

# 首都圏高速道路網における 動的 OD 交通量推定モデルのパラメータ推定

石川 裕太郎<sup>1</sup>・酒井 高良<sup>2</sup>・赤松 隆<sup>3</sup>

<sup>1</sup>非会員 東北大学大学院 情報科学研究科 人間社会情報科学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: ishikawa.yutaro.t2@dc.tohoku.ac.jp

<sup>2</sup>学生会員 東北大学大学院 情報科学研究科 人間社会情報科学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: takara.sakai.t1@dc.tohoku.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 東北大学大学院教授 情報科学研究科 人間社会情報科学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究では、首都圏高速道路網において動的な OD 交通量推定モデルのパラメータを最尤推定し、その動的な変動特性について検証する。具体的な手順としては、まず代表的な OD 推定モデルである二重制約エントロピーモデルを、時空間ネットワークを活用し、動的枠組みに拡張する。つぎに、モデルのパラメータを最尤推定するための最適化問題を定式化し、双対問題を考えることにより、Newton-Raphson method と Bregman's Algorithm を組み合わせた効率的な計算手法を開発する。そして、首都圏高速道路網における動的 OD 推定モデルのパラメータを長期間観測データに基づき推定し、その動的な変動特性について考察する。

**Key Words:** 動的 OD 推定モデル, パラメータ推定, 最尤法, 時空間ネットワーク, 長期間観測データ

## 1. はじめに

### (1) 背景

道路交通網における OD 交通量の推定は、円滑な交通流を実現する施策を立案、評価するうえで必要不可欠である。特に、時々刻々の道路運用施策への応用が可能な精度の高い OD 交通量を得るための手法として、動的に OD 交通量を予測する動的 OD 推定モデルが多数存在する<sup>1)2)</sup>。さらに近年では、センシング技術の発達に伴い、ネットワーク上で実際に観測された多種多様なデータと動的モデルの推定結果を融合し、短期的により精度の高い OD 交通量を推定する試みがなされている<sup>3)4)5)</sup>。

一方、観測データの別の活用方法の一つとして、モデル・パラメータの推定への利用が挙げられる。動的 OD 推定モデルに含まれるパラメータのいくつかは、利用者の交通行動を特徴づけるものである。すなわち、観測データに基づき推定されるパラメータは、利用者の行動原理に関する情報をもたらす。さらに、離散的に観測されたデータを代表する集計的な指標でもあるため、長期的な施策の立案などにも応用可能である。しかし、動的 OD 推定モデルの枠組みにおいては、パラメータを通した分析に主眼をおいた研究はこれまでにほとんど見受けられない。なかでも、長期間観測データに基づくパラメータの動的な変動特性についての分析結果は皆無に等しい。

### (2) 目的

以上の背景を踏まえ、本研究では長期間観測データに基づき、動的 OD 推定モデルのパラメータの推定を行い、その動的変動に特徴を見いだすことを目的とする。具体的な手順としては、まず代表的な OD 推定モデルである二重制約エントロピーモデルを、時空間ネットワークを活用して動的枠組みに拡張する。つぎに、モデル・パラメータを推定するための最適化問題を定式化する。一般に、こうしたモデルのパラメータ推定を扱う問題では、最適化問題をラグランジュ緩和することによってパラメータを求める。具体的な解法としては、収束が遅いことで知られる劣勾配法がしばしば用いられる。動的枠組みでは、静的枠組みと比較して解くべき問題の規模が極めて大きくなるため、劣勾配法は実用的な解法とは言い難い。そこで本研究では、最適化問題の双対問題に着目し、効率的な推定手法を開発する。この手法は、Newton-Raphson method に基づき、さらに勾配が一意に定まることから、劣勾配法と比較して効率が向上することが期待される。そして、開発した手法を利用して、静的な OD ペアが 10000 強存在する首都圏高速道路網において、長期間観測データに基づくモデル・パラメータの推定を行い、その動的な変動特性について検証する。

### (3) 本稿の構成

本稿の構成を以下に示す。2 章では、本研究で取り扱う動的 OD 推定モデル、ならびにモデル・パラメータを

推定するための最適化問題を定式化する。3章では、パラメータの推定を効率的に行うための解法を提案する。4章において、首都圏高速道路網におけるパラメータ推定の枠組みを示し、最後に5章でまとめを述べる。

## 2. 動的 OD 推定モデルおよびパラメータ最尤推定問題の定式化

本研究では、代表的な静的 OD 交通量の推定モデルである二重制約エントロピーモデルを、時空間ネットワークを活用して動的枠組みに拡張する。そして、モデル・パラメータの推定には、最尤推定の枠組みを適用する。本章ではまずモデルの定式化を示し、次にモデル・パラメータの最尤推定と等価な最適化問題を示す。

### (1) 動的な二重制約エントロピーモデルの定式化

#### a) モデルの状況設定

連続時間系  $T$  を考える。  $T$  を微小時間  $\Delta t$  で  $M$  個の“基本離散時刻”  $t$  に分割したものを、系全体に共通する時間刻みとする。  $t$  の集合を  $\mathcal{T}$  とする。本研究では分析の便宜上<sup>1</sup>、発生交通量と集中交通量を独立に時刻について集約する。基本離散時刻を  $M^O$  ずつまとめた集合を“発生時刻”  $\mathcal{T}_i^O$  とする。ただし  $i = 1, 2, \dots, M/M^O$  である。  $\mathcal{T}_i^O$  の集合を  $\mathcal{T}^O$  とする。同様に、  $M^D$  個の基本離散時刻から構成される“集中時刻”を  $\mathcal{T}_j^D$  とする。  $j = 1, 2, \dots, M/M^D$  であり、  $\mathcal{T}_j^D$  の集合を  $\mathcal{T}^D$  とする。

道路網がノード集合  $\mathcal{N}$ 、リンク集合  $\mathcal{L}$  からなるネットワーク  $G_2(\mathcal{N}, \mathcal{L})$  として表現されるとする。起点ノードと終点ノードの集合をそれぞれ  $\mathcal{R}, \mathcal{S}$  とする。  $G_2$  に時間軸を追加した三次元のネットワークは、位置  $n \in \mathcal{N}$  および基本離散時刻  $t \in \mathcal{T}$  により定義される“時空間ノード”の集合  $\mathcal{V}$ 、ならびに各時刻の旅行時間により定義される“時空間リンク”の集合  $\mathcal{A}$  からなる。これを、“時空間ネットワーク”  $G_3(\mathcal{V}, \mathcal{A})$  と定義する。時空間ネットワーク上で起点を表す“時空間起点ノード”の集合を  $\mathcal{O}$  とする。時々刻々、各起点における発生交通量は時空間起点ノード  $o \in \mathcal{O}$  に対応し、  $O_o$  とする。  $o$  は、起点  $r \in \mathcal{R}$  と発生時刻  $\mathcal{T}_i^O \in \mathcal{T}^O$  により定義される。同様に、終点  $s \in \mathcal{S}$  と集中時刻  $\mathcal{T}_j^D \in \mathcal{T}^D$  に対応する“時空間終点ノード”の集合を  $\mathcal{D}$ 、時空間終点ノード  $d \in \mathcal{D}$  に対応する集中交通量を  $D_d$  と定義する。時空間ネットワーク上の起終点ノードペアを“時空間 OD ペア”  $(o, d)$  とし、その集合を  $\mathcal{P}$  とする。“時空間 OD ペア旅行時間”を  $c_{od}$  とする。本研究では、時々刻々のリンク旅行時間は観測済みであるため、時空間ネットワーク  $G_3$  は日時に対応して一意にその構造が決定する。ここまでで定義した主要な記号の一覧を表-1に示す。

<sup>1</sup> 観測データの時々刻々の“ゆらぎ”の影響を抑えるためである。

表-1 主要な記号の定義一覧

記号	定義
$\mathcal{T}$	基本離散時刻 $t$ の集合
$\mathcal{T}^O$	発生時刻 $\mathcal{T}_i^O$ の集合
$\mathcal{T}^D$	発生時刻 $\mathcal{T}_j^D$ の集合
$G_2$	道路網を表す 2 次元ネットワーク
$\mathcal{N}$	$G_2$ に含まれるノード集合
$\mathcal{L}$	$G_2$ に含まれるリンク集合
$\mathcal{R}$	$G_2$ に含まれる起点ノード $r$ の集合
$\mathcal{S}$	$G_2$ に含まれる終点ノード $s$ の集合
$G_3$	$G_2$ の時空間ネットワーク
$\mathcal{V}$	$G_3$ に含まれるノード $v$ の集合
$\mathcal{A}$	$G_3$ に含まれるリンク $a$ の集合
$\mathcal{O}$	$G_3$ に含まれる時空間起点ノード $o$ の集合
$\mathcal{D}$	$G_3$ に含まれる時空間終点ノード $d$ の集合
$\mathcal{P}$	時空間 OD ペア $(o, d)$ の集合
$c_{od}$	時空間 OD ペア $(o, d)$ の旅行時間

図-1に、時空間ネットワークと主な記号の関係を示す。左の軸は起点  $r$ 、右の軸は終点  $s$  に対応し、縦方向に時間の流れを表す。  $M^O = 3, M^D = 5$  として発生時刻  $\mathcal{T}_i^O$ 、集中時刻  $\mathcal{T}_j^D$  を示し、時空間起点ノード  $o$  は  $r$  と  $\mathcal{T}_i^O$  により、時空間終点ノード  $d$  は  $s$  と  $\mathcal{T}_j^D$  により定義される。時空間 OD ペア  $(o, d)$  が時空間ネットワーク中のリンクにより結ばれ、その旅行時間は  $c_{od}$  である。

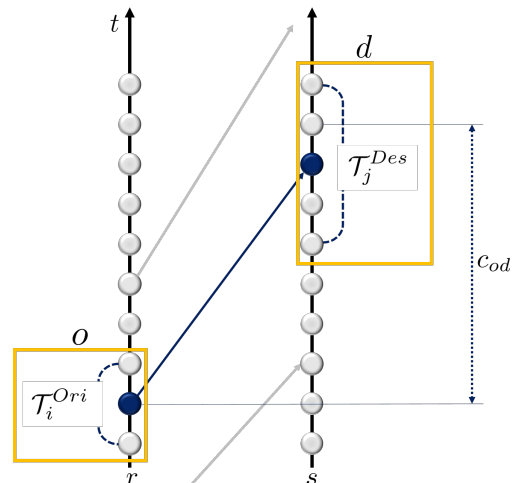


図-1 時空間ネットワーク

#### b) 定式化

動的な二重制約エントロピーモデルを示す:

$$q_{od} = A_o B_d O_o D_d \exp(-\gamma c_{od}) \quad \forall (o, d) \in \mathcal{P} \quad (1)$$

where

$$A_o = \left[ \sum_{d \in \mathcal{D}} B_d D_d \exp(-\gamma c_{od}) \right] \quad \forall o \in \mathcal{O} \quad (2)$$

$$B_d = \left[ \sum_{o \in \mathcal{O}} A_o O_o \exp(-\gamma c_{od}) \right] \quad \forall d \in \mathcal{D} \quad (3)$$

$q_{od}$  は、時空間 OD 交通量である。  $\gamma, A_o, B_d$  は、それぞれ時空間 OD 旅行時間、時々刻々の発生・集中交通量に対応するモデル・パラメータである。また、発生・集中交通量と時空間 OD 交通量の間には保存則が成立する:

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} q_{od} = O_o \quad \forall o \in \mathcal{O} \quad (4)$$

$$\sum_{o \in \mathcal{O}} q_{od} = O_o \quad \forall d \in \mathcal{D} \quad (5)$$

このモデルは、静的な二重制約エントロピーモデルにおいて位置の情報  $(r, s)$  で定義される OD ペアを、位置および時刻により定義される時空間 OD ペア  $(o, d)$  に置き換えたものとして解釈できる。

## (2) パラメータ最尤推定問題の定式化

### a) 尤度関数と最尤方程式

前節に示したモデルにおいて、モデル・パラメータ  $\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}$  の最尤推定量は、尤度関数:

$$s(\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max. \prod_{(o,d) \in \mathcal{P}} \left( \frac{q_{od}}{Q} \right)^{\hat{q}_{od}} \quad (6)$$

を最大にする  $\hat{\gamma}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$  である。ただし、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  は、それぞれ  $A_o, B_d$  を要素に持つベクトル、 $Q$  は総 OD 交通量、 $\hat{q}_{od}$  は時空間 OD ペア  $(o, d)$  における観測交通量である。具体的な最適性条件は最尤方程式:

$$\sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} c_{od} q_{od}(\hat{\gamma}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}) = \sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} c_{od} \hat{q}_{od} = \hat{E} \quad (7)$$

に帰着する。  $\hat{E}$  はネットワークで観測された総交通費用である。

### b) パラメータ推定問題

動的な二重制約エントロピーモデルのパラメータを最尤推定する問題と等価な最適化問題を示す:

$$[\mathbf{Est-P}] \quad \min Z_P(\mathbf{q}) = \sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} q_{od} (\ln q_{od} - 1) \quad (8)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} c_{od} q_{od} = \hat{E} \quad (9)$$

$$\text{式 (4), (5)}$$

$$q_{od} \geq 0 \quad \forall o \in \mathcal{O}, \quad \forall d \in \mathcal{D} \quad (10)$$

$\mathbf{q}$  は、 $q_{od}$  を要素に持つベクトルである。式 (9) の制約条件は式 (7) の最尤方程式そのものであり、対応するラグランジュ乗数は最尤推定量  $\hat{\gamma}$  である。

### c) 総交通費用

総交通費用  $\hat{E}$  について、以下の関係が成立する:

$$\sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} c_{od} \hat{q}_{od} = \sum_{a \in \mathcal{A}} c_a \hat{x}_a = \hat{E} \quad (11)$$

$\hat{x}_a, c_a$  はそれぞれ時空間ネットワーク上の各リンクにおける観測交通量と旅行時間である。一般に、 $\hat{q}_{od}, c_{od}$  をもれなく観測することは困難であるが、このモデルでは入手が比較的容易なリンクにおける観測量で対応することができる。

## 3. パラメータ最尤推定問題の効率的解法

前章で定式化された **[Est-P]** のように、興味の対象が制約条件のラグランジュ乗数となる問題に対する一般的なアプローチは、制約条件をラグランジュ緩和し、劣勾配法を適用することである。しかし劣勾配法は、勾配が一意に定まらないことがあるため、収束に時間がかかる解法である。そこで本章では、まず **[Est-P]** の双対問題を導出する。次に、双対問題の性質を活かし、劣勾配法と比較して効率的なアルゴリズムを提示する。

### (1) 双対問題

#### a) 定式化

**[Est-P]** の双対問題 **[Est-D]** を示す:

$$[\mathbf{Est-D}] \quad \max Z_D(\gamma)$$

$$\text{s.t.} \quad \text{式 (2), (3)}$$

where

$$Z_D(\gamma) = - \sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} A_o B_d O_o D_d \exp(-\gamma c_{od}) + \sum_{o \in \mathcal{O}} O_o \ln A_o + \sum_{d \in \mathcal{D}} D_d \ln B_d - \gamma \hat{E} \quad (12)$$

この双対問題は、未知変数を最尤推定量  $\hat{\gamma}$  とする一次元の最適化問題であり、よく知られた Newton-Raphson method 法を適用できる。式 (2), (3) に表されるモデル・パラメータは、二重制約エントロピーモデルの解法として知られる Bregman's Algorithm における収束計算の過程で定まる。つまり、最尤推定量  $\hat{\gamma}$  が決まれば、 $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$  も同時に決まる。

#### b) 勾配

**[Est-D]** の目的関数  $Z_D(\gamma)$  に包絡線定理を適用すると、勾配は以下のスカラー:

$$\frac{dZ_D(\gamma)}{d\gamma} = Z'_D(\gamma) = \sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} c_{od} q_{od} - \hat{E} \quad (13)$$

となる。これは、式 (9) に示した最尤方程式にほかならず、Bregman's Algorithm により算出される時空間 OD 交通量から直ちに決定する。

## (2) アルゴリズム

前節での議論を踏まえ、[Est-P] の双対問題 [Est-D] は、Newton-Raphson method と Bregman's Algorithm を組み合わせることにより解くことができる。また、勾配が一意に定まるため、劣勾配法と比較して効率的に収束することが期待される。[Est-D] を解くためのアルゴリズム [Algo-NT] は、以下のようにまとめられる：

[Algo-NT]

### Step.0 Initialization

初期解  $\gamma^0 := 0$ , 繰り返し回数  $n = 0$  とする。

### Step.1 Convergence test

収束条件を満たせば終了。

### Step.2 Bregman's Algorithm

パラメータ  $\gamma^n$  のもとで時空間 OD フローパターン  $\mathbf{q}^n$  を求める。  $\mathbf{q}^n$  ならびにパラメータ  $\mathbf{A}^n, \mathbf{B}^n$  に基づき、  $Z_D(\gamma^n)$  を算出。

### Step.3 Gradient calculation

式 (13) により、勾配  $Z'_D(\gamma^n)$  を求める。

### Step.4 Solution updating

$\gamma^{n+1} := \gamma^n - Z_D(\gamma^n)/Z'_D(\gamma^n)$  とする。  $n := n + 1$  として Step.1 へ。

## 4. 観測データと動的なパラメータ推定の枠組み

### (1) ネットワークと観測データの概要

本研究では、首都圏高速道路網における長期間観測データを提案した解法に適用し、推定されたモデル・パラメータの動的な変動特性を検証する。分析を行うにあたり、道路網をノード数  $|\mathcal{N}|$  が 287, リンク数  $|\mathcal{L}|$  が 333 の二次元ネットワークとして表す。起点ノード数  $|\mathcal{R}|$  は 130, 終点ノード数  $|\mathcal{S}|$  は 133, OD ペア数は 11823 である。

利用するデータは、首都圏高速道路網上の約 1500 個の感知器で観測された 24 時間、1 分刻みの速度データ、交通量データである。観測期間は 2014 年 1 月 1 日から 12 月 31 日までの 365 日間である。旅行時間は、速度データとリンク長のデータから算出する。

### (2) 分析対象日と時間帯

分析対象日は、ランダムに抽出した 40 日とする。また、日内の分析対象時間帯は 6:00 ~ 22:00 とし、推定を行う時間帯  $T$  は 2 時間刻みに設定する。これにより、各日 8 つの時間帯について、それぞれ対応するパラメータが定まる。  $\Delta t$  を 20 秒とすることにより系全体の離散時間刻みを定義し、対応する時空間ネットワーク

を構築する。発生時刻は 5 分間隔、集中時刻は 15 分間隔で設定する。すなわち、  $M^O = 15$ ,  $M^D = 45$  である。これにより、時空間 OD ペア数は 1 つの時間帯あたり約 300 万ペアとなる。

## 5. おわりに

本稿では、首都圏高速道路網における動的な OD 推定モデルのパラメータの動的な変動特性を検証することを目的として、動的な OD 交通量推定モデルのパラメータを効率的に最尤推定する方法、ならびに推定の枠組みを提示した。より具体的には、まず代表的な OD 推定モデルである二重制約エントロピーモデルを、時空間ネットワークを活用し、動的枠組みに拡張した。つぎに、モデル・パラメータを最尤推定するための最適化問題を定式化し、双対問題を考えることにより Newton-Raphson method と Bregman's Algorithm を組み合わせた効率的な計算手法を構築した。最後に、首都圏高速道路網におけるパラメータ推定の枠組みを示した。パラメータの推定結果、およびその動的な変動特性については講演時に発表する予定である。

謝辞： 本研究を進めるにあたり、首都高速道路株式会社、日本道路交通情報センター (JARTIC) より貴重なデータをご提供いただきました。また本研究は、日本学術振興会・科学研究費補助金・基盤研究 (B) (課題番号：18H01551) の助成を受けた研究の一部です。ここに記し、感謝を表します。

## 付録 I 時空間 OD ペア

本研究では、静的モデルにおける OD ペア  $(r, s)$  を時空間 OD ペア  $(o, d)$  に置換することにより、モデルを動的な枠組みへ拡張している。時空間 OD ペアは、時々刻々の観測データに基づき、推定を行う日ごとに決定する必要がある。なお、観測データの性質や時間刻みの設定に依存しない、一般的な時空間 OD ペアの決定方法を示すことは困難なため、以下では本研究で採用した方法を一例として示す。

時空間ネットワーク上で、起点  $r$  に対応するノード、終点  $s$  に対応するノードの集合をそれぞれ  $\mathcal{O}_r, \mathcal{D}_s$  とする。このとき、時空間起点ノード  $o \in \mathcal{O}_r$  は、発生時刻  $\mathcal{T}_i^O$  により区別される。時空間起点ノード  $o$  に対応する時空間終点ノード  $d$  は、ある基本離散時刻  $t_s \in \mathcal{T}_i^O$  における起点  $r$  から終点  $s$  への最小旅行時間  $c_{rs}(t_s)$  により決定し、以下を満たす集中時刻  $\mathcal{T}_j^D$  により定義される。

$$t_e = t_s + c_{rs}(t_s) \quad \text{where } t_e \in \mathcal{T}_j^{Des} \quad (\text{I.1})$$

$t_e$  は  $\mathcal{T}_j^{Des}$  に含まれるある基本離散時刻を表す。本研

究では,  $t_s$  は  $\mathcal{T}_i^{Ori}$  に含まれる時刻の中央値とする. また, 時空間 OD 旅行時間は  $c_{od} := c_{rs}(t_s)$  を満たす

## 付録 II 最尤方程式の導出

動的な二重制約エントロピーモデルの尤度関数は以下のように表現される:

$$s(\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max. \prod_{(o,d) \in \mathcal{P}} \left( \frac{q_{od}}{Q} \right)^{\hat{q}_{od}} \quad (\text{II.1})$$

s.t.

$$\sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} \frac{q_{od}}{Q} = 1 \quad (\text{II.2})$$

パラメータ  $\gamma$  の最尤推定量  $\hat{\gamma}$  は, 尤度関数を最大にする.  $\hat{\gamma}$  は, 対数尤度関数:

$$\ln s(\gamma) = \sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} \hat{q}_{od} \ln q_{od} - \sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} \hat{q}_{od} \ln Q \quad (\text{II.3})$$

s.t. 式 (II.2)

も同様に最大化する. ここで, 式 (II.3) の第 2 項はモデル・パラメータに依存しないため, 第 1 項のみを考える. さらに, 制約条件式 (II.2) を, 対応するラグランジュ乗数を  $\lambda$  としてラグランジュ緩和する. 改めて, 対数尤度関数は以下の式で与えられる:

$$\ln s(\gamma) = \sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} \hat{q}_{od} \ln q_{od} - \lambda \left( \sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} \frac{q_{od}}{Q} - 1 \right) \quad (\text{II.4})$$

対数尤度関数を最大にする  $\hat{\gamma}$  は以下の式を満たす:

$$\frac{\partial \ln s(\hat{\gamma})}{\partial \gamma} = 0 \quad (\text{II.5})$$

式 (1)-式 (3), ならびに観測交通量についての保存則:

$$\sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} \hat{q}_{od} = Q \quad (\text{II.6})$$

に注意すると, 式 (II.5) から式 (7) を得る.

## 付録 III [Est-P] の等価性の証明

[Est-P] が動的な二重制約エントロピーモデルのパラメータを最尤推定する問題と等価であることを示す.

[Est-P] のラグランジュ関数を

$$\begin{aligned} L_P(\mathbf{q}, \gamma, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) &= Z_P(\mathbf{q}) + \gamma \left( \sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} c_{od} q_{od} - \hat{E} \right) \\ &\quad + \sum_{o \in \mathcal{O}} \mu_o \left( \sum_{d \in \mathcal{D}} q_{od} - O_o \right) + \sum_{d \in \mathcal{D}} \nu_d \left( \sum_{o \in \mathcal{O}} q_{od} - D_d \right) \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

s.t. 式 (10)

と定義する.  $\mu_o$  と  $\nu_d$  はそれぞれ保存則に対応するラグランジュ乗数であり,  $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$  はそのベクトルである. [Est-

P] の KKT 条件を列挙すると以下の通り:

$$\begin{cases} q_{od}(\gamma c_{od} + \mu_o + \nu_d + \ln q_{od}) = 0 & \forall o \in \mathcal{O}, d \in \mathcal{D} \\ \gamma c_{od} + \mu_o + \nu_d + \ln q_{od} \geq 0 & \forall o \in \mathcal{O}, d \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

and 式 (9), (4), (5)

式 (III.2) からは, 以下の式を得る:

$$q_{od} = \exp(-\mu_o - \nu_d - \gamma c_{od}) \quad (\text{III.3})$$

ここで, 以下のパラメータを導入する:

$$\exp(-\mu_o) = A_o O_o \quad \forall o \in \mathcal{O} \quad (\text{III.4})$$

$$\exp(-\nu_d) = B_d D_d \quad \forall d \in \mathcal{D} \quad (\text{III.5})$$

where 式 (4), (5)

式 (III.3)~(III.5) より, 式 (1) を得る. これより, [Est-P] の等価性が示された.

## 付録 IV [Est-D] の等価性の証明

[Est-P] が動的な二重制約エントロピーモデルのパラメータを最尤推定する問題と等価であることを, Wong<sup>7)</sup> に基づき示す.

式 (II.3) の対数尤度関数を整理すると以下を得る:

$$\ln s(\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} \hat{q}_{od} \ln q_{od} - \hat{q}_{od} \ln Q \quad (\text{IV.1})$$

第 2 項は,  $\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}$  に依存しない定数であるので, 第 1 項のみを考える. 式 (1) を代入すると以下を得る:

$$\begin{aligned} \ln s(\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \sum_{(o,d) \in \mathcal{P}} \hat{q}_{od} (-\gamma c_{od} + \ln A_o + \ln O_o + \ln B_d + \ln D_d) \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

where 式 (2), (3)

また, 観測交通量について以下の保存則が成立する:

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} \hat{q}_{od} = O_o \quad \forall o \in \mathcal{O} \quad (\text{IV.3})$$

$$\sum_{o \in \mathcal{O}} \hat{q}_{od} = D_d \quad \forall d \in \mathcal{D} \quad (\text{IV.4})$$

式 (IV.2) の第 3 項, 第 5 項もまた,  $\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}$  に依存しない定数であることを注意する. さらに, 式 (12) の第 1 項は定数であることを踏まえると, 式 (11) と保存則から, 対数尤度関数は式 (12) と等価な以下の形で表現できる:

$$\ln s(\gamma, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}) = \sum_{o \in \mathcal{O}} O_o \ln A_o + \sum_{d \in \mathcal{D}} D_d \ln B_d - \gamma \hat{E} \quad (\text{IV.5})$$

これより, [Est-D] の等価性が示された.

## 付録 V Bregman's Algorithm

所与のパラメータ  $\gamma$  のもとで, 時空間 OD 推定を行う Bregman's Algorithm([Algo-BG]) を示す.

## [Algo-BG]

**Step.0 Initialization**

バランシング・パラメータの初期値  $A_o^n := 1$ , 繰り返し回数  $n := 0$  とする.

**Step.1 Updating of Parameter  $B_d$** 

すべての時空間終点ノード  $d$  について, 対応するバランシング・パラメータを以下の式:

$$B_d^n = \left[ \sum_{o \in \mathcal{O}} A_o^n O_o \exp(-\gamma c_{od}) \right]^{-1}$$

により更新:

**Step.2 Updating of Parameter  $A_o$** 

すべての時空間起点ノード  $o$  について, 対応するバランシング・パラメータを以下の式:

$$A_o^{n+1} = \left[ \sum_{d \in \mathcal{D}} B_d^n D_d \exp(-\gamma c_{od}) \right]^{-1}$$

により更新:

**Step.3 Convergence test**

収束条件を以下の式により判定:

$$\sum_{o \in \mathcal{O}} \frac{|A_o^{n+1} - A_o^n|}{A_o^n} + \sum_{d \in \mathcal{D}} \frac{|B_d^{n+1} - B_d^n|}{B_d^n} \leq \epsilon$$

収束条件を満たした場合, 時空間 OD 交通量を以下の式:

$$q_{od} = A_o^n B_d^n O_o D_d \exp(-\gamma c_{od})$$

により計算して終了. 満たさない場合は  $n := n + 1$  として **Step.1** へ.

## 参考文献

- 1) Nguyen, S., Morello, E. and Pallottino, S. : Discrete time dynamic estimation model for passenger origin/destination matrices on transit networks, *Transportation Research Part B*, Vol. 22, No. 4, pp. 251-260, 1988.
- 2) Cascetta, E., Inaudi, D. and Marquis, G. : Dynamic estimators of origin-destination matrices using traffic counts, *Transportation Science*, Vol.27, No.4, pp. 363-373, 1993.
- 3) 小根山裕之, 桑原雅夫: 路側観測交通量からの時間変化する OD 交通量の推定, *交通工学*, Vol.32, No.2, pp.5-16, 1997.
- 4) 吉井稔雄, 桑原雅夫, 赤羽弘和, 堀口良太: トラフィックシミュレーションを用いた路側観測交通量からの動的 OD 交通量の推定, *土木計画学研究・論文集*, Vol.15, pp.461-468, 1998.
- 5) 三輪富生, 山本俊行, 竹下知範, 森川高行: プローブカーの速度情報を用いた動的 OD 交通量の推定可能性に関する研究, *土木学会論文集 D*, Vol.64, No.2, pp.252-265, 2008.
- 6) Evans, A. W. : The calibration of trip distribution models with exponential or similar cost functions, *Transportation Research*, Vol.5, pp. 15-38, 1971.
- 7) Wong, S. D. : Maximum likelihood, entropy maximization, and the geometric programming approaches to the calibration of trip distribution models, *Transportation Research Part B*, Vol.15, pp. 329-343, 1981.
- 8) 矢野桂司: 一般線形モデルによる空間相互作用モデルの統合, *地理学評論*, Vol.64, pp. 367-387, 1991.
- 9) Akamatsu, T.: Decomposition of Path Choice Entropy in General Transport Networks, *Transportation Science*, Vol. 31, pp. 349-362, 1997.
- 10) 土木学会: 交通ネットワークの均衡配分—最新の理論と解法—, 1998.
- 11) 宮本裕一郎: 数理最適化入門 (3): lagrange 緩和と劣勾配法 (チュートリアル), *応用数理*, Vol.23, No.3, pp.129-134, 2013.
- 12) 藤田 素弘, 村上 慎太郎: 地域別方向別と域外交通を考慮した時間変動係数に基づく時間帯別 OD 交通量の逆推定手法, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol. 72, No. 5, pp.617-625, 2016:
- 13) Cuturi, M. and Peyre, G: Semi-dual Regularized Optimal Transport, *SIAM Review*, Vol.60. No. 4, pp.941-965, 2018

(2019. 10. 4 受付)

PARAMETER ESTIMATION OF OD FLOW ESTIMATION MODEL IN  
METROPOLITAN EXPRESSWAY NETWORK

Yutaro ISHIKAWA, Takara SAKAI and Takashi AKAMATSU