

Universal Gravity 型空間経済モデルの ポテンシャル・ゲーム表現

山口 修平¹・赤松 隆²

¹学生会員 東北大学大学院 情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
E-mail: shuhei.yamaguchi.p7@dc.tohoku.ac.jp

²正会員 東北大学大学院教授 情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究では, universal gravity 型の空間経済モデルを対象としてポテンシャル・ゲームとして表現できるための条件を明らかにする. Allen et al.¹⁾によると, universal gravity という枠組みによって, 幅広いクラスの地域間経済モデルが共通の数理的構造を持つことが明らかにされている. これらのモデルがポテンシャル・ゲームであれば, 確率安定性解析²⁾ を実行可能であり, モデルの表現しうる集積パターンを明解に把握できる. さらに, 既往の都市経済学モデルと組み合わせることによって, 多様な空間スケールの相互作用を取り入れた集積現象の記述が可能である.

Key Words: agglomeration economy, location equilibrium, potential game, bi-level optimization

1. はじめに

我が国では様々な空間スケールでの経済活動の集積現象が見られる. まず, 首都圏のような大都市圏への集中と地方圏の衰退が挙げられる. これは, 国内における最も巨視的なスケールでの集積現象である. 一方で, より微視的な視点では, 各都市内における副都心形成・郊外化という集積・分散現象が見られる. 以上は我が国で一般的に観測される現象である.

様々な空間スケールに対応する経済活動の集積現象に関する理論研究は, 空間スケールごとに個別に進められ, 大きく分けて都市経済学分野と新地理経済学 (NEG) 分野の 2 つが存在する. 前者は都市内空間, 後者は地域間空間での集積現象を扱う分野であり, 数多くの研究から個々のスケールでは集積現象のメカニズムが明らかにされている. 例えば, Fujita and Ogawa³⁾ モデルは都市内の副都心形成を示した代表的な都市経済学モデルである. しかし, 空間スケールを都市内に限定しているため, 財の移出・移入という地域間の相互作用が捨象されている¹. 一方で, 後者の NEG モデルでは一般に交易による地域間の相互作用を取り入れるものの, 立地点間の消費者の通勤行動等を捨象している.

このように従来理論は空間スケール別に分断されているが, 現実の集積・分散現象は地域間の経済活動と都市内の経済活動の相互作用の結果として生じていると考えられる. 現実に観測される多様な空間スケール

ルの集積現象を同時に表現するためには, 都市内の集積メカニズムと地域間の集積メカニズムの両方を取り入れた集積経済モデルを開発する必要がある.

この課題は, 都市内モデルと地域間モデルを適切に組み合わせ, 多様な空間スケール (マルチ・スケール) の経済活動を表現することによって解決されることが考えられる. マルチ・スケール・モデルを構築する際, 個別スケールでの性質がよく知られたモデルを基にすれば, モデルの理論特性の把握が容易となる. 具体的には, モデルがポテンシャル・ゲームであれば, 確率安定性解析を用いた均衡選択²⁾ が実行可能となる.

本研究では, universal gravity で表現される地域間モデルを対象としてポテンシャル・ゲームとして表現できるための条件を明らかにする. Allen et al.¹⁾によると, 幅広いクラスの地域間モデル (e.g., Allen and Arkolakis⁴⁾, Armington⁵⁾, Krugman⁶⁾, Eaton and Kortum⁷⁾) の短期均衡 (財取引の均衡) について, universal gravity と呼ばれる共通の数理的構造を持つことが明らかにされている. 本研究ではまず, 短期均衡を最適化問題の形式で表現する. さらに, 人口移動を考慮した長期均衡の問題がポテンシャル・ゲームに帰着すれば, 確率安定性解析を実行し, 集積パターン特性を明解に把握することができる.

確率安定性解析手法は, Fujita and Ogawa³⁾ モデル

¹ より具体的には, 企業は生産した財を都市外に移出し, 消費者は財を都市外から移入するという仮定を持つ.

² 集積経済モデルは一般に複数均衡が生じうる. そのため, 実現不可能と考えられる不安定な均衡解を排除する均衡選択を行う必要がある. 確率安定性解析による均衡選択についての詳細は山口・赤松²⁾ を参照のこと.

や Beckmann⁸⁾ モデル等の都市内モデルに適用され、均衡解の理論特性が明らかにされている^{2),9)}。これらの都市内モデルはポテンシャル・ゲームとして解釈でき、Sandholm¹⁰⁾ の「ポテンシャル・ゲームでは、ポテンシャル関数を大域的に最大化する解と確率安定解は一致する」という定理より、唯一の安定均衡解を選択することができる。

一方で、NEG モデル等の地域間スケールの集積パターンに関しては、線形安定性解析に基づく局所安定性の評価にとどまっている^{11),12),13)}。線形安定性解析は、均衡点への調整動学を定義し、その Jacobi 行列の固有値を求めることで解の安定性を判定するものである。局所安定解は同一の条件下で複数存在しうる。この場合、尤もらしい均衡解を 1 つだけ選択することは不可能である。

地域間モデルへ確率安定性解析が適用されていないのは、モデルがポテンシャル・ゲームに帰着するか否かが自明ではないためである。本研究は、地域間モデルの確率安定性解析を実行する第一歩として位置付けられる。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、第 2 章で地域間モデルを定式化する。第 3 章で、地域間モデルのポテンシャル・ゲームへの変換可能性を示す。その際に、最後に、第 4 章で今後の展望を述べる。

2. モデルの定式化

本章では、離散空間における universal gravity 型地域間モデルを定義する。Universal gravity 型モデルの中で最も簡単な構造をもつ Armington 型のモデルを例に定式化を示す。

(1) 基本設定

離散的な K 箇所の立地点が存在する空間を考え、立地点の集合を $\mathcal{K} \equiv \{1, \dots, K\}$ とする。モデルの空間的なスケールとしては地域間スケールを想定し、立地点は各地域を集約して表現するものと解釈する。この経済には、立地選択主体として、総数 H の連続的な消費者が存在する。各立地点 $i \in \mathcal{K}$ に立地する消費者数を $h_i \geq 0$ と表現する。消費者の空間的立地パターンをベクトル $\mathbf{h} \equiv [\dots, h_i, \dots] \in \mathbb{R}_+^K$ によって表現する。全ての実行可能な \mathbf{h} の集合は $\mathcal{H} \equiv \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}_+^K \mid \sum_{i \in \mathcal{K}} h_i = H\}$ である。消費者は労働を非弾力的に 1 単位供給する。

この経済では、各地点 $i \in \mathcal{K}$ 毎にバラエティが差別化された単一種類の財が生産されているとする。財の生産は完全競争的であると、各地点において財バラエティを生産する企業は、消費者から非弾力的に供給される労働のみを生産要素として投入する。消費者の

立地点間の通勤は考えず、全ての消費者は個々人の立地点において労働を供給する。

(2) 消費者行動

地点 $j \in \mathcal{K}$ に居住する消費者の効用関数は、以下のような CES 型と仮定する：

$$U_j(\mathbf{q}_j | h_j) = a_j \left(\sum_{i \in \mathcal{K}} q_{ij}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (1)$$

ここで、 q_{ij} は地点 $i \in \mathcal{K}$ で生産される財バラエティの消費量であり、 $\mathbf{q}_j = (q_{1j}, \dots, q_{Kj})$ である。また、 $\sigma > 1$ はこれらの財バラエティ間の代替の弾力性である。 a_j は地点 j のアメニティを表現する。

地点 i で生産され地点 j で消費される財の価格を p_{ij} とする。地点 j における消費者の賃金を $w_j \geq 0$ とする。このとき地点 j の消費者の予算制約は次のとおりである：

$$w_j = \sum_{i \in \mathcal{K}} p_{ij} q_{ij} \quad (2)$$

なお、本稿では消費者の賃金を以下のように基準化する：

$$\sum_{j \in \mathcal{K}} w_j h_j = 1 \quad (3)$$

これは経済全体の金銭の量が一定であるという制約である。

予算制約の下での消費者の効用最大化によって、消費者の財バラエティに対する需要 $\{q_{ij}\}$ および地点 j における財の価格指数が以下のように得られる：

$$q_{ij} = w_j \frac{p_{ij}^{-\sigma}}{P_j^{1-\sigma}} \quad (4)$$

$$P_j \equiv \left(\sum_{i \in \mathcal{K}} p_{ij}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (5)$$

ただし、 $\mathbf{p} \neq 0$ である。価格ベクトル \mathbf{p} および賃金ベクトル \mathbf{w} が与えられれば、地点 j に居住する消費者の間接効用関数 v_j は以下のように与えられる：

$$v_j = a_j \frac{w_j}{P_j} \quad (6)$$

(3) 企業の行動

地点 i の企業は、消費者の労働のみを生産要素として完全競争的に財を供給する。完全競争の仮定から、地点 i における財の工場卸価格を p_i とすると、これは限界費用に一致する：

$$p_i = \frac{w_i}{m_i} \quad (7)$$

ここで、 m_i は地点 i における労働の集約的な限界生産性である。

財の地点間における輸送は水塊型の輸送技術に従うとする。地点 i から地点 j へ 1 単位の財を届けるためには、地点 i において $\tau_{ij} (> 1)$ 単位の財を輸出する必

要があるとする。また $\tau_{ii} = 1$ ($\forall i$) とする。このとき、地点 i で生産され、地点 j で消費される財の地点 j における価格 p_{ij} は、 τ_{ij} と p_i を用いて次のように与えられる：

$$p_{ij} = p_i \tau_{ij}. \quad (8)$$

(4) 短期均衡

短期的には消費者は地点間を移動できないと仮定し、その条件下での一般均衡状態を考える。この状態を短期均衡と呼ぶ。短期均衡条件によって、財取引額、財価格、賃金が決定する。

a) 均衡条件

地点 i から地点 j への財取引額を $X_{ij} \equiv p_{ij} q_{ij} h_j$ と定義する。均衡条件は、財市場の清算条件と交易平衡条件である。すなわち、企業のゼロ利潤条件より、地点 i における総収益は地点 i における総賃金と一致する：

$$w_i h_i = \sum_{j \in \mathcal{K}} X_{ij} \quad \forall i \in \mathcal{K}. \quad (9)$$

消費地 i における総賃金と財の購入額が一致する：

$$w_i h_i = \sum_{j \in \mathcal{K}} X_{ji} \quad \forall i \in \mathcal{K}. \quad (10)$$

b) Universal Gravity

Allen et al.¹⁾ によると、Universal gravity という枠組みによって、Armington⁵⁾, Krugman⁶⁾, Eaton and Kortum⁷⁾ に代表される地域間の空間経済モデルが共通の数理的構造を持つことが明らかにされている。具体的には、Universal gravity 型のモデルにおいて、 X_{ij} は

$$X_{ij} = D_{ij} \gamma_i \delta_j \quad (11)$$

のように表現可能である。すなわち、地点 i, j 間の交易のしやすさを表す D_{ij} 、生産地 i 、消費地 j の財の移出・移入の“容量”に関する項 γ_i, δ_j の積によって X_{ij} が表される。式 (11) は重力方程式と呼ばれる形である。

例えば、Armington⁵⁾ モデルでは、立地パターン \mathbf{h} と価格変数を用いて、 X_{ij} は以下のように表される：

$$X_{ij} = \tau_{ij}^{1-\sigma} \left(\frac{w_i}{m_i} \right)^{1-\sigma} h_j w_j P_j^{\sigma-1}. \quad (12)$$

$D_{ij} = \tau_{ij}^{1-\sigma}$, $\gamma_i = \left(\frac{w_i}{m_i} \right)^{1-\sigma}$, $\delta_j = h_j w_j P_j^{\sigma-1}$ とすれば、式 (11) の重力方程式の形で表せることが確認できる。

(5) 長期均衡

長期均衡では短期均衡で決定した財取引額 \mathbf{q} 、財価格 \mathbf{p} 、賃金 \mathbf{w} を与件として、消費者が立地選択を行う。 $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{w}$ は立地パターン \mathbf{h} の関数として与えられるので、効用関数 v_i は \mathbf{h} の関数として表現できる。なお、Armington⁵⁾ や Eaton and Kortum⁷⁾ 等の貿易理論モデルでは、立地パターン \mathbf{h} は外生変数として与えられ

ているが、 \mathbf{h} を内生変数と捉えれば、立地均衡モデルとして解釈可能である。

長期均衡条件は消費者の立地選択に関する無裁定条件である。すなわち、消費者が立地選択に関して均衡状態にあるならば、どの消費者も立地点変更の動機を持たない。この条件は、以下の式で表現される：

$$\begin{cases} v^* = v_i(\mathbf{h}) & \text{if } h_i > 0 \\ v^* \geq v_i(\mathbf{h}) & \text{if } h_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K} \quad (13)$$

$$\sum_i h_i = H \quad (14)$$

ここで、 v^* は内生的に決定する均衡効用水準である。

3. ポテンシャル・ゲームへの変換可能性

本章では、地域間モデルをポテンシャル・ゲームとして表現するための手順を示す。まず、(1) でポテンシャル・ゲームの定義を記す。(2) では、地域間モデルを分析する準備として、既に性質の良く知られた都市内モデル (Beckmann モデル) を例に、均衡問題を短期と長期に分解し、ポテンシャル・ゲームとして表現可能であることを示す。都市内モデルと同様に、地域間モデルも短期・長期の問題へと分解し、(3) では短期均衡の等価最適化問題を示す。続く (4) で地域間モデルの長期均衡をポテンシャル・ゲームとして表現する。

(1) ポテンシャル・ゲーム

ポテンシャル・ゲームとは利得関数のベクトル場にポテンシャルが存在する集団ゲームであり、非常に有用な性質を持つ。

a) 集団ゲームの定義

集団ゲームとは、有限かつ非常に多数のエージェントの集合と有限の戦略集合で構成されるゲームである。各エージェントは共通の戦略集合と利得関数を持ち、自らの利得を最大化するように行動する。エージェントの純粋戦略集合を $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, n\}$ とする。各エージェントは純粋戦略をとるとし、起こりうる集団状態の集合は $\mathcal{X} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i \in \mathcal{S}} x_i = 1\}$ である。ここに、 x_i は戦略 $i \in \mathcal{S}$ をとるエージェントの割合であり、集団状態 \mathbf{x} は x_i を i 番目要素に持つベクトルである。なお、 \mathbb{R}^n は n 次元の実数値集合、 \mathbb{R}_+^n は n 次元の非負実数値集合である。さらに、集団状態 \mathbf{x} のときに戦略 $i \in \mathcal{S}$ をとるエージェントの利得関数を $F_i(\mathbf{x})$ とする。各戦略の利得関数を要素に持つベクトル値関数を $\mathbf{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ と定義する。戦略集合、実行可能な集団状態、利得関数の 3 つの要素で集団ゲーム \mathcal{G} は定義され、 $\mathcal{G} \equiv (\mathcal{S}, \mathcal{X}, \mathbf{F})$ と表す。

集団ゲームのナッシュ均衡は以下のように定義される。

定義 1 (集団ゲームのナッシュ均衡) 集団ゲーム $G = (S, \mathcal{X}, F)$ の状態 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ がナッシュ均衡となるのは、任意の状態 $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ に対して、以下の変分不等式を満たすときである：

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{X} \quad (15)$$

b) ポテンシャル・ゲームの定義と性質

ポテンシャル・ゲームとは、ポテンシャル関数を持つ集団ゲームである。

定義 2 (ポテンシャル・ゲーム) ポテンシャル・ゲームとは、以下の等式を満たすポテンシャル関数 $Z: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する集団ゲーム $G = (S, \mathcal{X}, F)$ である：

$$\frac{\partial Z(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial Z(\mathbf{x})}{\partial x_i} = F_j(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{x}) \quad \forall i, j \in S \quad (16)$$

特に、利得関数のベクトル場 \mathbf{F} のスカラーポテンシャルが Z であれば (i.e., $\nabla Z(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ ならば)、式 (16) は当然に満たされる。Sandholm¹⁴⁾ によると、ポテンシャル・ゲームは以下の性質を持つ：

定理 1 (ポテンシャル・ゲームとナッシュ均衡) 集団ゲーム G をポテンシャル関数 Z を持つポテンシャル・ゲームとする。ナッシュ均衡の集合は、最大化問題 $\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} Z(\mathbf{x})$ の Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす状態の集合と一致する。

(2) Beckmann モデルの例

都市経済学分野の Beckmann モデルは、ポテンシャル・ゲームに帰着することが知られている¹⁵⁾。

a) 基本設定

地域間モデルと同様の離散空間を仮定し、各立地点 $i \in \mathcal{K}$ に立地する消費者数を $h_i \geq 0$ と表現する。

b) 消費者の行動

短期均衡では消費者は立地点間を移動することは出来ず、各立地点で最適な財の消費量を決定する。消費者は地点によらず一定の賃金 w を得て、効用を最大化するように土地消費量 S_i と合成財消費量 z_i を決定する。さらに、消費者はこの都市内の全消費者と face-to-face のコミュニケーションを取る必要があり、その交通費用 T_i を支出する。効用関数を準線形と仮定すると、消費者の行動は以下の効用最大化問題として定式化できる：

$$v_i \equiv \max_{z_i, S_i \geq 0} u_i(z_i, S_i | \mathbf{h}) = z_i + f(S_i) \quad (17)$$

$$\text{s.t. } w \geq z_i + R_i \cdot S_i + T_i(\mathbf{h}) \quad (18)$$

$$\text{where } T_i(\mathbf{h}) = \sum_{j \in \mathcal{K}} D_{ij} \cdot h_j \quad (19)$$

ここに、 z_i は地点 i の消費者の合成財消費量、 S_i は地点 i の消費者の土地消費量、 R_i は地点 i の地代、 D_{ij} は

i, j 間の交通費用を表している。また、関数 f は狭義単調増加の凹関数で 2 階連続微分可能とする。

長期均衡では、短期均衡の結果決まる効用が最大となる立地点を選択する。すなわち、消費者の立地選択行動は $\max_{i \in \mathcal{K}} v_i$ と表せる。

c) 短期均衡

Beckmann モデルにおいて短期均衡は土地市場の問題であり、立地パターン \mathbf{h} を与件として、消費者の土地消費量が決定する。短期均衡は次のような最適化問題として表現可能である。

補題 1 短期均衡における土地消費量 $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_K)$ は以下の最適化問題の解と一致する：

$$Z^*(\mathbf{h}) \equiv \max_{\mathbf{S} \geq \mathbf{0}} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{K}} f(S_i | \mathbf{h}) \cdot h_i - \sum_i \int_{\mathbf{h}} T_i(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \right\} \quad (20)$$

$$\text{s.t. } \bar{S}_i \geq S_i h_i \quad \forall i \in \mathcal{K}. \quad (21)$$

ここに、 \bar{S}_i は地点 i の供給土地面積 (定数) である。制約条件のラグランジュ乗数として各地点の地代 R_i が決定する。また、 $Z^*(\mathbf{h})$ は短期均衡の最適値関数である。これは後述する根岸定理を適用した市場均衡の表現法である³⁾。なお、前章で示した Armington モデルとは異なり、コミュニケーション外部性が存在することに注意が必要である。

d) 長期均衡

長期均衡では短期均衡で決定した土地消費量 $\mathbf{S}(\mathbf{h})$ を与件として、消費者が立地を選択する。次の定理のように、長期均衡は短期均衡の最適値関数を用いて表現することができる。

定理 2 Beckmann モデルの長期均衡は以下の最適化問題の解と一致する：

$$\max_{\mathbf{h} \geq \mathbf{0}} Z^*(\mathbf{h}) \quad \text{s.t. } \sum_{i \in \mathcal{K}} h_i = H \quad (22)$$

定理 2 は包絡線定理を用いて証明することができる。短期均衡の問題 (式 (20),(21)) のラグランジアンを以下のように定義する：

$$L(\mathbf{S}, \mathbf{R}, \mathbf{h}) = \sum_{i \in \mathcal{K}} f(S_i) \cdot h_i - \sum_{i \in \mathcal{K}} \int_{\mathbf{h}} T_i(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} - R_i(S_i h_i - \bar{S}_i). \quad (23)$$

包絡線定理より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z^*(\mathbf{h})}{\partial h_i} &= \frac{\partial}{\partial h_i} L(\mathbf{S}, \mathbf{R}, \mathbf{h}) \\ &= f(S_i) - T_i(\mathbf{h}) - R_i \cdot S_i \\ &= v_i(\mathbf{h}) - w \end{aligned} \quad (24)$$

³⁾ 準線形効用関数を仮定したため、所得限界効用は一定である。そのため、根岸定理における厚生荷重は全ての i について等しい定数項となるため、目的関数には含まれない。

が成立する。式 (24) より、 $Z^*(\mathbf{h})$ は Beckmann モデルのポテンシャル関数である⁴。したがって定理 1 より、定理 2 が成り立つことが示される⁵。

(3) 短期均衡：厚生最大化問題

前節で示したように Beckmann モデル等の都市内モデルでは、短期均衡の社会厚生最大化問題と長期均衡の等価最適化問題 (i.e., ポテンシャル・ゲーム表現) との間の対応付けがなされている¹⁶。地域間モデルにおいても、社会厚生最大化と長期均衡との間に関係があると予想される。本節では、地域間モデルの厚生最大化問題としての表現について整理する。

完全競争市場において、短期均衡状態は効用関数を加重して集計した社会厚生関数の最大化問題としても表現可能である⁶。これは、Negishi¹⁷ 定理として知られる競争均衡の表現である。

定理 3 (根岸定理) 効用関数 $u_i, i = 1, \dots, n$ を \mathbb{R}_+^m 上で狭義単調かつ連続な凹関数とする。財の配分 $\mathbf{q}^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ は一般競争均衡、実行可能な配分の集合 \mathcal{F} は閉かつ凸とする。このとき、 \mathbf{q}^* が社会厚生関数 W の最大化問題

$$\max_{\mathbf{q} \geq \mathbf{0}} W = \sum_{i=1}^n c_i u_i(\mathbf{q}_i) \quad (25)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \in \mathcal{F} \quad (26)$$

の解となるような厚生荷重 $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}, \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ が存在する。さらに、厚生荷重 \mathbf{c} が均衡における所得の限界効用の逆数に比例するならば、式 (25),(26) の問題の解は一般競争均衡である。

以上の具体例を Armington モデルで示す。Armington モデルでは完全競争市場を仮定しており、根岸定理より、短期均衡状態は以下の最適化問題の解と一致する：

$$\max_{\mathbf{q} \geq \mathbf{0}} W(\mathbf{h}) = \sum_{j \in \mathcal{K}} c_j h_j U_j(\mathbf{q}_j | h_j) \quad (27)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in \mathcal{K}} \tau_{ij} q_{ij} h_j = h_i \cdot m_i. \quad (28)$$

制約条件は市場清算条件である。制約条件の左辺は地点 i で生産される財需要、右辺は地点 i の企業の財供給を表している。Armington モデルでは所得限界効用の逆数は価格指数 P_j と一致する。したがって、 $c_j = P_j$ ならば、式 (27),(28) の問題の解は一般競争均衡である。

⁴ 本モデルにおいて w は定数であるから、式 (24) の右辺は消費者の間接効用関数 v_i を単に平行移動したものに相当する。

⁵ この事実は式 (22) の問題の KKT 条件が長期均衡条件 (式 (13),(14)) と一致することからも確認できる。

⁶ ただし、独占的競争市場では、単純な厚生関数の最大化としては表現出来ない。独占的競争による価格マークアップ分の金銭的外部性の項が加わると予想される。

(4) 長期均衡のポテンシャル・ゲーム表現

都市内モデルのポテンシャル・ゲーム表現の上でポイントとなったのは次の 2 点である：(1) 長期均衡のポテンシャル関数が短期均衡の最適値関数と一致する、(2) 短期均衡の目的関数は“効用関数の加重和”+“外部性 (Beckmann モデルにおける $T_i(\mathbf{h})$)”で構成される。外部性の項について、 \mathbf{h} で積分できることが、ポテンシャル・ゲームになるための必要条件である。

本研究の対象とする Universal gravity 型のモデルも同様の構造を持つ。具体的には、短期均衡の問題において、効用関数の加重和の部分はモデルによらず共通して現れる。一方で、外部性についてはモデル依存であり、外部性の項の積分可能性について個別のモデル毎に議論する必要がある。

外部性を表す $\mathbf{T}(\mathbf{h})$ のヤコビアン $\nabla \mathbf{T}(\mathbf{h})$ が対称行列であれば \mathbf{h} について積分可能である。このとき、効用関数 $U_i(\mathbf{q} | \mathbf{h})$ の加重和を \mathbf{q} について最大化した社会厚生の最適値関数 $W(\mathbf{h})$ を用いて、長期均衡は以下のようなポテンシャル・ゲームとして表現できる：

$$\max_{\mathbf{h} \geq \mathbf{0}} \left\{ W(\mathbf{h}) + \int_{\mathbf{h}} \mathbf{T}(\omega) d\omega \right\} \quad (29)$$

$$\text{s.t. } \sum_{i \in \mathcal{K}} h_i = H. \quad (30)$$

発表では、個別の地域間モデルについて具体的な分析結果を示す予定である。

4. おわりに

本研究では、地域間モデルのポテンシャル・ゲーム表現について理論的検討を行った。具体的には、問題を短期均衡と長期均衡に分解し、短期均衡の最適値関数と長期均衡のポテンシャル関数に関係性があることが示された。

今後の展望としては、地域間と都市内の相互作用を考慮したマルチ・スケール・モデルへと理論を展開することが考えられる。具体的には、地域間モデルと都市内モデルを統合的に組み合わせることによって、異なるスケールにおける集積現象を表現可能であると考えられる。さらに、ポテンシャル・ゲームとして表現可能なモデルを構築すれば、均衡解の安定性解析も実行可能であると考えられる。

参考文献

- 1) Allen, T., Arkolakis, C. and Takahashi, Y.: Universal Gravity, *Journal of Political Economy*, in press, 2019.
- 2) 山口修平, 赤松隆: 複数都心形成モデルの確率安定性解析—線分都市 vs. 円周都市—, 土木学会論文集 D3(土木計画学), Vol.75, No.2, pp.109-127, 2019.
- 3) Fujita, M. and Ogawa, H.: Multiple equilibria and structural transition of non-monocentric urban config-

- urations, *Regional science and urban economics*, Vol. 12, No.2, pp. 161-196, 1982.
- 4) Allen, T. and Arkolakis, C.: Trade and the Topography of the Spatial Economy, *The Quarterly Journal of Economics*, pp.1085-1139, 2014.
 - 5) Armington, P. S.: A Theory of Demand for Products Distinguished by Place of Production, *International Monetary Fund Staff Papers*, Vol.16, pp.159-178, 1969.
 - 6) Krugman, P.: Increasing Returns and Economic Geography, *The Journal of Political Economy*, Vol.99, No.3, pp.483-499, 1991.
 - 7) Eaton, J., and S. Kortum : Technology, Geography and Trade, *Econometrica*, Vol.70, No.5, pp.1741-1779, 2002.
 - 8) Beckmann, M. J.: Spatial equilibrium in the dispersed city, in Papageorgiou, Y. Y. ed., *Mathematical Land Use Theory*, Lexington Book, 1976.
 - 9) Osawa, M.: *Monocentric and Polycentric Patterns in the Spatial Economy: A Unification of Intra-city and Inter-regional Theories*, PhD thesis, Doctoral Dissertation, Graduate School of Information Sciences, Tohoku University, 2016.
 - 10) Sandholm, W. H.: *Population games and evolutionary dynamics*, MIT press, 2010.
 - 11) Akamatsu, T., Takayama, Y. and Ikeda, K. : Spatial discounting, Fourier, and racetrack economy: A recipe for the analysis of spatial agglomeration models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.36, No.11, pp.1729-1759, 2012.
 - 12) Ikeda, K., Akamatsu, T. and Kono, T.: Spatial period - doubling agglomeration of a core - periphery model with a system of cities, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.36, No.5, pp.754-778, 2012.
 - 13) Akamatsu, T., Mori, T., Osawa, M. and Takayama, Y.: Spatial Scale of Agglomeration and Dispersion: Theoretical Foundations and Empirical Implications, *RIETI Discussion Paper Series*, 17-E-125, 2017.
 - 14) Sandholm, W. H.: Potential games with continuous player sets, *Journal of Economic Theory*, Vol.97, No.1, pp.81-108, 2001.
 - 15) Akamatsu, T., Fujishima, S. and Takayama, Y.: Discrete space Agglomeration Models with Social Interactions: Multiplicity, Stability, and Continuous Limit of Equilibria, *Journal of Mathematical Economics*, Vol.69, pp.22-37, 2017.
 - 16) 山口修平, 赤松隆: 土地・労働市場均衡を内生化した空間経済モデルのポテンシャル・ゲーム表現, 土木計画学研究・講演集 (CD-ROM), Vol.58, 2018.
 - 17) Negishi, T.: Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy, *Metroeconomica*, Vol.12, No.2-3, pp.92-97, 1960.

(2019. 10. 4 受付)

POTENTIAL GAME REPRESENTATION OF THE UNIVESAL GRAVITY
SPATIAL ECONOMIC MODELS

Shuhei YAMAGUCHI and Takashi AKAMATSU