

道路標高変化部での渋滞発生に関する ダイナミック流体モデルとマイクロモデルを 用いた二、三の検討

細田 尚¹・小田 克磨²

¹フェロー会員 京都大学大学院教授 都市社会工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂C1-3)

E-mail: hosoda.takashi.4w@kyoto-u.ac.jp

²学生会員 京都大学大学院工学研究科修士課程 都市社会工学専攻
(〒615-8540 京都市西京区京都大学桂C1-3)

E-mail: oda.katsuma.53m@st.kyoto-u.ac.jp

本研究は、まず交通流のダイナミック流体モデルの基礎式を用いて、道路凸部標高の縦断分布や車に関する初期条件、上下流端の流入流出条件等を設定して行われた定常流解析と非定常流解析結果を示す。凸部振幅が大きい場合の非定常解析結果には、時間の経過とともに明瞭な渋滞波の発生と上流側への伝播が再現されることを確認する。この渋滞波の発生要因として、ダイナミック流体モデルから導かれる車の定常密度分布方程式の定性的特性との関連を指摘する。次に、流体モデルは車挙動のマイクロ・シミュレーションモデルの一次近似であることから、流体モデルによる計算結果を検証するために同一の計算条件下でマイクロモデル（最適速度モデルにGreenshieldsの式を併用）を用いた数値解析を行う。得られた結果を流体モデルの非定常解析結果と比較・検討し、道路凸部振幅の大小と渋滞波の発生・非発生については両モデルがよく整合していること、渋滞波の時間的発達過程には両者間で相違がみられることを示す。

Key Words: traffic flow analysis, micro simulation model, Payne model, jamming generation

1. はじめに

交通流のダイナミック流体モデルは、車挙動を追跡するマイクロ・シミュレーションモデルの中の Newell モデル¹⁾の第一次近似と考えられている。本研究は、交通流中の渋滞波の発生・伝播に関してダイナミック流体モデルとマイクロ・シミュレーションモデルの両者を用いた数値解析を行い、得られた結果について比較・検討することを目的としている。

本研究ではダイナミック流体モデルとして Payne モデル²⁾を基本モデルと考え、まず考察に必要となる流体モデルの基本的な特性について記述する。定常状態を仮定すると開水路流れの水面形方程式と同等の交通流の密度分布方程式を導くことができる。これまでにこの密度分布方程式を用いて等流密度が二つ存在すること、二つの等流密度と限界密度の大小関係により分布パターンを三通りに分類できること、限界密度においてフルード数と等価の無次元パラメータが 1 となること等を指摘した³⁾。

また、路床に凹凸がある場合の水面形解析法との類似性に基づき、道路勾配の効果を考慮した密度分布方程式を用いて、常微分方程式の特異点解析を含んだ定常密度分布を計算する一連の手順を示すと同時に、例として道路凸部の定常密度分布の計算を行っている⁴⁾。

さらに非定常項を考慮した密度保存則と運動量式に対して、開水路非定常流に適用されている有限体積法に基づく簡易な数値解析法を用いて非定常計算が可能であることを指摘し、定常解析と同一の条件下で非定常解析を実施している。その結果、非定常解析結果には渋滞波の発生および衝撃波が上流に移動する様子が再現されていることを示した⁵⁾。非定常解析と定常解析結果との対応関係についても渋滞波の発生・伝播の観点から考察した。

このような経緯の下、本研究ではマイクロ・シミュレーションモデルとして最適速度モデル⁶⁾を用いて、上述した流体モデルの解析結果の再現性に着目した考察を行う。検討内容を明解にするために、まず流体モデルを用いた解析法と得られた結果について簡単に説明する。

2. ダイナミックモデルによる解析結果の概要^{4,5)}

(1) 基礎式

ダイナミック・流体モデルの基礎式は交通流密度の保存則(1)と運動方程式(2)から構成される²⁾。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{T}(U(\rho) - u) - \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2)$$

ここに、 t : 時間、 x : 空間座標、 ρ : 車の平均密度、 u : 車の平均速度、 T : ドライバーの反応時間に相当する定数、 a : 反応時間と密度に依存した定数 (圧縮性流体の音速に対応)、 $U(\rho)$: 後述の最適速度関数である。また、 a と T は以下の式で関係づけられる。

$$a^2 = -\frac{1}{2T} \frac{\partial U}{\partial \rho} > 0$$

運動方程式(2)の左辺は、マイクロ・シミュレーションモデルの加速度項 (慣性項) に対応している。交通工学でよく用いられてきたキネマティックウェーブ・モデル⁷⁾は式(2)中の左辺と右辺の密度勾配項を無視した運動方程式と質量保存則式(1)を連立するモデルである。

最適速度関数として汎用のGreenshieldsの式⁸⁾を用いた。道路が平坦な場合の関数形は式(3)で与えられる。また、定常状態を考えると、質量保存則は流量一定の連続式(4)となる。

$$U(\rho) = u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \quad (3)$$

$$\frac{d\rho u}{dx} = 0, \rho u = q = \text{const.} \quad (4)$$

水面形解析の限界水深に対応する限界密度が二通りの等流密度の間に存在する場合、定性的な定常空間密度分布形は図-1に示すようになることが知られている³⁾。

(2) 道路の勾配を考慮した定常密度分布解析結果⁴⁾

モデルの中に道路勾配の効果を考慮する方法として、最適速度関数(3)に道路の縦断勾配を考慮することが考えられる³⁾。一例を式(5)に示した。

$$U(\rho) = u_{\max} \left(1 - S \frac{dy_b}{dx} \right) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \quad (5)$$

ここに、 S は道路勾配の影響を表わす定数である。

式(5)を用いると定常密度分布式は式(6)となる。

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{\frac{1}{T} \left[\rho_{\max} u_{\max} \left(1 - S \frac{dy_b}{dx} \right) \left\{ \frac{\rho}{\rho_{\max}} - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^2 \right\} - q \right]}{\frac{u_{\max}}{2T\rho_{\max}} \left(1 - S \frac{dy_b}{dx} \right) - \frac{q^2}{\rho^2}} \quad (6)$$

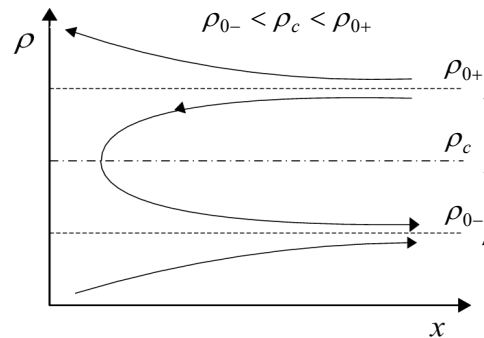


図-1 定常空間密度分布のパターン

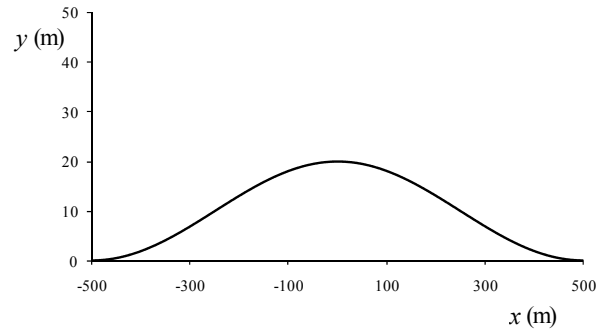


図-2 道路標高の縦断分布形

式(6)の分子および分母がゼロになる密度として定義される擬似等流密度、限界密度はそれぞれ式(7)、式(8)で与えられる。

$$\frac{\rho_{n\pm}}{\rho_{\max}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{\rho_{\max} u_{\max} (1 - S dy_b / dx)}}}{2} \quad (7)$$

$$\rho_c = q \sqrt{\frac{2T\rho_{\max}}{u_{\max} (1 - S dy_b / dx)}} \quad (8)$$

式(9)を用いて道路の標高を与えた。標高の縦断分布形を図-2に示す。

$$y_b = \frac{\delta_b}{2} \left\{ 1 + \cos \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right\} \quad (9)$$

ここに、 δ_b は原点の道路の標高でここでは20m、 L は凸部区間の長さで1000mとした。

以下のように定数を設定して計算した限界密度、擬似等流密度、密度分布の計算結果が図-3である。

$$\begin{aligned} \rho_{\max} &= 0.25 \text{ (台/m)}, u_{\max} = 30 \text{ (m/sec.)}, a = 15 \text{ (m/sec.)}, \\ q &= 1.0 \text{ (台/sec.)}, S = 7.5, T = 0.25 \text{ (sec.)}, \delta_b = 20 \text{ (m)}, \\ \rho_{n-} &\approx 0.04 \end{aligned}$$

限界密度と下流側の擬似等流密度には交点が二つ存在する。これらの交点では式(6)の分母・分子が同時にゼロになるため、特異点としての取り扱いが必要になる。この場合は下流側の特異点は鞍形点、上流側は結節点に分類される。

鞍形点の場合には、その点を通る密度分布形が存在する。式(6)を鞍形点の周りで線形化することで、鞍形点

を通る密度の空間勾配を計算した後、その点から上流側、下流側にそれぞれ密度分布形を追跡計算することができる。実線（黒）が鞍形点から出発した密度の追跡結果であり、下流側に追跡した場合、分布形は常に限界密度より下側にあるので流れの状態は **super-critical flow** に分類される。一方、上流側に追跡した結果は少し上流側に進むにつれて上側の擬似等流密度より大きくなり（**sub-critical** の状態）無限大に発散した。

上流側の特異点付近の分布形については、図に示すように **super-critical flow** の状態の上流端境界条件から出発した密度分布（黄色の実線）は結節点に吸引されていった。

(3) 非定常解析結果⁹⁾

上述の定常密度分布の計算に対応する条件の下で、基礎式(1), (2)を用いた非定常計算を行った。ただし、運動方程式(2)に密度 ρ を乗じることで運動量保存則の形式(式(10))に変形した。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial qu}{\partial x} = \frac{\rho}{T}(V(\rho) - u) - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (10)$$

保存則系の基礎式に対して、開水路非定常流に対して適用されている有限体積法を基本とした数値解析法を用いて非定常流計算を行った。離散式の時間積分には2次精度のAdams-Bashforth法を適用した。

定常密度分布解析に対応する非定常流解析結果を図-4に示した。鞍形点の上流側で **super-critical flow** から **sub-critical flow** への遷移が生じているが、衝撃波は停止することなく上流側に移動していることが分かる。このことと図-3において鞍形点から上流側に追跡した密度分布が無限大に発散することの関連性が指摘された⁹⁾。

3. ミクロ・シミュレーションモデルによる数値解析

(1) 基礎式

基本的なミクロモデルの一つとして次式で与えられるNewellのモデル¹⁾を挙げることができる。

$$\frac{dx_n(t+T)}{dt} = U(x_{n+1}(t) - x_n(t)) \quad (11)$$

ここに、 $x_n(t)$ ：時刻 t の n 番目の車の位置であり、 $n+1$ はそれより前にいる車の番号である。

杉山⁶⁾は式(11)左辺の $x_n(t+T)$ をTaylor展開して一次のオーダーの項のみを考慮した式(12)を用いることを提案した。

$$\frac{d^2 x_n(t)}{dt^2} = \frac{1}{T}(U(x_{n+1}(t) - x_n(t)) - \frac{dx_n(t)}{dt}) = F_n(t) \quad (12)$$

式(12)は最適速度モデルと呼ばれ、ドライバーが自分の速度と最適速度との差に反応して速度を調整する点が

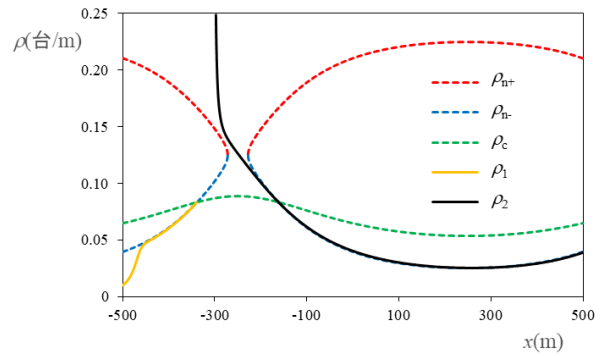


図-3 限界密度、擬似等流密度と密度分布形の追跡結果（黄色は上流端からの追跡結果、黒は鞍形点から上下流への追跡結果を示す。）

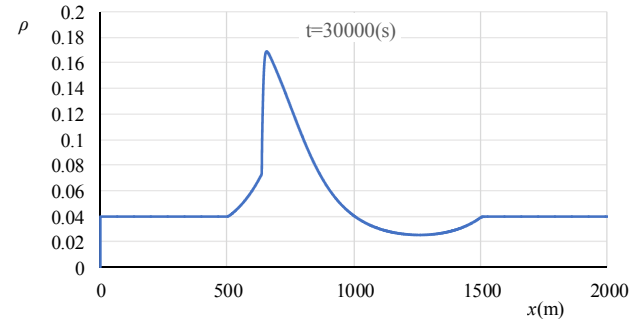
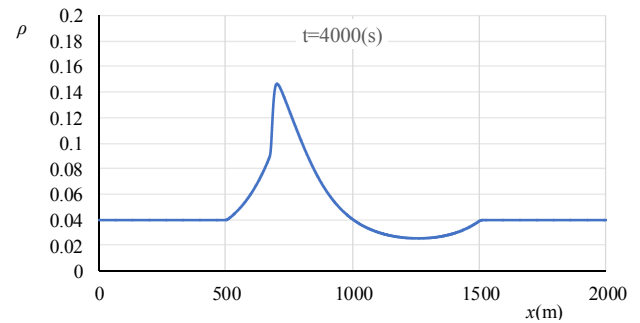
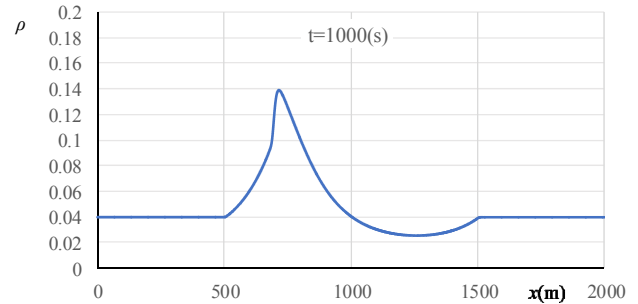


図-4 非定常解析結果（凸部頂点は $x=1000\text{m}$ ）

Newellのモデルと異なっている。

ダイナミック流体モデルはNewellモデルの第一次近似とみなすことができる⁹⁾。すなわち、式(11)の左辺をまず次式で近似する。

$$\frac{dx_n(t+T)}{dt} \approx u(x+uT, t+T) \approx u + uT \frac{\partial u}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial t} \quad (13)$$

つぎに車間距離を h とすると、 $1/h$ は式(14)と近似できる。

$$\frac{1}{h} \approx \rho \left(x + \frac{1}{2}h, t \right) \approx \rho(x) + \frac{h}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho(x) + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (14)$$

最適速度関数 $U(h)$ の変数を密度にした $U(l/\rho)$ を新たに

$V(\rho)$ とおく. 最適速度関数 $U(h)$ は式(14)と $V(\rho)$ を用いて式(15)で近似される.

$$U(h) = V\left(\rho\left(x + \frac{h}{2}, t\right)\right) = V\left(\rho + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \quad (15)$$

$$= V(\rho) + \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

これらを Newell のモデル(11)に代入するとダイナミック流体モデルの基礎式(2)になる.

最適速度関数として, 本研究では流体モデルに対応するように道路勾配を考慮した次式を用いる.

$$U(x_{n+1}(t) - x_n(t)) = u_{\max} \left\{ 1 - \frac{1}{\rho_{\max}(x_{n+1}(t) - x_n(t))} \right\} \left(1 - S \frac{dy_b}{dx} \right) \quad (16)$$

(2) ミクロモデルの数値解析法

最適速度モデルの数値解析法には分子シミュレーションで汎用的に用いられている Verlet法を適用した. すなわち, 次ステップの位置の計算には次式を用いる.

$$x_n(t + \Delta t) = x_n(t) + \Delta t v_n(t) + \frac{\Delta t^2}{2} F_n(t) \quad (17)$$

ここに, $v_n(t)$ は n 番目の車の速度であり, その時間積分には次式を用いた.

$$v_n(t + \Delta t) = v_n(t) + \Delta t F_n(t + \Delta t / 2) \quad (18)$$

(3) 数値計算の条件と結果の考察

2. で説明した流体モデルの数値計算と同一の条件の下でミクロモデルによる数値計算を行った.

まず車5000台を流体モデルの等流密度 $\rho_n \approx 0.04$ に対応するように車間距離 25m 間隔とそれに対応する等流速度で初期配置した. 長さ1000mの道路凸部の頂点位置が124,000mになるように凸部を設定して, 各車の位置の時間変化を式(17), (18)を用いて計算した.

計算結果を図-5に示した. 流体モデルと同様に, 明瞭な不連続部の発生・発達と上流側への伝播が観察される. 1000secでの両者の計算結果を比較すると, ミクロモデルのピーク値はほぼ平衡値に到達しているのに対し, 流体モデルの方はまだ増加の途中にある. また, 凸部頂点から測ったピークの発生位置も流体モデルの方が頂点から近い位置にあり, 渋滞波の上流への伝播速度が小さい.

このように, 両者の計算結果には定量的にはある程度の相違がみられるものの, 渋滞波の発生・伝播現象を定性的にはよく再現していると考えられる.

次に, 両モデルを用いて凸部の高さを20mから10mに減少させて計算を実施した. それらの結果を図-6, 図-7に示した. 計算結果は流体モデル, ミクロモデルともに同様であり, 渋滞波は発生せず計算開始後短時間で定常な平衡密度分布に到達し, 以後密度分布は時間的に変

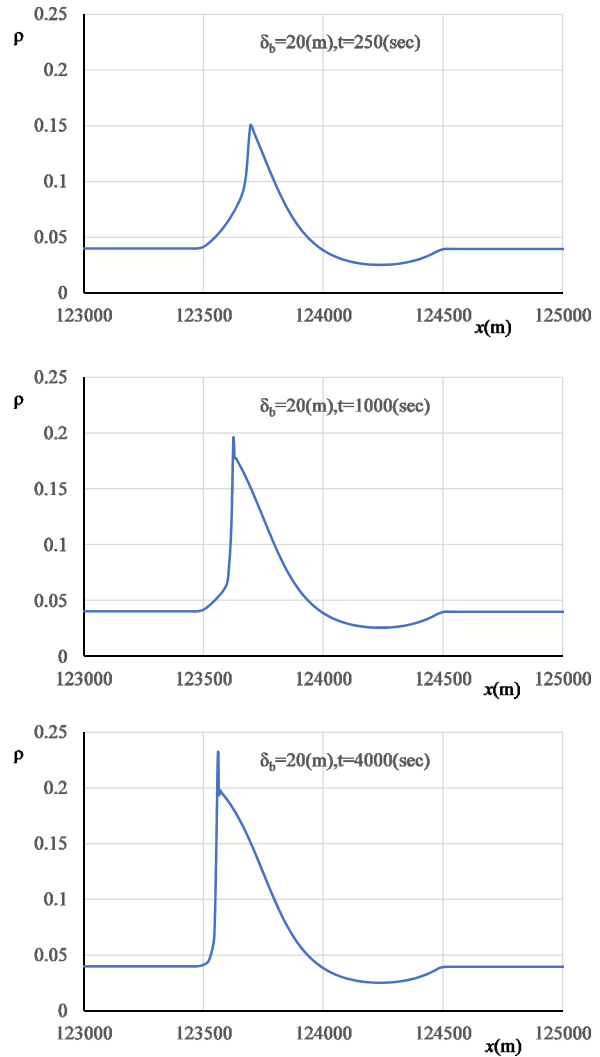


図-5 ミクロ・モデルによる計算結果 (凸部頂点は $x=124000$ m)

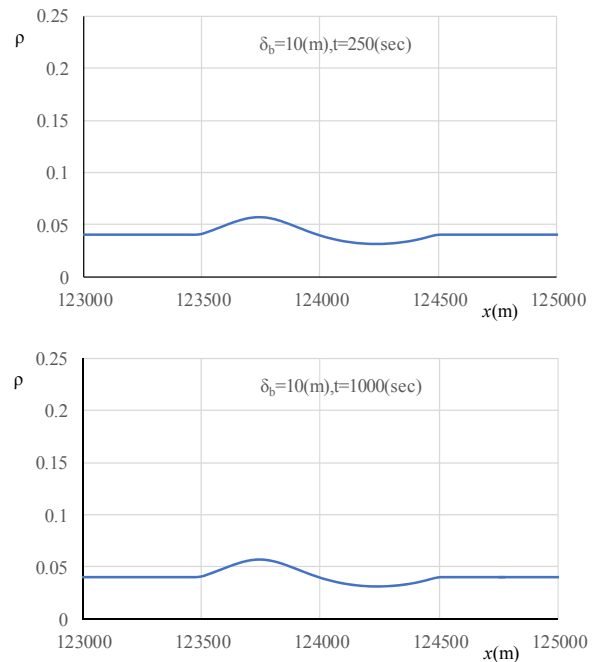


図-6 凸部高さが小さい場合のミクロ・モデルによる計算結果 (凸部頂点は $x=124000$ m)

化しない。この条件では定常密度方程式に特異点は発生しないことを確認しており、擬似等流密度分布と限界密度分布に交点が発生しない場合には渋滞波は発生しないと考えられる。

4. おわりに

本研究は、交通流のダイナミック流体モデルの基礎式を用いて、まず設定された道路凸部周辺での密度分布の定常流解析と非定常解析の結果を示した。凸部振幅が大きい場合の非定常解析結果には、時間の経過とともに明瞭な渋滞波の発生と不連続部の上流への伝播が再現されることを確認した。次に、同一の計算条件下でマイクロモデルを用いた数値解析を行った。得られた結果を流体モデルの非定常解析結果と比較・検討し、道路凸部振幅の大小と渋滞波の発生・非発生については両モデルがよく整合していること、渋滞波の時間的発達過程には両者間で相違がみられること等を示した。さらに、定常密度方程式に特異点が発生しない場合には、両者ともに渋滞波は発生しないことを指摘した。今後、より実際的な条件下での両モデルを用いた解析を実施し、両モデルの交通流現象への適用性を検討したい。

参考文献

- 1) Newell, G.F.: Nonlinear effects in the dynamics of car following, J. Opns. Res. Soc. Am. Vol.9, pp.209-229, 1961.
- 2) Payne, H.J.: Mathematical Models of Public Systems, Simulation Council Proceedings Vol.1, pp.51, 1971.

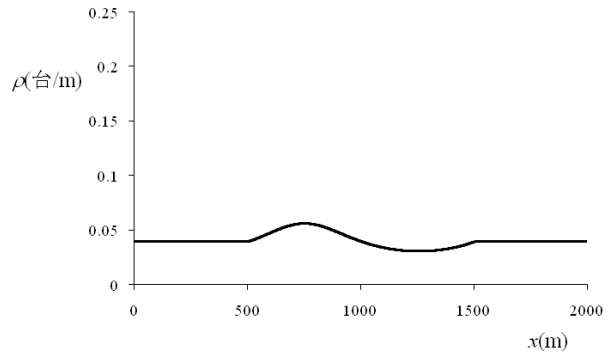


図-7 凸部高さが小さい場合の流体モデルによる計算結果 (凸部頂点は $x=1000\text{m}$)

- 3) 細田 尚：ダイナミックモデルによる定常交通流の空間密度分布解析法とサグ部の表現，土木学会年次学術講演会講演概要集，2010.
- 4) 前原耀太・細田 尚・白井秀和：交通流のダイナミック流体モデルを用いた道路凸部の定常密度分布に関する一考察，土木学会土木計画学研究発表会 2017(秋期大会)講演概要集，2017.
- 5) 細田 尚・前原耀太・白井秀和：交通流の流体モデルを用いた道路凸部での渋滞発生に関する二,三の検討，日本流体力学学会年会 2018 講演概要集，2018.
- 6) 杉山雄規：[特集]交通流，交通流の物理，日本流体力学学会誌 ながれ 22, pp.95-108, 2003.
- 7) Lighthill, M.J. and Whitham, G.B.: On kinematic waves II, A theory of traffic flow on long crowded roads, Proc. R. Soc. London A 299, pp.317, 1955.
- 8) Greenshields, B.D.: A study of traffic capacity, Highway Research Board Proceedings 14, pp. 448-477, 1935.
- 9) 西成活裕：よくわかる渋滞学，ナツメ社，2009.

(2019. 10. 4 受付)

SOME CONSIDERATIONS ON GENERATION MECHANISM OF TRAFFIC JAM OVER THE CONVEX SECTION OF A ROAD BY MEANS OF DYNAMIC FLUID MODEL AND MICRO SIMULATION MODEL

Takashi HOSODA and Kastuma ODA

The generation mechanism of traffic jam over the convex section of a road is studied using both dynamic fluid model and micro simulation model for traffic flows. It is firstly shown that the generation of a traffic jam and its propagation in the upstream direction over the convex part of a road are reproduced in the simulated results obtained using the unsteady dynamic fluid model with the effect of inclination along a road. The theoretical analysis with the steady density profile equation indicates that the traffic jam is generated in the case that the singular point classified as saddle point appears over the convex section. Then, the numerical simulations with a micro simulation model for traffic flows are carried out under the same conditions applied to the fluid model. It is concluded that the generation of a traffic jam can be reproduced in the simulated results by the micro simulation model, though there are some differences in two models regarding the temporal change of a jam formation.