階層原理を再現しうる多産業立地均衡モデル

小林 明生[1]・赤松 隆[2]

[1]学生員　東北大学　工学部建築・社会環境工学科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408）
E-mail: akio.kobayashi.r2@dc.tohoku.ac.jp
[2]正会員　東北大学教授　大学院情報科学研究科人間社会情報科学専攻（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408）
E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

都市における空間規則性の 1 つとして，大都市の産業が小都市の産業を部分集合として含むという都市の階層原理が挙げられる (e.g., Christaller, Lösch)．現実の都市で観察される規則性を満たす立地モデルは，地域都市政策を分析する定量モデル開発の最低要件である．しかし階層原理を再現するモデルの条件は未解明である．本研究では，近年の理論研究から，以下の条件を満たすモデルならば階層原理を再現しうるという仮説を示す：1) 空間距離に依存する分散力の存在，2) 産業ごとに異なる空間スケールの設定，3) 産業間の集積力の存在．そしてこの仮説を証明する．具体的には高山・赤松 (2011) の企業間の空間競争を考慮した Social Interaction モデルを多産業に拡張し，確率安定性解析により階層化を示す．

Key Words: 集積の経済，産業構造の階層性，産業立地，確率安定性解析，ポテンシャル・ゲーム

1.　はじめに

近年，地方都市の産業空洞化や東京一極集中など，産業構造の複雑な変化に対して，様々な地域都市政策が実行されている．このような政策を分析する上で，産業構造の変化等を考慮した立地モデルが求められている．尤もらしい定量モデルを開発するための最低要件は，現実の都市空間で観察される規則性の再現である．多くの国や地域において実証的に確認されている規則性の例として，都市規模の頻度分布がべき乗分布に従うという Rank Size rule が挙げられる．また，近年の研究では，各産業が成立する都市数とその平均人口規模の対数線形関係である Number-Average Size rule(NAS rule) [1)] が示されている．特に NAS rule は，日本の産業データにおいて非常に頑健な規則性を有している．しかし，今挙げた全ての規則性を同時に示す立地モデルは存在しない．

これらの全ての規則性を再現するためには，都市の階層原理が重要である．都市の階層原理とは，大都市の産業は小都市の産業を部分集合として含むという原理である (e.g., Christaller [2)], Lösch [3)])．階層原理もまた，現実の都市で観察される規則性の 1 つであるが，特に空間に関する情報を含んでいる．階層原理が再現されることで，都市によって異なる産業数が実現し，都市規模が変化しうるため，Rank Size rule 等の再現にも発展しうる．さらに，階層原理と NAS rule をともに満たすならば，Rank Size rule も満たすことが示されている [1)]．したがって，階層原理を示すモデルの開発が，階層原理，NAS rule，Rank Size rule の全規則性を再現するモデルの開発につながる．

近年，新経済地理学 (NEG) 分野において階層原理の再現が試みられているが，階層原理を示すためのモデルの条件は未解明である．Fujita et al. [4)] は，連続空間・多産業 CP モデルにおいて総人口が増加する状況下で産業構造が階層化することを示した．しかし，数値計算により均衡解を示すのみであり，またモデルが複雑なため，各産業の集積分散メカニズムが不明瞭である．Tabuchi and Thisse [5)] は，離散空間・多産業 CP モデルにおいて，輸送費用の低下に伴う均衡解の分岐により階層化を示したが，Fujita et al. と同様にメカニズムが不明瞭である．高山・赤松 [6)] は離散空間・コミュニケーション外部性を考慮した多産業立地モデルにおいて，解析的に階層化を証明している．しかし，4 立地点 2 産業の証明にとどまるため限定的である．また，均衡解の局所安定性を議論しているが，局所安定解は複数存在しうるという問題がある．

しかし，近年の理論研究により，集積の経済を考慮した立地均衡モデル (以下，集積経済モデルと呼ぶ) の集積分散メカニズムの知見が蓄積されてきた．後述するが，これらの知見から，以下の条件を満たすモデルならば階層原理を再現しうるという仮説が得られる：

1) 空間距離に依存する分散力の存在，
2) 産業ごとに異なる空間スケールの設定，
3) 産業間の集積力の存在．

1) によって各産業の企業の安定均衡解が多峰パターンを示し，2) の設定から産業ごとに異なる集積間隔が生じる．そして 3) の産業間相互作用によって，各産業

が同期するために大都市において全産業が集積し，階層原理を再現しうると考えられる．

本研究の目的は，以上の仮説を証明することである．本研究では，上記の性質をもったミクロ経済学的基礎のある多産業立地モデルの具体例を示し，このモデルが階層原理を再現することを示す．具体的には，高山・赤松 [6] の企業間の空間競争を考慮した Social Interaction モデルを多産業に拡張する．以下，拡張したモデルを多産業 SISC モデルと呼ぶ．多産業 SISC モデルは複数均衡が生じうるため，大域的に唯一な均衡解の選択手法である確率安定性解析 [8] を適用する．解析の際には，ポテンシャル・ゲームの性質を利用する．

本稿の構成を以下に示す．第 2 章では，多産業立地モデルを一般的な形式で定義し，上記の仮説について詳細を説明する．第 3 章では，仮説の条件を満たすモデルの具体例として多産業 SISC モデルを示し，詳細な関数形を定義する．第 4 章では，多産業 SISC モデルをポテンシャル・ゲームとして解釈する．また確率安定性を定義し，ポテンシャル・ゲームの性質を利用すると容易に解析が実行可能であることを示す．第 5 章では，確率安定解の特定方法を説明する．第 6 章において，数値計算により産業構造が階層化するという結果を示す．最後に，第 7 章で結論と今後の展望を述べる．

2. モデルの基本設定と仮説

本章では，階層原理を再現しうる最小構成の多産業立地モデルを示す．そのために，まず一般的な形式で多産業立地均衡モデルを定義する．そして，階層原理を再現しうるモデルの仮説を示す．これは，条件を満たす場合に詳細な関数形によらず階層原理が頑健に成立すると予想されることを示すためである．

(1) 基本設定

離散な K 個の立地点が存在する都市を想定する．立地点の集合を $\mathcal{K} = \{0, 1, ..., K-1\}$ とする．立地点間の空間距離構造を，空間割引行列 $\boldsymbol{D} = [d_{ij}(\phi)]$ によって表現する．$d_{ij} \in (0, 1)$ は立地点 i, j 間の空間的な相互作用の強度を示す．また，ϕ は交通費用であり，輸送技術の水準を表現する．

立地主体は I 種類の産業に分類される企業である．産業の集合を $\mathcal{I} = \{0, ..., I-1\}$ とし，産業 $i \in \mathcal{I}$ の総企業数は一定数 $N^{(i)}$ とする．産業 i の企業の空間分布を $\boldsymbol{n}^{(i)} \equiv (n_k^{(i)})_{k \in \mathcal{K}} \geq 0$ と表現する．全産業の企業分布は $\boldsymbol{n} \equiv (\boldsymbol{n}^{(i)})_{i \in \mathcal{I}}$ とする．

企業は自らの利潤を最大化するように立地点を選択する．企業分布 $\boldsymbol{n}$ を所与とした場合に各立地点において産業 i の企業が得る利潤を $\boldsymbol{\Pi}^{(i)}(\boldsymbol{n}) = (\Pi_k^{(i)}(\boldsymbol{n}))_{k \in \mathcal{K}}$ とする．全産業の利潤は $\boldsymbol{\Pi} = (\boldsymbol{\Pi}^{(i)})_{i \in \mathcal{I}}$ と表現する．

(2) 均衡条件

多産業立地モデルの均衡状態は，以下の条件が同時に満たされた状態である：

$$\begin{cases} \Pi^{*(i)} - \Pi_k^{(i)}(\boldsymbol{n}) = 0 & \text{if} \quad n_k^{(i)} > 0 \\ \Pi^{*(i)} - \Pi_k^{(i)}(\boldsymbol{n}) > 0 & \text{if} \quad n_k^{(i)} = 0 \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{I} \tag{1}$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} n_k^{(i)} = N^{(i)} \quad \forall i \in \mathcal{I} \tag{2}$$

ここで，$\Pi^{*(i)}$ は内生的に決定する均衡利潤である．

式 (1) は企業の立地選択に関する無裁定条件である．各産業において，企業が立地選択に関して均衡状態にあるならば，どの企業も立地点変更の動機を持たない．式 (2) は各産業における企業数の保存則である．

(3) 階層原理を再現しうるモデルの仮説

階層原理を再現するためにはまず，各産業において企業分布が多峰パターン (i.e., 複数都心) となる均衡解を示す必要がある．なぜなら，モデルの均衡解が単峰パターン (i.e., 単一都心) または分散状態では階層原理は生じ得ないからである．

モデルの安定均衡解の性質は，モデルの利潤関数に依存する．まず，これまで提案されてきた集積経済モデルは，モデルの利潤関数に集積力，局所分散力，大域分散力に対応する項が存在することが知られている [9]．ここで，集積力とは分散状態の不安定化を意味し，集積の経済を指す．一方，分散力とは分散状態の安定化を意味し，集積の不経済を指す．空間距離に依存する分散力を大域分散力，依存しない分散力を局所分散力と呼ぶ．

そして，モデルの利潤関数に大域分散力が存在する場合に，立地主体の安定均衡解が多峰パターンを示す [9]．大域分散力が存在しないならば，モデルの均衡解は単峰パターンまたは一様分散パターンを示し多峰パターンにはならない．したがって，階層原理を示すためにはモデルの利潤関数に大域分散力を要する．具体的には，集積経済モデルは利得関数の大域分散力，局所分散力の有無により 3 つのクラスに分類されており [9]，大域分散力のみ存在するクラス I，大域分散力と局所分散力ともに存在するクラス III のモデルを利用すればよい．クラス I のモデルとして Krugman [11] や Pflüger [12]，クラス III のモデルとして Tabuchi [13] などが挙げられる．本研究では，大域分散力と集積力のみで階層原理を再現しうることを示すために，クラス I のモデルを採用する．

次に，階層原理を再現するためには，各産業の集積

間隔が異なる必要がある．ここで，集積経済モデルでは，交通費用 ϕ(i.e., 空間スケール) の変化に対して，均衡解の分岐により，立地主体の集積間隔 (i.e., 空間周波数) が変化することが知られている [9]．したがって，産業 i の空間距離行列 $\boldsymbol{D}^{(i)} \equiv [d_{ij}(\phi^{(i)})]$ とおき，$\phi^{(i)} \neq \phi^{(j)} \forall i, j \in \mathcal{I}$ とすれば，各産業における空間周波数が変化する．すなわち，産業ごとに異なる空間スケールを設定する必要がある．

最後に，階層原理を再現するためには，大都市において全産業が集積する必要がある．このためには，空間周波数の異なる各産業が同期していることが重要である．産業間に集積力を導入することによって，産業間の同期が生じると考えられる．

したがって，階層原理を再現しうるモデルの最低限の条件について，仮説が以下の形で与えられる．

仮説 1 (階層原理を再現しうるモデルの条件)．モデルが以下の条件を満たすならば，階層原理を再現しうる．

1) モデルの利潤関数に集積力と大域分散力のみが存在する．すなわち，クラス I に分類される集積経済モデルである．

2) 各産業の空間割引行列が $\boldsymbol{D}^{(i)} \equiv [d_{ij}(\phi^{(i)})]$ で与えられ，$\phi^{(i)} \neq \phi^{(j)} \forall i, j \in \mathcal{I}$ である．すなわち，産業ごとに異なる空間スケールが設定されている．

3) 産業間に集積力が存在する．

3. 多産業 SISC モデル

本章では，仮説の条件を満たす具体例を示す．高山･赤松による企業間の空間競争を考慮した Social Interaction モデル [7] を多産業に拡張する．多産業 SISC モデルは，高山･赤松 [6] によるモデルの産業間相互作用の非対称性の仮定を取り除き，地代を考慮しない場合に相当する．

(1) 企業の利潤関数

全ての企業は，都市内の全ての企業とのコミュニケーションにより，価格一定の財を一定量 q 生産すると仮定する．企業は産業ごとに異なる 1 種類の財を生産する．財の価格が $p = 1$ となるように生産量の単位を基準化すると，産業 i の企業の利潤最大化行動は次のように表される：

$$\max_k \Pi_k^{(i)} = \sum_{j \in \mathcal{I}} q_{jk}^{(i)} - T_k^{(i)}. \tag{3}$$

ここで，$T_k^{(i)}$ は立地点 k にいる産業 i の企業の企業間のコミュニケーションに必要な交通費用である．この交通費用は，立地点 k, l 間の距離抵抗 d_{kl} により次のように定義される：

$$T_k^{(i)} \equiv \sum_{j \in \mathcal{I}} \sum_{l \in \mathcal{K}} d_{kl}^{(i,j)} n_l^{(i)}. \tag{4}$$

距離抵抗 d_{kl} は，指数型の関数形を仮定する：

$$d_{kl}^{(i,j)} \equiv \mu^{(i,j)} \{1 - \exp[-\tau c(k, l)]\}, \tag{5}$$

ここで，$c(k, l)$ は立地点 i, j 間の距離，τ は交通費用の大きさを表すパラメータである．また，$\mu^{(i,j)}$ は産業 i の企業に必要な産業 j の企業とのコミュニケーション費用の大きさ (e.g., 頻度) を表すパラメータであり，産業間の相互作用の違いを表す．

次に，多産業 SISC モデルでは大域分散力の導入のため，消費者の行動を内生化し，企業間の空間競争を考える．消費者は，立地点間を移動せず，各立地点に均等に一定人口 m 存在する．各消費者は，交通費用 $\tau c(k, l)$ に従い，各産業の財を購入する立地点 k について logit 型の選択を行う．このとき，立地点 k における立地点 l，産業 i の企業の財の需要量は以下のように表せる：

$$q_{kl}^{(i)} = \frac{\exp[\eta^{(i)} \tau c(k, l)]}{\sum_{d \in \mathcal{K}} n_k^{(i)} \exp[\eta^{(i)} \tau c(k, d)]} m \tag{6}$$

ここで，$\eta^{(i)} \in [0, \infty)$ は消費者の異質性を反映したパラメータ (e.g., 消費者が財を購入する立地点の遠さ) である．

以上より，立地点 k での産業 i の利潤関数は，定数項を除くと次のように表される：

$$\Pi_k^{(i)} = \sum_{l \in \mathcal{K}} q_{lk}^{(i)} + \sum_{j \in \mathcal{I}} \mu^{(i,j)} \Delta_k^{(j)}, \tag{7}$$

$$\Delta_k^{(j)} \equiv \sum_{l \in \mathcal{K}} n_l^{(j)} \exp[-\tau c(k, l)]. \tag{8}$$

利潤関数をベクトル表記するために，空間割引行列 $\boldsymbol{D}, \hat{\boldsymbol{D}}^{(i)}$ を導入する．この行列は，k, l 要素 $d_{kl}, \hat{d}_{kl}^{(i)}$ がそれぞれ

$$d_{kl} \equiv \exp[-\tau c(k, l)] \tag{9}$$

$$\hat{d}_{kl}^{(i)} \equiv \exp[-\eta^{(i)} \tau c(k, l)] \tag{10}$$

で与えられる行列である．

以上より，利潤関数は

$$\boldsymbol{\Pi}^{(i)}(\boldsymbol{n}) = m \hat{\boldsymbol{D}}^{(i)\mathrm{T}} (\mathrm{diag}[\hat{\boldsymbol{D}}^{(i)} \boldsymbol{n}^{(i)}])^{-1} \mathbf{1} + \sum_{j \in \mathcal{I}} \mu^{(i,j)} \boldsymbol{D} \boldsymbol{n}^{(j)} \tag{11}$$

となる．

第 1 項に空間距離に依存した分散力，第 2 項に集積力が導入されていることがわかる．このモデルはクラス I に分類される．

さらに，$\eta^{(i)} \neq \eta^{(j)} \forall i, j \in \mathcal{I}$ とした場合，大域分散力に産業ごとに異なる空間スケールが設定される．$\eta^{(i)}$ は消費者の異質性パラメータであるが，式 (9) より交通費用パラメータ τ を定数倍することに対応する．$\phi^{(i)} = \eta^{(i)} \tau$ とおくことで仮説と対応づけられる．

そして，第 2 項の集積力において，産業間の集積力が含まれている．

4. 確率安定性とポテンシャル・ゲーム

以降では，多産業 SISC モデルの均衡立地パターンを分析し，階層原理を再現するか証明を行う．多産業 SISC モデルでは複数の均衡解が生じ，また実現可能性の低い不安定解が含まれるため，均衡選択を要する．安定性の概念として局所安定性が挙げられるが，局所安定解も複数存在しうる．そこで本研究では，大域的に唯一な均衡解が選択可能な確率安定性を採用する．確率安定性解析は，ポテンシャル・ゲームの性質を利用し容易に実行できる．確率安定性解析の手法は Osawa and Akamatsu [14] や山口・赤松 [8] を参考にする．ポテンシャル・ゲームや確率安定性の詳細な定義は以上の文献を参考にされたい．

本章では，まず (1) で多産業 SISC モデルをポテンシャル・ゲームとして表現する．(2) において確率安定性を定義し，(3) において確率安定状態とポテンシャル関数の関係を説明する．

(1) 多産業 SISC モデルのポテンシャル・ゲーム表現

ポテンシャル・ゲームとは，利得関数のベクトル場にポテンシャルが存在するモデルである．

多産業 SISC モデルでは，$\mu^{(i,j)} = \mu^{(j,i)}$ の場合 (i.e., 産業間の相互作用が対称の場合)，利潤関数のベクトル場のヤコビ行列が対称となるので，ポテンシャル・ゲームとして解釈可能であり，以下の命題が得られる：

命題 1. $\mu^{(i,j)} = \mu^{(j,i)}$ ならば，多産業 SISC モデルの空間均衡状態は，企業分布 $\boldsymbol{n} \equiv [n_k^i]$ の変数を持つ最適化問題の解と一致する：

$$\max_{\boldsymbol{n}} Z(\boldsymbol{n}) = \oint_{\boldsymbol{0}\to\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \tag{12}$$

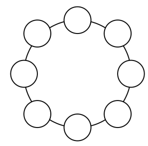
$$= \sum_{i\in\mathcal{I}}(m \sum_{k\in\mathcal{K}} \log(\sum_{l\in\mathcal{K}} \hat{d}_{kl}^{(i)} n_l^{(i)}) + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{I}} \mu^{(i,j)} \sum_{k\in\mathcal{K}}\sum_{l\in\mathcal{K}} d_{kl} n_k^{(i)} n_l^{(j)}) \tag{13}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k\in\mathcal{K}} n_k^{(i)} = N^{(i)} \quad \forall i, \quad n_k^{(i)} \geq 0 \quad \forall k, i \tag{14}$$

ここに，$\boldsymbol{\Pi} \equiv (\boldsymbol{\Pi}^{(i)})_{i\in\mathcal{I}}$ である．Sandholm [15] によると，モデルの均衡条件を満たす集合は，ポテンシャル最大化問題の Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす状態の集合と一致する．この証明は付録 1 に示す．

(2) 確率安定性の定義

まず，確率安定性の定義のために，確率的進化ダイナミクスを考える．これは，モデルの状態空間を離散化し，エージェントが確率的に戦略を変更すると考えた状況下でのダイナミクスである．マルコフ連鎖で表され，このマルコフ連鎖がエルゴード的であるならば，定常分布が一意に定まる．



図–1: 円周都市

次に，確率安定性を定義する．確率的進化ダイナミクスの定常分布における企業分布 $\boldsymbol{n}$ が実現する確率を $\pi_{\boldsymbol{n}}$ とする．確率安定状態 $\boldsymbol{n}^*$ は，ダイナミクスの確定的極限，連続的極限をとったときの定常確率が $\pi_{\boldsymbol{n}^*} > 0$ となる状態と定義される．

(3) 確率安定状態とポテンシャル・ゲーム

一般的な集団ゲームでは，起こりうる全ての状態を列挙しその定常確率を求める必要があるため，確率安定状態の特定は困難である．しかし，ポテンシャル・ゲームであれば，Sandholm [15]，Wallace and Young [16] に示されている次の定理を利用した解析が可能である．

定理 1 (確率安定性とポテンシャル・ゲーム)**.** ポテンシャル関数 Z をもつポテンシャル・ゲームを考える．状態 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ がポテンシャル関数 Z を大域的に最大化するならば，状態 $\boldsymbol{x}$ は確率安定である．

均衡解が列挙可能なポテンシャル・ゲームであれば，定理 1 より，ポテンシャル関数を最大化する状態が確率安定解であると特定可能である．

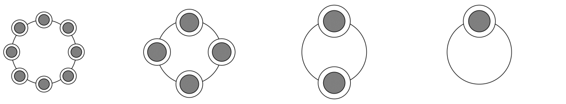
5. 確率安定解の特定

本章では，確率安定性解析を多産業 SISC モデルに適用する．確率安定性解析では，まず均衡解の列挙を行い，各均衡解のポテンシャル関数値を計算する．そして，ポテンシャル関数値が最大となる均衡解を確率安定解とする．解析の準備として，(1) において円周都市を仮定する．次に (2) において，多産業 SISC モデルの場合に列挙する均衡解を説明する．そして (3) において，確率安定解の特定アルゴリズムを説明する．

(1) 空間設定

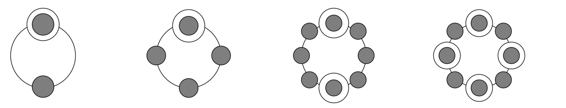
以降の解析では，図–**1** に示す円周都市を仮定する．都市構造による外生的要因の影響を取り除けるため，モデル自体の持つ本質的な特性を調べることが可能になり，また，均衡解の列挙も容易となる．円周都市における立地点 i, j 間の距離 $c(i,j)$ は，次のように表される：

$$c(i,j) \equiv (2\pi/K)\min\{|i-j|, K-|i-j|\}. \tag{15}$$



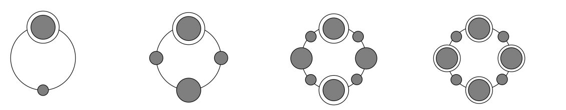
(a) 分散・分散 (b) 4 極・4 極 (c) 2 極・2 極 (d) 1 極・1 極

図–2: 自明解の例 (2 産業 8 都市)



(a) 2 極・1 極 (b) 4 極・1 極 (c) 8 極・2 極 (d) 8 極・4 極

図–3: 産業 0,1 の極数が異なる対称集積パターンの例 (2 産業 8 都市)



(a) 2 極・1 極 (b) 4 極・1 極 (c) 8 極・2 極 (d) 8 極・4 極

図–4: 非自明解の例 (2 産業 8 都市)

(2) 均衡解の列挙

まず，均衡解の列挙の準備として，対称集積パターンを定義する．対称集積パターンとは，対称性が見出され，各産業において企業が存在する各立地点の企業数が等しい集積パターンである．

本研究において，多産業 SISC モデルの均衡解として，自明解と対称集積パターンに対応する非自明解を列挙する．ここで，自明解とはモデルパラメータに依存しない均衡解であり，そうでないものは非自明解と呼ぶ．円周都市の場合，均衡解として基本的には自明解の列挙を行う．なぜなら，既往研究で示されている安定均衡解の大半は自明解 [17] だからである．しかし，多産業 SISC モデルの場合，産業間の相互作用のために産業 0,1 の極数が異なる対称集積パターンが自明解とならない．そのため，これらの対称集積パターンに対応する非自明解を列挙する．

a) 自明解

多産業 SISC モデルにおいて，図–**2** に示すように，産業 0,1 の極数が等しい対称集積パターンは自明解である．

b) 対称集積パターンに対応する非自明解

図–**3** に産業 0,1 の極数が異なる対称集積パターンを示し，その対応する非自明解を図–**4** に示す．上位産業に引き寄せられるように下位産業の企業分布が変化する．

これらの非自明解は進化ダイナミクスによって数値的に算出可能である．進化ダイナミクスとは，進化ゲーム理論における均衡解への動的な調整過程である．

本研究ではロジット・ダイナミックを適用する．ロジット・ダイナミックでは各企業が動的に利得に従いロジット型の立地点選択を行う．立地点 k を選択する産業 i の企業の割合 $P_k^{(i)}(\boldsymbol{n})$ は以下の式で与えられる：

$$P_k^{(i)}(\boldsymbol{n}) \equiv \frac{\exp[\theta^{(i)}\Pi_k^{(i)}(\boldsymbol{n})]}{\sum_{d\in\mathcal{K}}\exp[\theta^{(i)}\Pi_d^{(i)}(\boldsymbol{n})]}. \tag{16}$$

ここで，$\theta^{(i)}$ は企業の異質性パラメータである．この選択確率を用いて，ロジット・ダイナミックは以下の常微分方程式で与えられる：

$$\dot{\boldsymbol{n}}^{(i)}(t) \equiv \mathrm{diag}[N^{(i)}\mathbf{1}]\boldsymbol{P}^{(i)}(\boldsymbol{n}(t)) - \boldsymbol{n}^{(i)}(t), \tag{17}$$

$$\text{where} \quad \boldsymbol{P}^{(i)} \equiv [P_0^{(i)}(\boldsymbol{n}), P_1^{(i)}(\boldsymbol{n}), ..., P_{K-1}^{(i)}(\boldsymbol{n})]. \tag{18}$$

ロジット・ダイナミックでは，企業の異質性パラメータが十分大きい場合 ($\theta^{(i)} \to \infty \forall i \in \mathcal{I}$) に，ダイナミックの停留点は均衡条件を満たし，かつ局所安定である [15]．

進化ダイナミクスは上記のように多くの場合常微分方程式で表され，数値解法によって停留点を求めることが可能である．対称集積パターンを初期値とした進化ダイナミクスの停留点が対応する非自明解である．

(3) 確率安定解の特定アルゴリズム

定理 1 より，全ての均衡解のポテンシャル関数値を計算し，ポテンシャルを最大化する均衡解を選択することで，確率安定解の特定が可能である．したがって，次のようなアルゴリズムで確率安定解を特定可能である．

確率安定解の特定アルゴリズム

Step.1 **モデルパラメータの入力**
パラメータ $m, \eta^{(i)}, \mu^{(i,j)}, N^{(i)}$ を入力する．

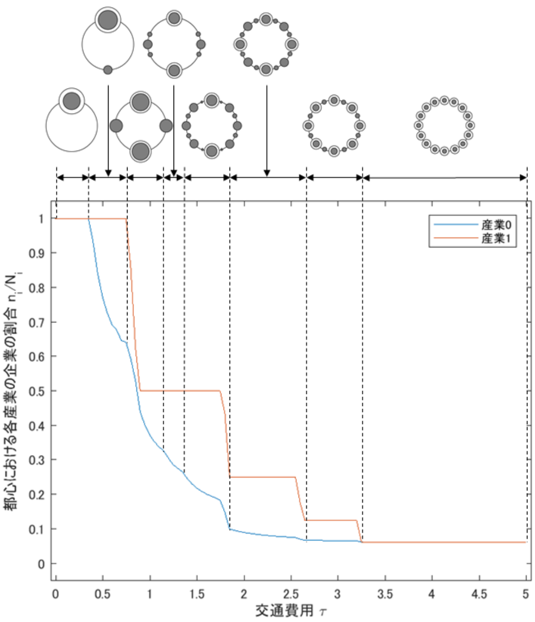
Step.2 **均衡解の列挙**
対称集積パターンを列挙し，産業 0,1 の極数が等しいならばそのパターンを自明解とする．そうでなければ，そのパターンを初期値として進化ダイナミクスの停留点を数値的に求め，非自明解とする．

Step.3 **ポテンシャル関数値の計算**
各均衡解のポテンシャル関数値を計算する．

Step.4 **確率安定解の出力**
ポテンシャルが最大の均衡解を確率安定解として出力する．

6. 数値実験例

本章では，第 2 章の仮説の条件を満たし，クラス I のモデルである多産業 SISC モデルの確率安定解が階層原理を再現することを示し，仮説を証明する．特に空間スケールと立地パターンの関係性を明らかにするため，



図–5: 確率安定解の分岐図

交通費用パラメータ τ を網羅的に変化させ，数値計算によって，確率安定解を示す．本研究では，2 産業 16 都市の場合を示す．

各産業において，消費者の財購入地点の選択の異質性が異なる場合 $(\eta^{(0)} = 1.0, \eta^{(1)} = 0.5)$ を想定する，すなわち，産業 0 の財よりも産業 1 の財の方が消費者が遠くの立地点で購入しやすい．産業 0 について空間スケールを 0.5 倍することに対応する．その他のパラメータを $m = 16.0, \mu^{(0,0)} = \mu^{(1,1)} = 1.0, \mu^{(0,1)} = \mu^{(1,0)} = 0.5, N^{(0)} = N^{(1)} = 8.0, \theta^{(0)} = \theta^{(1)} = 1000.0$ と設定する．

2 産業 16 都市のケースの多産業 SISC モデルの安定性解析の結果を**図–5** に示す．縦軸に都心 k(i.e., 企業数が最大の立地点) における各産業の企業の割合 $n_k^{(i)}/N^{(i)}$，横軸に交通費用 τ を取っている，

2 産業 16 立地点の場合には，階層構造が創発することが確認できる．まず，産業 0,1 が 1 極・1 極の状態から，交通費用 τ の増加に伴い，産業 0 が多峰パターンに変化し，確率安定解が 1 極・2 極に変化している．その後，解がさらに分岐し，最終的に分散・分散状態となる．

仮説の条件によって，階層原理が再現されている．まず，均衡解が分岐し，各産業の集積間隔が異なっている．これは，モデルに大域分散力が存在し，かつ産業ごとに空間スケールが異なるためである．そして，産業間の集積力によって産業間の同期現象が生じ，大都市において全産業が集積している．

7. 終わりに

本研究では，多産業立地モデルの利潤関数に空間距離に依存した分散力，産業間の集積力が存在し，産業ごとに空間スケールが異なるならば階層原理が再現されることを示した．クラス I のモデルである多産業 SISC モデルを定式化し，2 産業 16 立地点の特定のパラメータのケースについて確率安定解を数値実験により示した．そして，均衡解の分岐により階層原理が生じることが確認された．NAS rule や Rank Size rule の検証のためには，より一般的な，多立地点 (e.g., 64,128 都市) や 3 産業以上のケースにおいても階層原理が生じるか調べる必要がある．

また，本研究では高山・赤松 7) の SISC モデルを拡張し証明を行ったが，他の集積経済モデルにおいても大域分散力の存在するクラスであれば，同様に階層原理を再現しうると考えられる．利潤関数が異なる関数形の場合の均衡立地パターンを分析し，頑健性を確認することも今後の課題である．

付録 I　命題 1 の証明

命題 1 に示した最適化問題の KKT 条件が 2.(2) の均衡条件と等価であることを示す．式 (12) の最適化問題のラグランジアン関数を以下のように定義する：

$$L(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\Pi}^*) = Z(\boldsymbol{n}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \Pi^{*(i)} \left(N^{(i)} - \sum_{k \in \mathcal{K}} n_k^{(i)} \right) \tag{I.1}$$

$$\text{s.t.} \quad n_i \geq 0, \Pi^{*(i)} \geq 0 \tag{I.2}$$

ただし，$\boldsymbol{\Pi}^* \equiv [\Pi^{*(i)}]$ はラグランジュ乗数である．このラグランジアン関数の 1 階条件は,

$$\begin{cases} n_k^{(i)} \cdot \frac{\partial L}{\partial n_k^{(i)}} = 0 \\ n_k^{(i)} \geq 0, \frac{\partial L}{\partial n_k^{(i)}} \leq 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{S}, k \in \mathcal{K} \tag{I.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Pi^{*(i)}} = N^{(i)} - \sum_{k \in \mathcal{K}} n_k^{(i)} = 0 \quad \forall i \tag{I.4}$$

$$\text{where} \quad \frac{\partial L}{\partial n_k^{(i)}} = \sum_{l \in \mathcal{K}} q_{lk}^{(i)} + \sum_{j \in \mathcal{I}} \mu^{(i,j)} \sum_{l \in \mathcal{K}} d_{kl} n_l^{(j)} - \Pi^{*(i)} \tag{I.5}$$

である．ただし式 (I.5) の導出のために，$\mu^{(i,j)} = \mu^{(j,i)}$ を利用した．

式 (I.3) は企業の立地選択の空間均衡条件 (1) と一致

する．式 (I.4) は企業の数量保存則 (2) と等価である．

参考文献

1) Mori, T., Nishikimi, K. and Smith, T.E.: The Number-average Size Rule: A New Empirical Relationship Between Industrial Location and City Size, *Journal of Regional Science*, Vol.48, pp.165-211, 2008.
2) Christaller, W.: *Die Zentralen Orte in Süddeutschland*, Fischer, Jena, 1933 (*Central Places in Southern Germany*, translated by C.W.Baskin, Prentice-Hall, Englewood Cliffis, N.J., 1966).
3) Lösch, A.: *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Gustav Fische, 1940 (*The Economics of Location*, translated by W. Woglom, New Haven, CT: Yale University Press, 1956).
4) Fujita, M., Krugman, P. and Mori, T.: On the Evolution of Hierarchical Urban Systems, *European Economic Review*, Vol.43, pp.209-251, 1999.
5) Tabuchi, T. and Thisse, J.F.: Self-Organizing Urban Hierarchy, *CHRJE discussion paper*, No. F-414, University of Tokyo, 2009.
6) 高山雄貴，赤松隆：一次元空間における産業構造の構造化メカニズム：コミュニケーション外部性を考慮した多産業立地モデルの分岐解析，土木計画学研究・論文集，Vol.27, No.2, pp.285-295, 2010.
7) 高山雄貴，赤松隆：空間競争を考慮した Social Interaction モデルによる複数都心の創発，土木学会論文集 D3, Vol.67, No.1, pp.1-20, 2011.
8) 山口修平・赤松隆：複数都心形成モデルの確率安定性解析ー線分都市 vs. 円周都市ー，土木学会論文集 D3（土木計画学），Vol.75, No.2, pp.109-127, 2019.
9) Akamatsu, T., Mori, T., Osawa, M. and Takayama, Y.: Spatial Scale of Agglomeration and Dispersion: Theoretical Foundations and Empirical Implications, *RIETI Discussion Paper Series*, 17-E-125, 2017.
10) 大澤実：集積経済モデルの数理解析とその周辺，土木計画学研究・論文集 D3（土木計画学），Vol.74, No.5, pp.I19-I36, 2018.
11) Krugman,P.R.: Increasing returns and economic geography, *Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 3, pp. 483-499, 1991.
12) Pflüger, M.: A simple, analytically solvable, chamberlinian agglomeration model, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 34, No. 5, pp. 565-573, 2004.
13) Tabuchi, T.: Urban agglomeration and dispersion: A synthesis of alonso and krugman, *Journal of Urban Economics*, Vol. 44, No. 3, pp. 333-351, 1998.
14) Osawa, M. and Akamatsu, T.: Stochastically Stability Analysis of a Model of Endogenous Urban Subcenter Formation, 土木計画学研究･講演集 (CD-ROM), Vol.54, 2016.
15) Sandholm, W.H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT press, 2010.
16) Chris Wallace, H.Peyton Young: Stochastic Evolutionary Game Dynamics, In H.P.Young and S.Zamir (Eds.), *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, volume 4, pp.327-380, Elsevier, 2015.
17) Ikeda, K., Onda, M. and Takayama, Y.: Spatial period doubling, invariant pattern, and break point in economic agglomeration in two dimensions, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.92, pp.129-152, 2018.

(2019. 10. 4 受付)

A MULTI-CLASS LOCATION EQUILIBRIUM MODEL SATISFYING THE HIERARCHY PRINCIPLE

Akio KOBAYASHI and Takashi AKAMATSU