

# 複数信号の系統制御問題に対する Benders 分解 アプローチ

佐々木 勇人<sup>1</sup>・長江 剛志<sup>2</sup>

<sup>1</sup>学生非会員 東北大学大学院 工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-11-814)  
E-mail: yuto.sasaki.r3@dc.tohoku.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 東北大学准教授 工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-11-814)  
E-mail: nagae@tohoku.ac.jp

本研究では複数の信号交差点をもつような街路における信号制御問題の解法を開発することを目的とする。具体的には、まず、信号交差点での待ち行列の発生・進展・消滅を変分モデルを用いて記述する枠組の下で、信号制御問題を、大規模な混合整数計画問題として定式化する。次に、Benders 分解原理を適用することで、この問題を、信号現示を与件として総遅れ時間を求めるサブ問題と、過去に実現した総遅れ時間を最小化する信号現示を求めるマスター問題とに分解する。本研究では、マスター問題の(本来ミニマックス型の)目的関数を、ログサム関数を用いて平滑化近似した上で、部分線形近似を行う。こうして得られた近似問題が、heuristicsであることを示す。

**Key Words:** 信号系統制御, 変分理論, Benders 分解, max-min 整数計画問題

## 1. はじめに

複数の信号交差点で構成される路線の系統信号制御においては、隣合う信号が適切に協調できていないと、下流側の信号交差点で発生した渋滞が延伸して上流側の信号交差点への流入を阻害する現象(“spill-back 現象”)が生じる。この spill-back 現象の発生・進展・消滅を変分理論<sup>1),2)</sup>を用いて記述しながら信号制御問題を取り扱った研究として<sup>3),4),5)</sup>が挙げられる。しかし、これらの研究では、いずれも、対象とする信号全ての現示を同時に決定する中央集権的な制御を想定しており、多数の信号交差点で構成される都心部道路ネットワークを対象とするリアルタイムな交通制御にそのまま適用することは困難である。

そこで、本研究では信号制御問題を混合整数計画問題として定式化し、Benders 分解原理を用いて最短経路探索問題のサブ問題と信号現示を求めるマスター問題とに分解する。その後、マスター問題に平滑化近似と部分線形化を行なうことで、heuristics な解法となり、多数の信号交差点を持つ大規模問題に対しても実時間内で解くことができる解法を提案する。

## 2. モデル

本研究では、Wada et al.<sup>5)</sup>によって提案された枠組を複数路線が交錯する道路ネットワークへと拡張したものをを用いる。

### (1) 問題の枠組

分析時間帯を  $[0, T]$  とする。分析時間帯は  $T$  個の離散的な時点に等分割され、その長さを  $\Delta T$  とする。時点にはそれぞれ  $i = 1, 2, \dots, T$  と順にインデックスがつけられ、そのインデックス集合を  $\mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$  とする。時点  $i$  の期末の絶対時刻を  $t_i = i\Delta T$  で表す。便宜上、分析開始時刻  $t = 0$  を期末時刻とするような仮想的な時点を初期時点と呼び、 $i = 0$  で表す。初期時点を含む時点集合を  $\hat{\mathcal{T}} = \{0\} \cup \mathcal{T}$  で表す。

分析対象は複数の路線と信号交差点で構成される図 1 のような任意の構造の道路ネットワークとする。ネットワークを構成する路線のインデックス集合を  $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$ 、信号交差点のインデックス集合を  $\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$  とする。双方向通行路線の場合は、各方向を、それぞれを 1 つの路線と見なす(例えば、図 1 の例において、 $m = 1$  と  $m = 2$  は、それぞれ東向き、西向きに対応する)。

路線  $m \in \mathcal{M}$  の長さを  $L_m$  で表し、上流端を  $y = 0$ 、下流端を  $y = L_m$  とする。路線  $m \in \mathcal{M}$  上の信号交差点の集合を  $\mathcal{K}_m \subseteq \mathcal{K}$  とし、その数を  $S_m = |\mathcal{K}_m|$  とする。信号交差点  $k \in \mathcal{K}$  を含む路線の集合を  $\mathcal{M}_k = \{m : \mathcal{K}_m \ni k\}$  で表す。信号交差点は、各路線の上流から順に  $1, \dots, S_m$  とインデックスがつけられるものとし、その上流端からの相対的位置を  $y_{m,k} \in [0, L_m]$  で表す。(例えば、図 1 の例では、路線  $m = 5$  上の交差点は、上流から順に、 $k = 2, 3, 4$  であり、逆方向の路線  $m = 6$  上の交差点は、上流から順に、 $k = 4, 3, 2$  である)。表記の簡便化のため

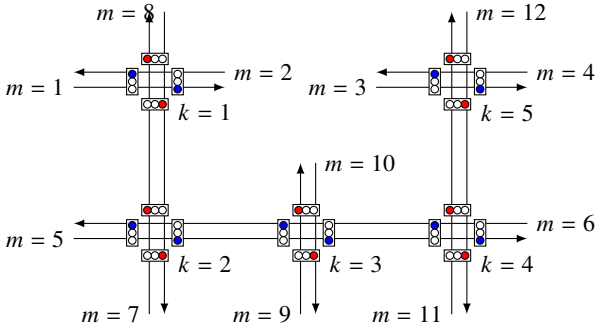


図 1 対象道路ネットワーク (11 路線 5 信号交差点の例)

に,  $y_{m,0} = 0, y_{s_{m+1}} = L_m$  とする.

路線  $m$  と信号交差点  $k \in \mathcal{K}_m$  の接続関係を, 以下の Kronecker デルタ  $a_{m,k,s}$  で表す:

$$a_{m,k,s} = \begin{cases} 1 & \text{if 信号交差点 } k \text{ が} \\ & \text{路線 } m \text{ の } s \text{ 番目交差点} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

任意の時点  $i \in \mathcal{T}$  について, 1 つ前の期末から当該時点の期末直前までの間  $[(i-1)\Delta T, i\Delta T)$  における信号  $k \in \mathcal{K}$  の路線  $m \in \mathcal{M}_k$  に対する現示を, 以下の二値変数  $x_{k,m}(i)$  で表す:

$$x_{k,m}(i) = \begin{cases} 1 & \text{if 信号 } k \text{ の路線 } m \text{ に対する現示が青} \\ 0 & \text{if 信号 } k \text{ の路線 } m \text{ に対する現示が赤} \end{cases} \quad (2)$$

時点  $i \in \mathcal{T}$  の信号  $k$  の現示を  $\mathbf{x}_k(i) = \{x_{k,m}(i) : \mathcal{K}_m \ni k\}$  とし,  $\mathbf{x}_k = \{\mathbf{x}_k(i) : i \in \mathcal{T}\}$ ,  $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_k : k \in \mathcal{K}\}$  とする. 信号  $k$  の可能な現示の集合を  $\mathcal{X}_k$  で表し, 全信号の可能な現示の集合を  $\mathcal{X} = \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{X}_k$  で表す.

## (2) 変分理論による遅れ時間の評価と信号制御問題

本研究では, ある信号現示パターン  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  の下での遅れ時間を変分理論<sup>1),2)</sup> によって評価する. 変分理論では, 各路線  $m \in \mathcal{M}$  について, 時空間上の任意の点  $(t, x)$  における累積交通量  $N_m(t, x)$  を求め, 信号制御により下流端の累積台数を最小化させる問題と考えられる.

## (3) 偏格子ネットワークによる時空間表現

道路区間は全て一様であるとし, FW (forward wave, 前進波) 速度  $u$ , BW (backward wave, 後進波) 速度  $-w$  および最大流量  $q_{\max}$  であるところの三角形の FD (fundamental diagram, 基本図) で特徴づけられるとする. 路線  $m \in \mathcal{M}$  の長さを  $L_m$  で表す. 空間  $[0, L_m]$  を, 一定の幅  $\Delta X$  で離散化し, 上流から順に  $l = 0, 1, \dots, L_m$  とインデックスをつける. 上流から  $l$  番目の空間  $[l\Delta X, (l+1)\Delta X)$  を地点  $l$  と呼び, その上流側の位置を  $\ell_{m,l} = l\Delta X$  で表す.

便宜上, 各路線の下流端の位置を  $\ell_{m,L_m} = L_m\Delta X = L_m$  で表す. 簡単のため, 任意の路線  $m$  の長さおよび上流端からの各交差点までの距離は  $\Delta X$  の整数倍であると仮定する.

変分理論では, こうして離散化された時空間を, 図 2 のような偏格子ネットワーク (lopsided network) を用いて表現する. 偏格子ネットワークは, 以下のようにして構成される:

1. 各路線について時空間上に偏格子の格子点集合  $\gamma_m$  を構成する. 具体的には, まず, 路線  $m \in \mathcal{M}$  の任意の地点  $l = 0, 1, \dots, L_m$  について, 上流端から FW 速度  $u$  で移動する観測者が位置  $\ell_l = l\Delta X$  に到達するまでの時間 (自由走行時間) を  $\Delta\tau_{m,l} = (l\Delta X)/u$  とする. 次に, 任意の時点  $j \in \hat{\mathcal{T}}$  について, 期末時刻  $j\Delta T$  に路線  $m$  の上流端を出発して FW 速度  $u$  で移動する観測者が地点  $j$  に到着する時刻 (以下, 相対時刻) を

$$\tau_{m,l}(j) = j\Delta T + \Delta\tau_{m,l} = \left(j + \frac{w}{u+w}l\right)\Delta T \quad (3)$$

とする. 最後に, 任意の  $(j, l) \in \hat{\mathcal{T}} \times \{0, 1, \dots, L_m\}$  について, 相対時刻  $\tau_{m,l}(j)$  と位置  $x_l$  の組からなる格子点の集合を

$$\gamma_m = \{(\tau_{m,l}(j), \ell_{m,l}) : j \in \hat{\mathcal{T}}, l = 0, \dots, L_m\} \quad (4)$$

とし, そのインデックス集合を  $\{(j, l) : j \in \hat{\mathcal{T}}, l = 0, \dots, L_m\}$  で表す.

なお, この各格子点が FW 速度  $u$  および BW 速度  $-w$  のいずれの傾きに対しても並行となる (i.e. 格子を形成する) ためには, 離散化された時点幅  $\Delta T$  および地点幅  $\Delta X$  の間に以下の関係が成立している必要がある:

$$\Delta T = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{w}\right)\Delta X \quad (5)$$

2.  $\gamma_m$  上の隣合う格子を FW 速度  $u$  および BW 速度  $-w$  に等しい傾きを持つ有向リンク (それぞれ, **FW** リンク および **BW** リンク と呼ぶ) および傾き 0 の信号リンク で結び, 偏格子ネットワークを構成する. 具体的には, 任意の格子点  $(j, l)$  について, 以下のルールに従ってリンクを構成する:

- (a)  $j < T$  かつ  $l < L_m$  なら, 格子点  $(j+1, l+1)$  へ傾き  $u$  の FW リンクを張る.
- (b)  $j < T$  かつ  $l > 0$  なら, 格子点  $(j+1, l-1)$  へ傾き  $-w$  の BW リンクを張る.
- (c)  $j < T$  かつ地点  $l$  に信号が存在するなら, 格子点  $(j+1, l)$  へ傾き 0 の信号リンクを張る.

3. こうして構成された各リンク (FW リンク, BW リンク および 信号リンク) の相対容量 (当該リンクに沿って移動する観測者を追い越せる車両数の上限)

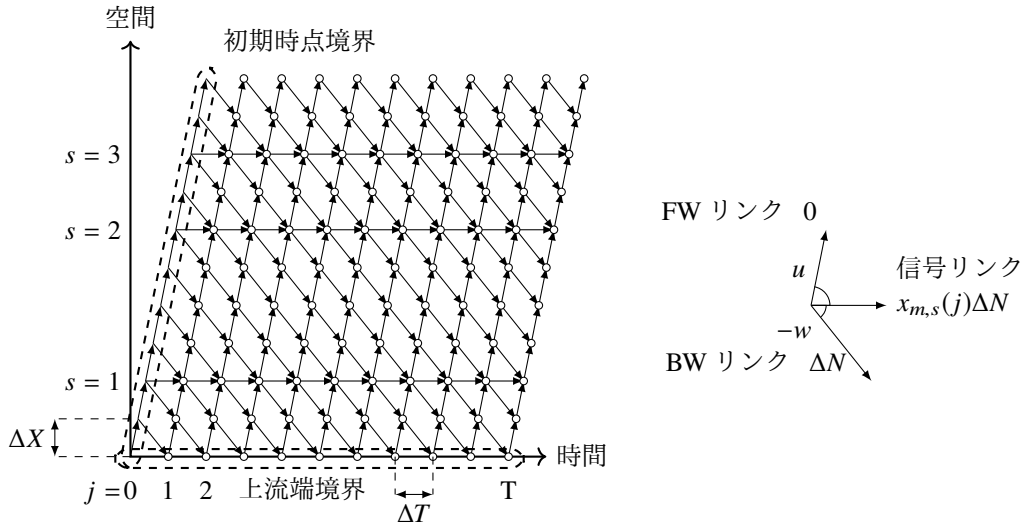


図 2 変分理論で用いられる偏格子ネットワーク

を、それぞれ、

$$\begin{cases} 0 & \text{FW リンク} \\ \Delta N & \text{BW リンク} \\ x_{m,s}(j)\Delta N & \text{信号リンク (ただし, 当該信号が} \\ & \text{路線 } m \text{ の } s \text{ 番目信号であるとき)} \end{cases}$$

とする。ここで、 $\Delta N = q_{\max}\Delta T = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{w}\right)q_{\max}\Delta X$  である。 $x_{m,s}(j)$  は路線  $m$  の  $s$  番目信号の相対時点  $j$  (時点  $\tau_{m,s}(j)$ ) における現示であり、

$$x_{m,s}(j) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{i=0}^T \sum_{s=1}^{S_m} \delta_{m,l}(i,j) a_{m,k,s} x_{k,m}(i) \quad (6)$$

と定義される。ただし、 $\delta_{m,l}(i,j)$  は絶対時点  $i$  と路線  $m$  の地点  $l$  における相対時点  $j$  の関係を表す Kronecker であり、以下の式で定義される：

$$\delta_{m,k}(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i\Delta T = \tau_{m,s}(j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

#### (4) 変分理論による累積交通量の導出

偏格子上の任意の格子点  $(j, l)$  に対して、時刻  $\tau_{m,l}(j)$  までに位置  $l_l$  を通過する累積交通量を、 $N_{m,l}(j) = N_m(\tau_{m,l}(j), l_l)$  で表す。

変分理論<sup>1),2)</sup> は、時空間上の適当な境界  $\mathcal{D}$  上で観測される累積交通量に基づいて、それらの境界から有効な波速 (valid wave velocities) に沿って観測者が移動する時の交通量の“変分”を考えることで、時空間上の任意の点における累積交通量を求める手法である。

路線  $m$  の累積交通量  $N_m = \{N_{m,s}(j) : s = 1, \dots, S_m, j \in \mathcal{T}\}$  は、当該路線ごとの境界条件と信号パターンから変分理論に基づいて求められる。

具体的には、まず、路線ごとに、時空間上に図 2 の

ような偏格子ネットワーク (lopsided network) を構成する。この偏格子ネットワークは、以下のようにして構成される：

1. 時間および空間を、それぞれ、 $\Delta T$  および  $\Delta X$  の幅で等間隔に離散化する。ただし、離散時点は  $\mathcal{T}$  と同じものを用いることとし、空間方向については FW 速度  $u$  での移動に沿って離散化する。このため、空間幅は  $\Delta X = \frac{uw}{u+w}\Delta T$  とする。離散化された地点には、 $l = 0, 1, \dots, L$  とインデックスをつける。
2. この偏格子上の点を、FW 速度  $u$  および BW 速度  $-w$  に等しい傾きを持つリンク (それぞれ、FW リンク および BW リンク と呼ぶ) で結ぶ。さらに、信号が存在する地点については、傾き 0 の信号リンクを加える。本稿では、時点  $i$  から  $i+1$  までの信号リンクを結ぶ。
3. 累積交通量が観測可能となる時空間上の点を境界として与える。本稿では、簡単のため、この境界として、初期時点における任意の地点の累積交通量 (初期時点境界) と、上流端における流入交通量 (上流端境界) を与える。

変分理論により、偏格子ネットワーク上の任意の時点  $j$ , 地点  $l$  における累積交通量  $N_{m,l}(j)$  は、下記の 3 つの制約を満たす必要が以下の不等式を満たす中で最大のものとして求められる：

$$N_{m,l}(j) \leq N_{m,l-1}(j) \quad (8a)$$

$$N_{m,l}(j) \leq N_{m,l+1}(j-1) + \Delta N \quad (8b)$$

$$N_{m,l}(j) \leq N_{m,l}(j-1) + x_{m,s}(j)\Delta N \quad \text{if 地点 } l \text{ に } s \text{ 番目信号が存在} \quad (8c)$$

ただし、 $\Delta N = q_{\max}\Delta T = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{w}\right)q_{\max}\Delta X$  は、三角形 FD において、観測者が  $[-w, u]$  の範囲内の有効波速

(possible wave speed) で移動する時、この観測者を時間  $\Delta T$  (もしくは空間  $\Delta X$ ) の間に追い越せる車両の上限 (相対交通容量) を表す<sup>1</sup>。

この偏格子は、時間方向に FW 速度  $u$  に沿って“傾いて”いることに注意されたい。各地点で参照される時刻を上流端に流入した車両が FW 速度に沿って当該地点に到着する“相対時刻”とすることで、見通しのよい分析が可能となる。いま、路線  $m$  の上流端に流入した車両が FW 速度  $u$  で地点  $l$  に到達するまでの時間 (自由走行時間) を  $\Delta\tau_{m,l} = \frac{l\Delta X}{u}$  で表せば、時点  $j$  に上流端に流入した車両が地点  $l$  に到達する相対時刻は

$$\tau_{m,l}(j) = j\Delta T + \Delta\tau_{m,l} = \left(j + \frac{w}{u+w}\right)\Delta T \quad (9)$$

と表せる。路線  $m$  ごとに構築された偏格子上の任意の格子点をとし、相対時刻  $\tau_{m,l}(j)$  までに位置  $x_l$  を通過する路線  $m$  の車両台数 (累積交通量) を

$$N_{m,l}(j) = N_m(\tau_{m,l}(j), x_l) \quad (10)$$

で表す。

初期時点を含む任意の時点  $j \in \mathcal{T}$  について、時刻  $j\Delta T$  に路線  $m$  の上流端に流入した車両が FW 速度  $u$  で移動した時に  $s$  番目交差点に到着する時点 (相対時点) を

$$\tau_{m,s}(j) = j + \sum_{r=1}^{s-1} \frac{\ell_{m,r}}{u\Delta T} \quad (11)$$

で表す。

時点  $j$  の期初から期末までの間  $((j-1)\Delta T, j\Delta T]$  に路線  $m$  (の上流端) へ流入する累積交通量を  $A_m(j)$  で表し、初期時点  $j=0$  については  $A_m(0) = 0$  とする。各路線への流入パターン  $\mathbf{A}_m = \{A_m(j) : j = 1, \dots, T\}$  は与件であるとする。時点  $\tau_{m,s}(j)$  における路線  $m$  の  $s$  番目信号交差点の累積交通量を  $N_{m,s}(j)$  で表す。分析開始時刻  $t=0$  に路線  $m$  に存在する累積交通量を、所与の定数  $N_m(0) := \{N_{m,s}(0) : s = 1, \dots, S_m\}$  で表す。表記の簡便のため、路線  $m$  の上流端への累積流入量を  $N_{m,0}(j) = A_m(j)$  とし、下流端からの累積流出量を  $D_m(j) = N_{m,S_m+1}(j)$  とする。

観測者が BW リンクに沿って  $\Delta X$  だけ移動測度  $-w$  に沿って速度  $[-w, u]$  で移動する観測者を時間  $\Delta T$  の間に追い越せる車両数の最大値 (相対交通容量) である。偏格子ネットワーク上の任意の時点  $j$ , 地点  $l$  における累積交通量  $N_{m,l}(j)$  に関する 3 つの制約 (8a), (8b) および (8c) は、それぞれ、

1. 上流側の地点  $l-1$  の累積台数は、下流側の地点  $l$  へ FW リンクに沿って移動した累積台数以下
2. 下流側の時点  $j-1$ , 地点  $l+1$  の累積台数に  $\Delta N$  を足したものは、上流側の時点  $j$ , 地点  $l$  へ BW リンクに沿って移動した累積台数以下

<sup>1</sup> 観測者を追い越す車両数が最大となるのは、観測者が BW 速度  $-w$  で  $\Delta X$  だけ移動する (BW リンクに沿って移動する) 場合、もしくは、信号が青の時に速度 0 で

3. 時点  $j-1$  の累積台数に信号リンクのコストを足したものは、信号リンクに沿って次の時点  $j$  へ移動した累積台数以下

となることを表している。

Wada et al.<sup>5)</sup> により、こうして構成された偏格子ネットワークに対して、さらに、境界上の点に対してダミーリンクを張ることで、偏格子ネットワーク上の累積台数を求める問題は、ダミーリンクを起点、各リンクを終点とした最短経路問題に帰着する。

変分理論では、この偏格子上の任意の点における累積交通量が、境界条件 (この場合は初期時点における累積交通量 (初期時点境界)) と信号現示により求められる。

変分理論により、累積交通量は、以下の式で求められる (詳細については<sup>5)</sup> を参照) :

$$N_{m,s}(j) = \min \{N_{m,s-1}(j), N_{m,s}(j-1) + x_{m,s}(j)\Delta N\} \quad j \in \mathcal{T}, s = 1, \dots, S_m, m \in \mathcal{M} \quad (12)$$

ここで、 $\Delta N = q_{\max}\Delta T$  である。式 (12) は、路線  $m$  の  $s$  番目交差点に相対時点  $j$  (絶対時点  $\tau_{m,s}(j)$ ) まで到達する累積交通量  $N_{m,s}(j)$  が、以下の不等式を満足する中で最大のものとなることを意味している:

1. 一つ上流の交差点から (FW リンクに沿って) 流入する時点  $j$  の交通量を超えない:  $N_{m,s}(j) \leq N_{m,s-1}(j)$ ;
2. その交差点に (信号リンクに沿って) 1 つ前の時点  $j-1$  から滞留してくる交通量を超えない:  $N_{m,s}(j) \leq N_{m,s}(j-1) + x_{m,s}(j)\Delta N$

路線  $m$  のスループット (累積流出交通量の全時点における総和) を

$$Z_m = \sum_{j \in \mathcal{T}} D_m(j) \quad (13)$$

と定義し、その総和  $\sum_{m \in \mathcal{M}} Z_m$  をネットワーク全体のスループットと定義する。これを最大化するための信号制御問題は、下記の大規模な組み合わせ計画問題として定式化できる:

[P0]

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{N}} \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{T}} D_m(j), \quad (14a)$$

$$\text{s.t. } N_{m,s}(j) \leq N_{m,s-1}(j), \quad s = 1, \dots, S_m, j \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{M} \quad (14b)$$

$$N_{m,s}(j) \leq N_{m,s}(j-1) + x_{m,s}(j)\Delta N, \quad s = 1, \dots, S_m, j \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{M} \quad (14c)$$

$$N_{m,0}(j) \leq A_m(j), \quad j \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{M} \quad (14d)$$

$$D_m(j) \leq N_{m,S_m+1}(j), \quad j \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{M} \quad (14e)$$

## (5) Benders 分解と平滑化

問題 [P0] は Bender 分解することにより、信号現示  $\mathbf{x}$  を決定する問題と、それに対応した累積交通量  $\mathbf{N}$  (ひい

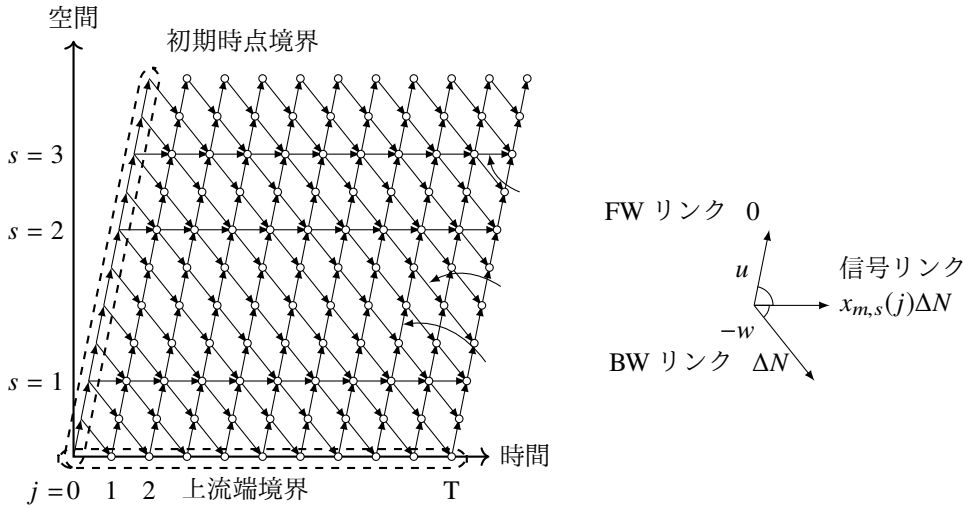


図 3 不要なリンクを省略した偏格子ネットワーク

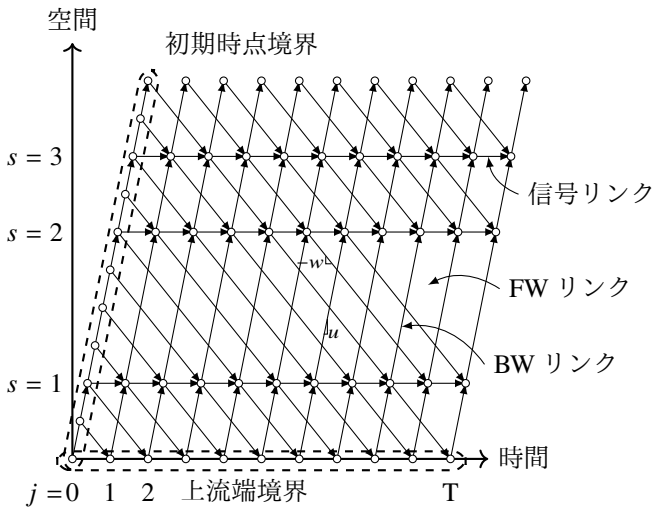


図 4 十分ネットワークを用いた変分モデルの計算方法

ては遅れ時間/スループット) を決定する問題とに分解できる. ある信号現示  $\mathbf{x}$  が与えられた時, 問題 [P0] の目的関数は, 以下の線形計画問題 (以下ではサブ問題と呼ぶ) の解として求められる:

[Sub-P]

$$Z(\mathbf{x}) = \max_N \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{T}} D_m(j), \quad (15a)$$

$$\text{s.t. } N_{m,s}(j) \leq N_{m,s-1}(j), \quad s = 1, \dots, S_m, j \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{M} \quad (15b)$$

$$N_{m,s}(j) \leq N_{m,s}(j-1) + x_{m,s}(j)\Delta N, \quad s = 1, \dots, S_m, j \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{M} \quad (15c)$$

$$N_{m,0}(j) \leq A_m(j), \quad j \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{M} \quad (15d)$$

$$D_m(j) \leq N_{m,S_m+1}(j), \quad j \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{M} \quad (15e)$$

サブ問題の制約条件 (15b), (15c), (15d) および (15e)

の Lagrange 乗数を, それぞれ,  $f_{m,s}(j), g_{m,s}(j), f_{m,0}(j)$  および  $f_{m,S_m+1}(j)$  とすると, この問題の双対問題 (以下では, サブ双対問題と呼ぶ) は, 以下のように定式化される.

[Sub-D]

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{x}) = \min_{f,g} & \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{T}} f_{m,0}(j) A_m(j) \\ & + \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{s=1}^{S_m} g_{m,s}(1) N_{m,s}(0) \\ & + \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{T}} \sum_{s=1}^{S_m} g_{m,s}(j) x_{m,s}(j) \Delta N, \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\text{s.t. } f_{m,s}(j) + g_{m,s}(j) - f_{m,s+1}(j) - g_{m,s}(j+1) = 0, \quad s = 1, \dots, S_m, j = 1, \dots, T-1, m \in \mathcal{M} \quad (16b)$$

$$f_{m,s}(T) + g_{m,s}(T) - f_{m,s+1}(T) = 0, \quad s = 1, \dots, S_m, m \in \mathcal{M} \quad (16c)$$

$$f_{m,S_m+1}(j) = 1, \quad j \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{M} \quad (16d)$$

$$f_{m,s}(j) \geq 0, g_{m,s}(j) \geq 0, \quad (16e)$$

$$s = 1, \dots, S_m, j \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{M} \quad (16f)$$

サブ双対問題 [Sub-D] は, 各路線の累積交通量が, ある種の「最短経路探索」によって求められることを示している. 具体的には, 各路線について, 図 2 のような偏格子 (lopsided network) を構成する. 境界上で観測される累積交通量 (i.e. 上流端での累積流入量  $A_m$  および初期状態における累積交通量  $N_m(0)$ ) を与件とした下流端の目的関数の各項は, それぞれ, 各路線の上流端で観測される累積交通量の境界条件, 各路線の初期状態で観測される累積交通量の境界条件, および, 信号リンクを通過する車両の累積台数となる.

サブ双対問題 [Sub-D] の実行可能解の空間  $\Omega_D =$

$\{(f, g)\}$ (16b) to (16f) は、信号パターン  $\mathbf{x}$  とは独立である。

サブ双対問題 [Sub-D] の最適解は、その端点  $(f^{(1)}, g^{(1)}), \dots, (f^{(P)}, g^{(P)})$  のいずれかになる。このことを用いれば、元の問題 [P0] は、以下の max-min 組み合わせ計画問題として記述できる:

$$[\text{P0}] \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} Z(\mathbf{x}) = \min_{p=1, \dots, P} Z^{(p)}(\mathbf{x}) \quad (17)$$

ここで、 $Z^{(p)}(\mathbf{x})$  は端点  $(f^{(p)}, g^{(p)})$  に対応する目的関数であり、

$$Z^{(p)}(\mathbf{x}) = Z_0^{(p)} + \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{i \in \mathcal{T}} \sum_{m \in \mathcal{M}} x_{k,m}(i) g_{k,m}^{(p)}(i) \Delta N \quad (18)$$

$$Z_0^{(p)} = \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{T}} f_{m,0}^{(p)}(j) A_m(j) + \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{s=1}^{S_m} g_{m,s}^{(p)}(1) N_{m,s}(0) \quad (19)$$

$$g_{k,m}^{(p)}(i) = \sum_{j \in \mathcal{T}} \sum_{s=1}^{S_m} a_{m,k,s} \delta_{m,k}(i, j) g_{m,s}^{(p)}(j) \quad (20)$$

と定義される。

問題 [P0] 自体を解くことは極めて困難なため、本研究では、平滑化近似と部分線形化を用いた heuristics を用いる。まず、問題 [P0] の目的関数を、以下の平滑化関数で近似する:

$$Z(\mathbf{x}) \approx \hat{Z}^\theta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_{p=1}^P \exp[-\theta Z^{(p)}(\mathbf{x})] \quad (21)$$

ここで、 $\theta > 0$  は平滑化パラメータである。 $\theta \rightarrow 0$  の極限において、 $\hat{Z}^\theta(\mathbf{x}) \rightarrow Z(\mathbf{x})$  である。

次に、平滑化近似された目的関数を最大化する問題:

$$[\text{P1}] \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \hat{Z}^\theta(\mathbf{x}) \quad (22)$$

を部分線形近似によって解くことを考えよう。 $n$  回目繰り返しにおいて暫定解  $\mathbf{x}^{(n)} \in \mathcal{X}$  が与えられた時、目的関数  $\hat{Z}^\theta$  を  $\mathbf{x}^{(n)}$  の周りで線形近似したものは、

$$\hat{Z}^\theta(\mathbf{x}) \approx \hat{Z}^\theta(\mathbf{x}; \mathbf{x}^{(n)}) = \hat{Z}^\theta(\mathbf{x}^{(n)}) + \nabla \hat{Z}^\theta(\mathbf{x}^{(n)})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)}) \quad (23)$$

と表せる。ここで、 $\nabla \hat{Z}^\theta(\mathbf{x}^{(n)})$  の典型的な要素は、

$$\frac{\partial \hat{Z}^\theta}{\partial x_{k,m}(i)}(\mathbf{x}^{(n)}) = \frac{\sum_{p=1}^P \exp[-\theta Z^{(p)}(\mathbf{x}^{(n)})] \frac{\partial Z^{(p)}}{\partial x_{k,m}(i)}(\mathbf{x}^{(n)})}{\sum_{p=1}^P \exp[-\theta Z^{(p)}(\mathbf{x}^{(n)})]} \quad (24)$$

$$= \frac{\sum_{p=1}^P \exp[-\theta Z^{(p)}(\mathbf{x}^{(n)})] g_{k,m}^{(p)}(i) \Delta N}{\sum_{p=1}^P \exp[-\theta Z^{(p)}(\mathbf{x}^{(n)})]} \quad (25)$$

と求められる。いま、

$$\pi^{(p)}(\mathbf{x}^{(n)}) = \frac{\exp[-\theta Z^{(p)}(\mathbf{x}^{(n)})]}{\sum_{p=1}^P \exp[-\theta Z^{(p)}(\mathbf{x}^{(n)})]} \quad (26)$$

と定義すれば、式 (25) は、

$$\frac{\partial \hat{Z}^\theta}{\partial x_{k,m}(i)}(\mathbf{x}^{(n)}) = \sum_{p=1}^P \pi^{(p)}(\mathbf{x}^{(n)}) g_{k,m}^{(p)}(i) = \bar{g}_{k,m}^{(p)}(i; \mathbf{x}) \quad (27)$$

と表せる。これを式 (23) に代入すれば、

$$\hat{Z}^\theta(\mathbf{x}; \mathbf{x}^{(n)}) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{i \in \mathcal{T}} x_{k,m}(i) \bar{g}_{k,m}^{(p)}(i; \mathbf{x}^{(n)}) + \text{const.} \quad (28)$$

を得る。

従って、平滑化された目的関数を暫定解  $\mathbf{x}^{(n)}$  の周りで一次近似したものを最大化する問題は、

$$[\text{P2}(\mathbf{x}^{(n)})] \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{i \in \mathcal{T}} x_{k,m}(i) \bar{g}_{k,m}^{(p)}(i; \mathbf{x}^{(n)}) \quad (29)$$

と求められる。ここで、 $\bar{g}_{k,m}^{(p)}(i; \mathbf{x}^{(n)})$  は、[P2] に対しては所与の定数である。このことは、問題 [P2] の解が、個々の信号交差点  $k \in \mathcal{K}$  についての問題:

$$[\text{P2}_k(\mathbf{x}^{(n)})] \mathbf{x}_k^*(\mathbf{x}^{(n)}) = \arg \max_{\mathbf{x}_k \in \mathcal{X}_k} \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{i \in \mathcal{T}} x_{k,m}(i) \bar{g}_{k,m}^{(p)}(i; \mathbf{x}^{(n)}) \quad (30)$$

を独立に解いた解を並べたもの

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{x}^{(n)}) = \left( \mathbf{x}_k^*(\mathbf{x}^{(n)}) : k \in \mathcal{K} \right) \quad (31)$$

として得られることを意味している。

### 3. おわりに

本研究では、信号制御問題において、規模が大きくなっても実時間内で解けるように Benders 分解法に着目し、heuristics な解法を提案した。

まず、信号制御問題を混合整数計画問題として定式化した。次に、この混合整数計画問題を、Benders 分解原理を用いて最短経路探索問題のサブ問題と信号現示を求めるマスター問題に分解した後、マスター問題に平滑化近似と部分線形化を行なった。これにより、提案手法が heuristics となり、大規模問題でも実時間内で解くことができると思われる。

#### 参考文献

- 1) Daganzo, C. F.: A variational formulation of kinematic waves: basic theory and complex boundary conditions, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 39, No. 2, pp. 187–196, 2005.
- 2) Daganzo, C. F.: A variational formulation of kinematic waves: Solution methods, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 39, No. 10, pp. 934–950, 2005.
- 3) Wu, X. and Liu, H. X.: A shockwave profile model for traffic flow on congested urban arterials, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 45, No. 10, pp. 1768–1786, 2011.
- 4) Han, K., Liu, H., Gayah, V. V., Friesz, T. L. and Yao, T.: A robust optimization approach for dynamic traffic signal control with emission considerations, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 70, pp. 3–26, 2016.

- 5) Wada, K., Usui, K., Takigawa, T., Kuwahara, M., Takikawa, T. and Kuwahara, M.: An optimization modeling of coordinated traffic signal control based on the variational theory and its stochastic extension on the variational theory and its stochastic extension, in *Transportation Research Procedia*, Vol. 23, p. forthcoming, Elsevier B.V., 2017.

(2019.10.4 受付)