$  および  $q^{12*}(t)$  については時間帯  $[t^{32-}, t^{32+}]$  において， $q^{32*}(t) + q^{12*}(t) = \mu_1$  を満たすフローパターンが解となる。

このように求められた DSO パターンを，図-9 に示す。図はノード 1 (リンク 2 の上流ノード) における各変数の最適解の関係性を示している。Step2. において求められた終点別の DSO パターン図-8 と比較すると，双対変数  $p_1(t)$  の形状がフローの干渉が発生したことにより上側包絡線をとるような形状となる。

## 5. 動的な交通流制御

本章では，ここまでで求められた DSO パターンを達成しうる動的な交通流制御戦略について整理する。具体的には，まず，利用者の自然な行動原理 (最短経路

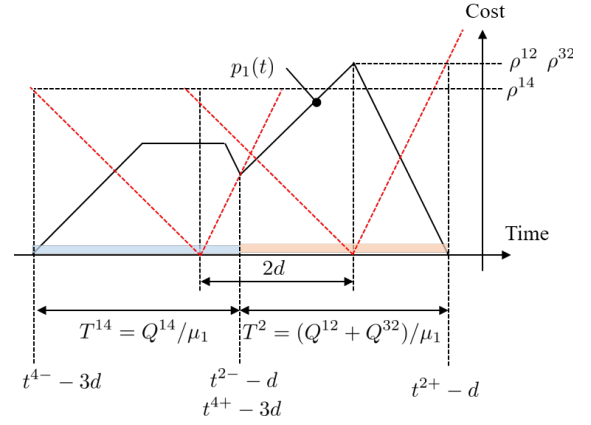


図-9 ノード 1 における各変数の最適解

選択行動) を動的的に記述した動的利用者均衡 (DUE : Dynamic User Equilibrium) 配分モデルの概念を導入し，DSO との対応関係を明らかにする。次に，それら対応関係から，利用者の自然な行動の下で DSO が達成されるような制御戦略の策定法を示す。

### (1) DUE vs. DSO

コリドーネットワークにおける DUE と DSO の対応関係については，Osawa et al.<sup>10)</sup> や Fu et al.<sup>14)</sup> において詳細な議論がなされている。本稿では，動的な制御戦略を策定する上で最も重要な“外部性の交換”のコンセプトを端的に示すため，DUE の諸性質については割愛する。

経路選択のないネットワークにおいて，時刻  $t$  に目的地に到着する OD 交通流率を  $q^{rs}(t)$  とすると，DUE 状態においては以下の均衡条件が成立する：

$$\begin{cases} c^{rs}(t) \geq \hat{c}^{rs} & \text{if } q^{rs}(t) = 0 \\ c^{rs}(t) = \hat{c}^{rs} & \text{if } q^{rs}(t) > 0 \end{cases} \quad (53)$$

ここで  $\hat{c}^{rs}$  は OD ペア  $rs$  の均衡コストであり， $c^{rs}(t)$  は時刻  $t$  に目的地に到着する利用者が経験する交通費用である。つまり，DUE は“利用者が真の旅行時間を把握しており，どの利用者も「他の経路を選択した方が良かった...」と事後的に後悔することがない状態”である<sup>15)</sup>。以降，均衡条件 (53) を DUE における到着時刻選択条件と呼ぶ。

ここで，環状ネットワークにおける DSO の最適性条件 [Rng-KKT] のうち，均衡条件 (20) に着目する。均衡条件 (20) を整理すると以下を得る：

$$\begin{cases} s(t) + \sum_{i \in \mathcal{L}_{rs}} p_i(t - c_{is}) \geq \rho^{rs} & \text{if } q^{rs}(t) = 0 \\ s(t) + \sum_{i \in \mathcal{L}_{rs}} p_i(t - c_{is}) = \rho^{rs} & \text{if } q^{rs}(t) > 0 \end{cases} \quad \forall rs \in \Omega \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (54)$$

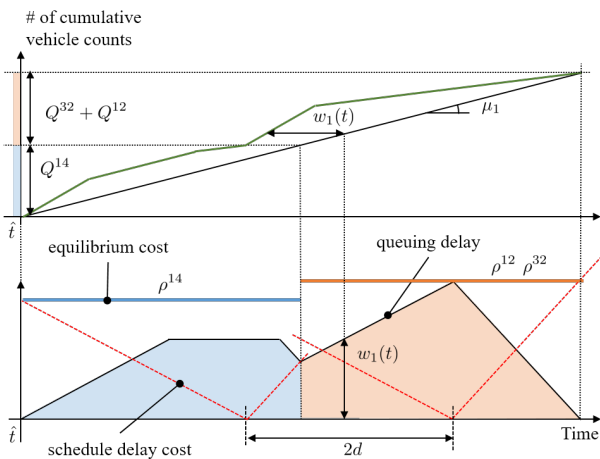


図-10 リンク 1 における累積図

DUE における到着時刻選択条件と (53) と比較すると、双対変数  $\rho^{rs}$  を各 OD ペアの均衡コストと解釈可能であることがわかる。さらに、双対変数  $p_i(t)$  を各リンクにおける待ち行列遅れと解釈すると、DUE と DSO に 1 対 1 の対応関係が存在することがわかる。つまり、環状ネットワークにおいてはリンク容量制約付きの DSO パターンを求めることにより、リンクに待ち行列(渋滞)が存在する場合の DUE パターンを把握することが可能であることを示している。

この対応関係を、4 章における 2 起点 2 終点ネットワークの例を用いて図示したものが、図-10 である。下図はリンク 1(ノード 2 への流入リンク)における双対変数  $p_1(t)$  の最適パターン(図-9)を示したものである。上図は、実際に  $p_1(t)$  を待ち行列遅れ  $w_1(t)$  と解釈した上で実現する仮想的な累積図<sup>4</sup>を示している。

### (2) ボトルネック通行権制度

ボトルネック通行権<sup>11)</sup>とは、特定のボトルネックを特定の時間帯に通行できる権利のことであり、道路管理者が設定・発行するものである。このボトルネック通行権の時間帯別発行枚数が、容量以下であれば、いかなる時間帯においても渋滞は発生しない。さらに、そのボトルネック通行権価格を適正水準に設定すれば、利用者の自然な選択行動の結果として DSO を達成することができる。

この適正価格は、これまでに扱った環状ネットワークにおいては、DSO パターンより定めることができる。具体的には、ボトルネック  $i$  を時刻  $t$  に走行可能なボトルネック通行権価格を  $p_i(t)$  と設定すればよい。これにより、DSO における到着時刻選択条件 (54) が DUE における到着時刻選択条件 (53) に帰着し、結果としてポ

<sup>4</sup> 待ち行列の進展状況を明瞭にするため、リンク自由走行時間は累積図に反映していない。

トルネック通行権制度を導入下での DUE が DSO と対応する。

### (3) 動的混雑料金制度

高速道路網における動的混雑料金制度は、オンランプにおいて時々刻々の混雑(通行)料金を設定するものである。オンランプベースでの制御である点だが、リンクベースの制御であるボトルネック通行権制度と差異である。ここでも、時々刻々の混雑料金を適正な価格に設定した場合、利用者の自然な選択行動の結果として DSO を達成することができる。

この適正な価格は、経路選択の存在しない環状ネットワークにおいては容易に求めることが可能である。具体的には、時刻  $t$  に目的地  $s$  に到着する利用者に対して、ランプ  $r$  において設定する最適混雑料金価格  $a^{rs}(t)$  は以下である：

$$a^{rs}(t) = \sum_{i \in \mathcal{L}_{rs}} p_i(t - c_{is}) \quad (55)$$

これは通過しうるリンクのボトルネック通行権価格をあらかじめランプで課していることに相当する。そのため、ボトルネック通行権制度と同様に動的混雑料金制度導入下での DUE が、DSO と対応する。

### (4) 動的ランプ流入制御

高速道路網における動的ランプ流入制御は本線上の流動性を確保するために、オンランプにおいて流入フローの調整を行う手法である。この最適制御戦略は、同じくランプベースの制御である動的混雑料金制度における最適戦略 (55) から導くことができる。具体的には、時刻  $t$  に目的地  $s$  に到着する利用者に対して、ランプ  $r$  において以下で定義される  $b^{rs}(t)$  に相当する待ち行列遅れを課せばよい：

$$b^{rs}(t) = a^{rs}(t) \quad (56)$$

解釈としては、ランプにおいて動的混雑料金制度下で課される金銭的成本を、動的ランプ流入制御導入下では時間的成本として課しているということになる。

以上より、環状ネットワークにおいてはリンク容量制約付きの到着時刻選択 DSO パターンから、“外部性の交換”の概念を適用することで、ボトルネック通行権制度、動的混雑料金制度および動的ランプ流入制御に対して最適制御戦略を導出可能であることが明らかとなった。

## 6. おわりに

本研究では、到着時刻選択 DSO 配分の理論解析を行い、コリドーネットワークにおける DSO パターンを適切に重ね合わせることで環状ネットワークにおける



DSO パターンが実現することを示した。さらに、環状ネットワークにおける DSO と DUE の対応関係を明らかにし、「外部性の交換」の概念から、ボトルネック通行権制度、動的混雑料金制度、動的ランプ流入制御の最適制御戦略を示した。既存研究においてコリドーネットワークに留まっていた DSO 解析の枠組み・知見を、環状ネットワークに拡張した点は、本研究の大きな貢献である。

本研究では、環状ネットワークにおける DSO と DUE の対応関係から最適制御戦略を導いたが、動的混雑料金制度および動的ランプ流入制御については終点別の制御戦略を示すに留まっている<sup>5</sup>。現行の都市高速道路システムにおいては、このような「オンランプにおける終点別の制御」を実施するのは現実的とは言えない。そのため、この点の克服は本研究の今後の重要課題のひとつである。

謝辞： 本研究は、日本学術振興会・科学研究費補助金・基盤研究(B) (課題番号：18H01551) の助成を受けた研究の一部です。ここに記し、感謝を表します。

## 付録 I 異終点 OD フロー間の相互干渉

ここでは、本文 4 章において言及した異終点間 OD フローが干渉するリンクの特定方法について示す。具体的には、各 OD ペアの各ノードへの到着開始時刻・到着完了時刻を整理し、干渉発生の有無を検証することとなる。終点別 DSO パターンにおける最適到着開始時刻および到着完了時刻の一覧を表-2 に示す。

表-2 各ノードの到着開始時刻と到着完了時刻

	終点 4 (OD-14)		終点 2 (OD-32,OD-12)	
	到着開始	到着完了	到着開始	到着完了
1	$t^{14-} - 3d$	$t^{14+} - 3d$	$t^{2-} - d$	$t^{2+} - d$
2	$t^{14-} - 2d$	$t^{14+} - 2d$	$t^{2-}$	$t^{2+}$
3	$t^{14-} - d$	$t^{14+} - d$	$t^{2-} - 3d$	$t^{2+} - 3d$
4	$t^{14-}$	$t^{14+}$	$t^{2-} - 2d$	$t^{2+} - 2d$

表-2 を参考にすると、異終点 OD フローの干渉が発生しないための条件は以下となる：

条件 (1) ノード 1 における OD(1,4) の到着完了時刻が  $\Omega^2$  の到着開始時刻よりもはやい：

$$t^{14+} - 3d < t^{2-} - d \quad (\text{I.1})$$

条件 (2) ノード 3 における  $\Omega^2$  の到着完了時刻が OD(1,4) の到着開始時刻よりもはやい：

$$t^{2+} - 3d < t^{14-} - d \quad (\text{I.2})$$

## 参考文献

- 1) Papageorgiou, M. and Kotsialos, A.: Freeway ramp metering: An overview, *IEEE transactions on intelligent transportation systems*, Vol.3, No.4, pp.271–281, 2002.
- 2) Wang, C.: On a ramp-flow assignment problem, *Transportation Science*, Vol.6, No.2, pp.114–130, 1972.
- 3) Wattleworth, J. A.: *Peak-period analysis and control of a freeway system*, 1965.
- 4) 佐佐木綱, 明神証: 都市高速道路網における流入制御理論, *交通工学*, Vol/3, No.3, pp.846, 1968.
- 5) 飯田恭敬, 朝倉康夫, 田中啓之: 複数経路を持つ都市高速道路網における最適流入制御モデルの定式化と解法, *土木学会論文集*, No.449, pp.135–144, 1992.
- 6) 朝倉康夫, 柏谷増男, 山内敏通: 観測データの利用による都市高速道路の動的な LP 型流入制御モデル, *土木計画学研究・論文集*, Vol.13, pp.923–931, 1996.
- 7) 森地茂, 清水哲夫: 都市高速道路における新たなリアルタイム流入制御手法に関する研究, *土木計画学研究・論文集*, Vol.13, pp.915–922, 1996.
- 8) 酒井高良, 赤松隆: 首都圏高速道路網における渋滞パターンと Macroscopic Fundamental Diagram の安定性, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.75, No.2, pp.97–108, 2019.
- 9) 大口敬, 力石真, 飯島護久, 岡英紀, 堀口良太, 田名部淳, 毛利雄一: 首都圏 3 環状高速道路における交通マネジメント評価シミュレーションの開発, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.74, No.5, pp.L1255–L1263, 2018.
- 10) Osawa, M., Fu, H., and Akamatsu, T.: First-best dynamic assignment of commuters with endogenous heterogeneities in a corridor network, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.117, pp.811–831, 2018.
- 11) 赤松隆, 佐藤慎太郎: 時間帯別ボトルネック通行権取引制度に関する研究, *土木学会論文集 D*, Vol.62, No.4, pp.605–620, 2006.
- 12) 赤松隆: 一般ネットワークにおけるボトルネック通行権取引制度, *土木学会論文集 D*, Vol.63, No.3, pp.287–301, 2007.
- 13) Akamatsu, T., Wada, K., Iryo, T., and Hayashi, S.: Departure time choice equilibrium and optimal transport, *Munich Personal RePEc Archive*, 2018.
- 14) Haoran, F., Takashi, A., and Kentaro, W.: Dynamic traffic assignment in a corridor network: Optimum vs. equilibrium, *working paper*, 2019.
- 15) 和田健太郎: 交通ネットワーク流の安定性と制御, 計測と制御, Vol.55, No.4, pp.368–375, 2016.

(2019. 10. 4 受付)

<sup>5</sup> このことは、終点ごとの制御を必要としないボトルネック通行権制度の優位性を表す事実のひとつである。