

# 二次元空間における商業集積立地モデルの 確率安定性解析

鈴木 雅史<sup>1</sup>・山口 修平<sup>2</sup>・赤松 隆<sup>3</sup>

<sup>1</sup>非会員 東北大学 工学部建築・社会環境工学科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: masashi.suzuki.r5@dc.tohoku.ac.jp

<sup>2</sup>学生会員 東北大学大学院 情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: shuhei.yamaguchi.p7@dc.tohoku.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 東北大学教授 大学院情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

商業集積立地モデルには複数の均衡解が存在するため、解の安定性を吟味し均衡選択を行う必要がある。既往研究は一次元空間における局所安定性解析にとどまり、1) 空間が極度に理想化されている、2) 局所安定解は同時に複数存在しうる、という課題がある。本研究では、ポテンシャル・ゲームと確率安定性概念を用いて、二次元空間の商業集積立地モデルの大域的安定解を明らかにする。具体的には、輸送費用の低下に伴い、商業立地都市数が単調減少し集積が進展することが示される。

**Key Words:** retail location model, stochastic stability, potential game, local stability, invariant pattern

## 1. はじめに

商業立地は都市構造に重大な影響を及ぼすため、商業集積の空間的变化を正確に把握し予測することは土木計画学の重要な課題である。商業集積が生じるメカニズムは、商業活動に“集積の経済”が存在するからである。集積の経済を考慮した商業立地モデルとして Harris and Wilson<sup>1)</sup> のモデル（以下、HW モデル）が知られている。HW モデルは、消費者から店舗への地域間の需要が、店舗数に関する集積の経済を考慮した重力モデルによって表現され、企業利潤に関する均衡条件によって空間的な商業立地パターンが内生的に決定される。

HW モデルの立地パターンの性質は現在でも十分に明らかにされていない。その理由は、集積の経済と集積の不経済による相互作用によって、多数の安定・不安定な均衡解が存在するとともに、モデルの構造パラメータ (e.g., 交通費用) の変化に応じて均衡解の分岐現象が生ずることにある。例えば、Osawa et al.<sup>2)</sup> は一次元円周空間で均衡解の局所安定性を初めて評価した。しかし、局所安定な均衡解が複数同時に存在することが示されており、どの解が最も実現しやすいのかを議論するには至っていない。また、一次元空間で得られた集積・分散現象の特性が、二次元空間に拡張しても成立するかは自明ではない。

本研究の目的は、二次元空間における HW モデルで均衡解の安定性とその特性を明らかにすることである。具体的には、線形安定性解析に基づく局所安定性と、確

率安定性解析に基づく大域安定性という、異なる 2 つの安定判別方法により均衡解の安定性を評価する。線形安定性解析は、均衡点への調整動学を定義し、その Jacobi 行列の固有値を求めることで解の安定性を判定可能である。一方で、確率安定性解析は一般には実行困難だが、以下の事実から本研究のモデルに適用可能である：

- 1) HW モデルはポテンシャル・ゲームに帰着する、
- 2) ポテンシャル・ゲームでは、ポテンシャル関数を大域的に最大化する解と確率安定解は一致する (Sandholm<sup>3)</sup>)。

すなわち、均衡解におけるポテンシャル関数値の大きさを評価することで、唯一の<sup>1)</sup>大域安定解を特定することができる。

これら二通りの安定性解析によって、以下の事実が明らかにされる。第 1 に、ある構造パラメータの下では、局所安定な均衡解が多数存在することが示される。第 2 に、交通費用パラメータの値を下げていくと、大域安定な均衡立地パターンの商業集積地点数が単調減少する。つまり、大域安定解は“均等分散パターン”→“多極パターン”→“一極集中パターン”と推移する。

本研究では、以下の二つの条件を仮定して、安定性解析を行った：

<sup>1</sup> ポテンシャル関数値を最大化する均衡解が複数存在する場合を除く。

- 1) 空間設定は二次元周期境界とする,
- 2) 均衡解の候補を自明解のみとする.

周期境界の仮定は空間の異質性が取り除かれ, 各立地点が地理的に対称であるという理想化された空間構造であり, モデル内の純粋に経済学的な空間的相互作用のみがもたらす結果を調べられるため採用した. また, 自明解とはモデルの構造パラメータに依存することなく空間分布パターンを保持する均衡解である. Ikeda et al.<sup>4)</sup> は, 二次元周期境界条件下において自明解に着目した分岐解析を行い, 集積経済モデルの挙動が自明解によって把握できることを示している. そこで, 本研究では安定解の候補集合を自明解のみとした.<sup>2</sup>

本稿の構成は以下のとおりである. 第 2 章では, HW モデルの定式化をする. 第 3 章では, 線形安定性の概念と局所安定性の判定方法を示す. 第 4 章では, 確率安定性の概念と大域安定性の判定方法を示す. 第 5 章では, 均衡解の候補とする自明解を列挙し, 数値計算によって均衡解の局所安定性と大域安定性を評価する. 最後に, 第 6 章で結論と今後の展望を述べる.

## 2. Harris & Wilson モデル

本稿では, Harris & Wilson によって提案されている複数のモデルのうち, 最も単純なタイプのモデルを HW モデルと呼ぶ. 本章では, Osawa et.al<sup>2)</sup> に基づいた HW モデルの定式化を簡潔にまとめる. なお, 本稿で採用する定式化とオリジナルの HW モデルとで, 均衡解の性質は変わらない.

### (1) 状況設定

離散的な立地点が  $K$  箇所存在する空間を考える. 全立地点の集合を  $\mathcal{K} \equiv \{0, \dots, K-1\}$  とし, 二つの立地点  $i, j \in \mathcal{K}$  の間の物理的距離を  $c_{ij}$  とする. 隣接していない立地点間の距離は最短距離で定義され, 各ゾーンには固定的に  $m$  人の消費者が存在すると仮定する.

本モデルの立地主体は小売企業である. 各立地点  $i \in \mathcal{K}$  の小売企業数を  $n_i$  で表現し, そのベクトルを  $\mathbf{n} = [n_0, \dots, n_{K-1}]^T$  とする. また, この経済に存在する総企業数は  $N$  であるとする. これらの企業は, 各々, 一つの商業店舗を操業する. 企業の操業に関する費用は, 固定費用  $\kappa$  のみであるとし, 単純のため商業店舗の床面積およびそれに伴う可変費用は無視し, 土地市場を捨象する.

<sup>2</sup> 本研究は, モデル内生的に生じる現象の一般的性質を把握することに主眼を置いている. 非自明解を含めて安定な均衡解を網羅することは事実上困難である上に, 得られる知見は必ずしも多くない.

### (2) 消費者の行動

消費者が買い物をする地点を選択する行動はランダム効用理論に基づくものとする. ランダム効用理論では, 各選択肢に対する観測可能な効用と誤差項の分布によって選択確率が決定する.

本モデルでは, 地点  $i$  の消費者が地点  $j$  で買い物をした場合に得られる観測可能な効用を以下のように表す:

$$V_{ij}(\mathbf{n}) = \alpha \log n_j - \tau c_{ij} \quad (1)$$

式 (1) の第 1 項は, 消費者がより多数の商業店舗が集積した地点を好む性質を表し, 第 2 項は, 居住している地点から近い地点を好む性質を表している.  $\alpha, \tau > 0$  は外生的なパラメータである.  $\alpha$  は消費者の効用評価における目的地  $j$  の商業店舗数  $n_j$  に関する重みづけを表現し,  $\tau$  は消費者の交通費用パラメータである.

誤差項  $\epsilon_{ij}$  の分布は各立地点で独立かつ同一であるとし, 平均 0, 分散 1 の Gumbel 分布に従うものとする.

消費者の効用最大化と  $\epsilon_{ij}$  の仮定から, 地点  $i$  の消費者が地点  $j$  を買い物の目的地として選択する確率  $P_{ij}(\mathbf{n})$  は以下の Logit 型で表現できる:

$$P_{ij}(\mathbf{n}) = \frac{n_i^\alpha \exp[-\tau c_{ij}]}{\sum_{j \in \mathcal{K}} n_k^\alpha \exp[-\tau c_{kj}]} \quad (2)$$

$P_{ij}(\mathbf{n})$  を用いれば, 立地点  $i$  の消費者から立地点  $j$  の商業店舗への総需要額  $Q_{ij}(\mathbf{n})$  は,  $P_{ij}(\mathbf{n}) \times m$  で与えられるので,

$$Q_{ij}(\mathbf{n}) = \frac{n_i^\alpha \exp[-\tau c_{ij}]}{\sum_{j \in \mathcal{K}} n_k^\alpha \exp[-\tau c_{kj}]} m \quad (3)$$

となる.

### (3) 企業の利潤

地点  $i$  における総需要額を  $S_i(\mathbf{n})$  とする.  $S_i(\mathbf{n}) = \sum_{j \in \mathcal{K}} Q_{ji}$  であるから, 式 (3) の消費者需要の下では, 以下のように表される:

$$S_i(\mathbf{n}) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{n_i^\alpha \exp[-\tau c_{ki}]}{\sum_{j \in \mathcal{K}} n_j^\alpha \exp[-\tau c_{kj}]} m \quad (4)$$

地点  $i$  における総需要額  $S_i(\mathbf{n})$  は,  $n_i$  数の商業店舗に均等に分配される. よって, 地点  $i$  に立地する個々の商業店舗における需要額は  $S_i/n_i$  である. 以上から, 立地点  $i$  における企業の利潤関数  $\Pi_i(\mathbf{n})$  は, 以下のよう

$$\Pi_i(\mathbf{n}) = \frac{S_i(\mathbf{n})}{n_i} - \kappa \quad (5)$$

$$= m \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{n_i^{\alpha-1} \exp[-\tau c_{ki}]}{\sum_{j \in \mathcal{K}} n_j^\alpha \exp[-\tau c_{kj}]} - \kappa \quad (6)$$

以降の解析のため, 空間の物理的構造を表現する空間割引行列  $\mathbf{D} = [d_{ij}] = \exp[-\tau c_{ij}]$  を定義する. この行列を用いると, 利潤関数 (6) は, 以下のようにベクトルと行列で表現できる:

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{n}) = m \mathbf{M}^T \mathbf{1} - \kappa \mathbf{1} \quad (7)$$

ここに、 $\mathbf{1}$  は  $K$  個の 1 が並んだ列ベクトルである。 $\mathbf{M}$  は、 $\mathbf{n}, \mathbf{D}$  を用いて以下のように定義する：

$$\mathbf{M} \equiv \text{diag}[\boldsymbol{\Delta}]^{-1} \mathbf{D} \text{diag}[\mathbf{n}]^{\alpha-1} \quad (8)$$

$$\text{where } \boldsymbol{\Delta} \equiv \mathbf{D} \text{diag}[\mathbf{n}]^{\alpha} \mathbf{1} \quad (9)$$

#### (4) 企業の参入・撤退の均衡状態

この経済に存在する小売企業は、ある立地点における利潤が非負であれば立地点に参入し、負であれば撤退する。このような、参入・撤退行動を仮定するとき、小売企業の空間立地パターンに関する均衡条件は、利潤関数を用いて以下のように表現することができる：

$$\begin{cases} \Pi_i(\mathbf{n}) = 0 & \text{if } n_i > 0 \\ \Pi_i(\mathbf{n}) < 0 & \text{if } n_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K} \quad (10)$$

条件式 (10) を満足する小売企業の立地パターン  $\mathbf{n}$  を均衡状態と定義する。均衡状態においては、 $n_i \Pi_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{K}$  が成り立つため、均衡状態において存在する企業数について、以下のような保存則が成立する：

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} S_i(\mathbf{n}) = \kappa \sum_{i \in \mathcal{K}} n_i = mK \quad (11)$$

### 3. 均衡状態の局所安定性

均衡条件 (10) を満たす解  $\mathbf{n}^*$  は多数存在する。本章では、多くの既往研究で採用されてきた局所安定性に基づく均衡解の選択方法を述べる。5 章の数値計算例でわかるように、局所安定性を満たす均衡解は多数存在する。

均衡状態の局所安定性を考えるために、小売企業の立地パターンの調整ダイナミクスを以下のように表す：

$$\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{F}(\mathbf{n}) = \text{diag}[\mathbf{n}] \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{n}) \quad (12)$$

このダイナミクスの停留点 (i.e.,  $\mathbf{F}(\mathbf{n}^*) = \mathbf{0}$ ) は、必ず均衡条件式 (10) を満足する。また、均衡条件を満足する点は必ずダイナミクスの停留点となる。したがって、ダイナミクスの停留点と均衡解とは一対一対応する。

動的システム理論でよく知られているように、均衡状態  $\mathbf{n}^*$  の局所安定性は調整ダイナミクス (12) の右辺の Jacobi 行列  $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{n}^*)$  の固有値に依存する。具体的には、 $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{n}^*)$  における固有値の実部がすべて負であればこの均衡状態は局所安定的である。

本稿で対象とする HW モデルでは、以下のように  $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{n})$  を表現できる：

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{n}) = \text{diag}[\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{n})] + \text{diag}[\mathbf{n}^*] \nabla \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{n}) \quad (13)$$

$\nabla \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{n})$  は、利潤関数の Jacobi 行列であり、次のよう

に求められる：

$$\nabla \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{n}) = m \text{diag}[\tilde{\mathbf{M}}^T] - \alpha \mathbf{M}^T m \mathbf{E} \mathbf{M} \quad (14)$$

$$\text{where } \tilde{\mathbf{M}} \equiv (\alpha - 1) \text{diag}[\boldsymbol{\Delta}]^{-1} \mathbf{D} \text{diag}[\mathbf{n}]^{\alpha-2} \quad (15)$$

ただし、 $\mathbf{E}$  は単位行列である。

### 4. 均衡状態の大域安定性

3 章で示した局所安定性に基づく均衡解の選択では、安定解が多数存在しうる。本章では、ポテンシャル・ゲームと確率安定性に基づく均衡選択によって、確率的に最も生じやすい唯一の解を選択する方法を示す。なお、集団ゲームやポテンシャル・ゲームの詳細は、付録 I に示した。

#### (1) ポテンシャル・ゲーム

本節では、確率安定性解析に有用なポテンシャル・ゲームの定義を示し、HW モデルがポテンシャル・ゲームとして解釈できることを示す。

ポテンシャル・ゲームは、利得関数のベクトル場にポテンシャルが存在するクラスの集団ゲームである。集団ゲームとは、有限かつ多数のエージェントと有限の戦略集合で定義され、エージェントの純粋戦略集合  $\mathcal{S} = \{1, \dots, n\}$ 、起こりうる状態集合  $\mathcal{P} \equiv \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i \in \mathcal{S}} p_i = 1\}$ 、エージェントの利得関数ベクトル  $\mathbf{F}$  の 3 つの要素で特徴づけられるゲーム  $\mathcal{G}$  である。

Sandholm<sup>3)</sup> によると、ポテンシャル・ゲームは以下の性質をもつ：

**定理 1.** (ポテンシャル・ゲームとナッシュ均衡) ポテンシャル  $Z$  をもつ、集団ゲーム  $\mathcal{G}$  の Nash 均衡の集合は、最大化問題  $\max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} Z(\mathbf{p})$  の Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす状態の集合と一致する。

HW モデルでは、利潤関数 (7) のベクトル場の Jacobi 行列が対称であるため、以下の命題が得られる。

**命題 1.** HW モデルは以下のポテンシャル関数  $Z(\mathbf{n})$  をもつポテンシャル・ゲームである：

$$Z(\mathbf{n}) = \frac{m}{\alpha} \sum_{i \in \mathcal{K}} \log \left[ \sum_{e \in \mathcal{K}} n_e^\alpha d_{ie} \right] - \kappa \sum_{i \in \mathcal{K}} n_i \quad (16)$$

これは、最適化問題：

$$\max_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} Z(\mathbf{n}) \quad \text{s.t.} \quad \kappa \sum_{i \in \mathcal{K}} n_i = Km \quad (17)$$

の KKT 条件が、HW モデルの均衡条件と一致するためである。具体的には、

$$\frac{\partial Z(\mathbf{n})}{\partial n_i} = \Pi_i(\mathbf{n}) \quad (18)$$



が成り立つことから容易に確認できる。すなわち、最適化問題の目的関数  $Z(\mathbf{n})$  は利潤関数  $\Pi(\mathbf{n})$  のポテンシャルである。

## (2) ポテンシャル関数と確率安定性

本節では、確率安定性の概念を用いて大域安定な均衡解を選択する方法を示す。まず a) において、確率安定性の定義を示す。次に b) で、確率安定性とポテンシャル関数の関係を示す。最後に c) で、ポテンシャル関数を用いて大域安定な均衡解を選択する方法を具体的に示す。

### a) 確率安定性の定義

確率安定性を定義するために、確率的進化ダイナミクスを考える。このダイナミクスは状態空間  $\mathcal{P}^N$ 、状態推移確率を  $[P(\mathbf{x}, \mathbf{y})]$  とするマルコフ連鎖を用いて表現される。状態空間  $\mathcal{P}^N$  は、集団ゲームの状態集合  $\mathcal{P}$  を離散化したものであり、

$$\mathcal{P}^N \equiv \{\mathbf{p} \in (1/N)\mathbb{Z}_+^n \mid \sum_{i \in S} p_i = 1\} \quad (19)$$

と定義される。 $P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  は、離散時間ごとに戦略(立地点)変更の機会を与えられたエージェントが戦略  $i$  から戦略  $j$  に変更する確率  $\rho_{ij}$  を用いて表すことができる。 $\rho_{ij}$  は、利得関数  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  とノイズパラメータ  $\eta$  を用いて、以下の Logit 型の関数で与えられるとする：

$$\rho_{ij} = \frac{\exp[\eta^{-1}F_j(\mathbf{x})]}{\sum_{k \in S} \exp[\eta^{-1}F_k(\mathbf{x})]} \quad \forall i, j \in S \quad (20)$$

$\rho_{ij}$  を用いると、状態の推移確率  $P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  は、

$$p_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \begin{cases} x_i \cdot \rho_{ij} & \text{if } \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \\ 1 - \sum_{i \in S} \sum_{i \neq j} x_i \cdot \rho_{ij} & \text{if } \mathbf{y} = \mathbf{x} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall i, j \in S, i \neq j \quad (21)$$

となる。ここで、 $\mathbf{e}_i$  は、 $i$  番目の要素だけが 1、他は 0 となるような  $n$  次元標準基底ベクトルである。この遷移確率によって定義されるマルコフ連鎖はエルゴード的であり、定常分布が一意的に存在する。

確率的進化ダイナミクスを用いた離散エージェントの集団ゲームを有限集団ゲームと呼ぶ。有限集団ゲームは、ノイズパラメータ  $\eta$  とエージェント数  $N$  という 2 つのパラメータによって特徴づけられる。ノイズパラメータ  $\eta$  が小さいほどエージェントが誤った戦略をとる確率は低く、 $\eta \rightarrow 0$  ならば、最適な戦略をとる。マルコフ連鎖の定常分布  $\pi^{\eta, N}$  は、パラメータ  $\eta, N$  に依存する  $\mathcal{P}^N$  の要素数次元の確率ベクトルである。

確率安定状態はエージェントが連続的かつエージェントの行動が確定的とした極限における定常分布  $\pi^{\eta, N}$  の挙動によって定義される。

**定義 1.** パラメータ  $\eta, N$  を持つ、有限集団ゲームの状態空間  $\mathcal{P}^N$  における定常分布を  $\pi^{\eta, N}$  とする。このとき、状態  $\mathbf{p}$  が、以下の式 (22) を満たすとき確率安定状態であると定義する。

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \pi^{\eta, N} > 0 \quad (22)$$

式 (22) には、2 つの極限が含まれている。 $\eta \rightarrow 0$  は、エージェントの戦略の選択の誤る確率を限りなく 0 に近づける意味の極限であり、 $N \rightarrow \infty$  は、エージェントの数を無限に近づけることを意味しており、離散化された集団状態  $\mathcal{P}^N$  が連続的な状態空間として表される。

### b) 確率安定状態とポテンシャル関数

一般的な集団ゲームでは、起こりうるすべての状態を列挙し、その定常確率を評価せねばならないため、確率安定状態を特定することは困難である。しかし、ポテンシャル・ゲームであれば、Sandholm<sup>3)</sup>, Wallace and Young<sup>6)</sup> に示されている次の定理を利用した解析が可能である。

**定理 2.** (確率安定状態とポテンシャル関数) 集団ゲーム  $\mathcal{G}$  をポテンシャル関数  $Z$  をもつポテンシャル・ゲームとする。状態  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  がポテンシャル関数を大域的に最大化するならば、状態  $\mathbf{x}$  は確率安定である。

式 (21) の推移確率で定義されたマルコフ連鎖では、状態  $\mathbf{x}$  の定常確率は以下のように Boltzmann 分布で表すことができる。

$$\pi_{\mathbf{x}}^{\eta, N} = \frac{\exp[\eta^{-1}Z(\mathbf{x})]}{\sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}^N} \exp[\eta^{-1}Z(\mathbf{y})]} \quad (23)$$

$\eta \rightarrow 0$  とすると、ポテンシャル関数を大域的に最大化する状態の確率が 1 に近づく。定常分布における 2 つの状態の確率比は、ポテンシャル関数  $Z$  の差を用いて、

$$\frac{\pi_{\mathbf{x}}^{\eta, N}}{\pi_{\mathbf{y}}^{\eta, N}} = \exp[\eta^{-1}(Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{y}))] \quad (24)$$

と表される。ここで、 $\eta \rightarrow 0$  とすると、 $Z(\mathbf{x}) < Z(\mathbf{y})$  ならば、 $\pi_{\mathbf{x}}^{\eta, N} < \pi_{\mathbf{y}}^{\eta, N}$  である。特に、状態  $\mathbf{y}$  を  $\mathbf{y} \in \arg \max_{z \in \mathcal{X}^N} Z(z)$  とすると、 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^N \mid \mathbf{x} \notin \arg \max_{z \in \mathcal{X}^N} Z(z)$  なる状態  $\mathbf{x}$  に対して  $\eta \rightarrow 0$  ならば、 $\pi_{\mathbf{x}}^{\eta, N} \rightarrow 0$  である。したがって、定常確率が正となる状態はポテンシャル関数を最大化する状態でなければならない。

### c) 確率安定解の特定方法

前節で示したように HW モデルはポテンシャル・ゲームであるため、均衡解の候補を列挙できれば、それぞれのポテンシャル関数値を比較し、最大となる解を選択すれば、確率安定性概念を用いて大域安定な解を特定することが可能となる。以下に手順をまとめる。

**Step 1:** モデルのパラメータ  $\alpha, \tau$  を設定

**Step 2:** 均衡解の候補  $n^p (p \in \mathcal{P})$  を列挙。  
( $\mathcal{P}$  は均衡解の全体を表す集合。)

**Step 3:** 各均衡解におけるポテンシャル関数値  $Z(n^p, \alpha, \tau)$  を計算

**Step 4:** ポテンシャルが最大となる均衡解  $n^*$  を記憶し、終了。

均衡解の列挙方法は、次章で述べる。

## 5. 数値計算による安定均衡解の評価

本章では、数値計算によって 3,4 章の安定性解析を実行する。(1) で、数値計算で用いる空間の条件設定を行う。(2) で、安定性を評価する均衡解の候補を列挙する方法を述べる。(3) で、均衡解の候補から、局所安定性に基づく均衡選択を行った結果を示す。(4) で、均衡解の候補から、確率安定性に基づく均衡選択を行った結果を示す。(5) で、局所安定性と確率安定性の関係について述べる。

### (1) 空間の条件設定

本研究では、図-1-a や図-1-b に示すような二次空間上に  $k \times k (= K)$  箇所の立地点をもつ格子状の空間が周期的につながった都市構造を用いる。本稿では、 $6 \times 6$  立地点の正方形格子における安定性解析を行った。なお、正三角形格子の安定性解析の結果は付録 III に示す。

### (2) 均衡解の候補の列挙

均衡条件 (10) を満たす解  $n^*$  には、構造パラメータ ( $\alpha$  や  $\tau$ ) に依存しない解 (= 自明解) と依存する解 (= 非自明解) が存在する。自明解は企業が存在する立地点に関して、企業分布が均等分散となっている均衡解である。

本研究では、均衡解の候補を自明解のみとする。なぜなら、集積経済モデルの局所安定解の多くは自明解であることが知られており<sup>4)</sup>、二次元周期境界を仮定すると、比較的容易に自明解を列挙することができるためである<sup>3)</sup>。

本研究の空間設定では、木暮ら<sup>5)</sup> によって  $k = 6$  ままで自明解が列挙されており、この結果を均衡状態の安定性解析に用いる均衡解の候補とする。 $6 \times 6$  立地点の正方形格子では 83 個の自明解が存在する。これら自明解の全パターンを 5,6 に示す。以降の数値計算では、総

<sup>3)</sup> 非自明解を列挙することは事実上困難である。

企業数を  $N = 36$  とし、保存則の式 (11) を満たすように  $m, \kappa$  を設定した。

### (3) 局所安定解の特定

第 3 章に示したように  $\nabla F(n^*)$  の固有値を評価によって、局所安定性解析を実行した結果を図-2 に示す。ここでは、集積パラメータ  $\alpha = 1.25$ ,  $\alpha = 2.5$  の結果を示す。図-2-a, 図-2-b は、横軸に消費者の交通費用パラメータ  $\tau$ , 縦軸に立地パターンのインデックスをとり、局所安定となる立地パターンを示したものである。図-2 の黒色の部分は、各立地パターンで局所安定となっている領域であり、白色の部分は不安定となっている領域である。(黄色の部分は確率安定な領域を表している。その詳細は、(5) で述べる。)

図-2 からわかるように、 $\tau$  によらず 1 極集中パターンは常に局所安定である。他のパターンもある交通費用パラメータ  $\tau$  以上で局所安定となる。パラメータ  $\tau$  に対して、多数の立地パターンが局所安定となることが確認できる。そのためある交通費用パラメータに対し、どの立地パターンがより尤もらしいかに関しては議論することはできない。

### (4) 確率安定解の特定

第 4 章で示した手順で確率安定性解析を実行した結果を図-3 に示す。図-3 は、HW モデルの構造パラメータ  $\alpha, \tau$  を網羅的に変化させ、大域安定となる均衡立地パターンを表したものである。図中の数字は企業が立地する都市数 (極数) である。例えば、 $\alpha = 1.5$  では、 $\tau$  の減少によって  $36 \rightarrow 18 \rightarrow 12 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  極パターンと推移することがわかる。また大域安定となる立地パターンの形状は図-4 にまとめて示す。

図-3 から、 $\alpha < 1$  のとき、どのような交通費用パラメータでも分散パターンが大域安定である。これは、 $\alpha < 1$  の条件では需要量が立地点  $i$  の店舗数  $n_i$  に関して収穫逓減となり、集積が起こりえないためである。次に、 $\alpha \geq 1$  ならば、交通費用パラメータを下げると企業が立地する地点数 (極数) が単調に減少し集積が進展していくことが分かる。極数減少の過程について、一次元/立地点数 16 の円周都市における既存研究<sup>2)</sup> で極数が半分ずつ減少しながら集積する空間周期倍分岐カスケードの特性が HW モデルの集積挙動として報告されている。本稿における実験は空間設定として  $6 \times 6$  立地点数の都市構造を用いたため、極数に 2 や 3 の倍数を組み合せた数を伴いながら集積が進展している。

また、 $\alpha$  を増加させていくと、大域安定な立地パターンに“スキップ現象”が起こる。具体的には、 $\alpha = 1.25$  では大域安定である 12 や 18 極は、 $\alpha > 2$  では大域安定にならない。このような  $\alpha$  の増加による極数のスキップ

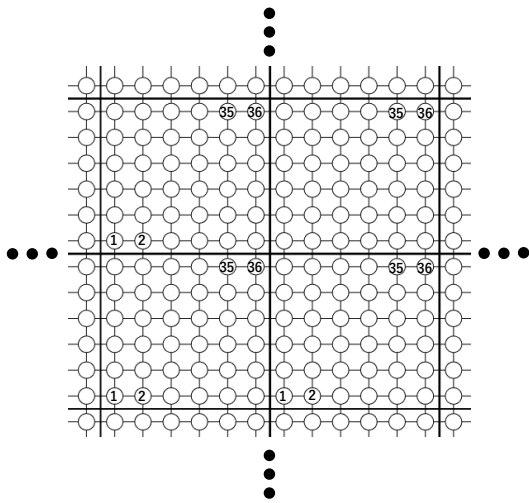


図-1-a 正方形格子

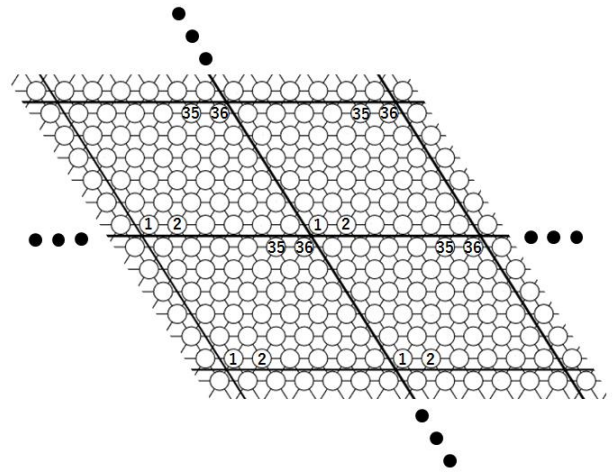


図-1-b 正三角形格子

図-1 周期境界を有する  $k \times k$  格子 ( $k = 6$  の場合)

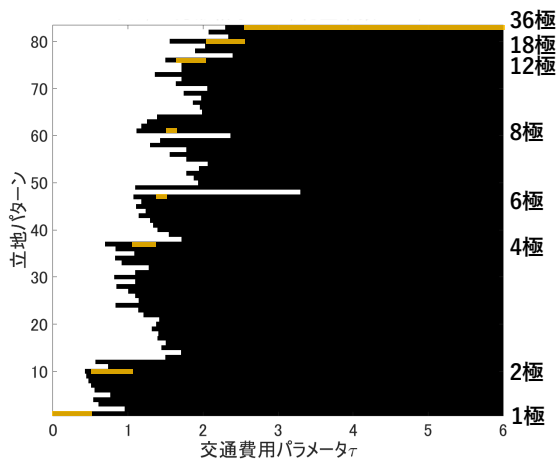


図-2-a  $\alpha = 1.25$

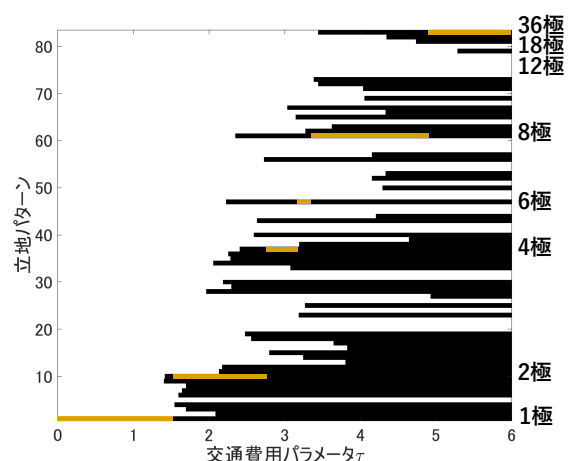


図-2-b  $\alpha = 2.5$

図-2 6 × 6 立地点/正方形格子におけるパラメータ  $\alpha$  を固定したときの局所安定な均衡立地パターン

ブ現象は、一次元空間における知見と整合的であり、二次元空間においても起こることが明らかになった。

### (5) 局所安定性と確率安定性の対応

本節では、局所安定性と確率安定性の関係を示す。図-2における黄色の領域は、パラメータ  $(\tau, \alpha)$  においてポテンシャル関数値が最大 (= 確率安定解) であり、かつ局所安定性を満たした立地パターンであることを示している。図-2 から、大域安定解は局所安定解の中から選ばれることが読み取れる。さらに、スキップ現象の生じる  $\alpha = 2.5$  では、18 極、12 極パターンは局所安定

解になっていないことが確認できる。

また、大域安定解となる自明解は回転対称性の高い集積パターンであるといえる。これは、空間的にある程度分散し、企業が存在する立地点間の距離が長い集積パターンである。逆に、大域安定解とならない自明解は、空間的に密集した集積パターンや、幾つかの密集したブロックからなる集積パターンである。このようなパターンは、企業が近接して立地し、空間競争効果が強く働くため、大域安定解として選択されないと考えられる。

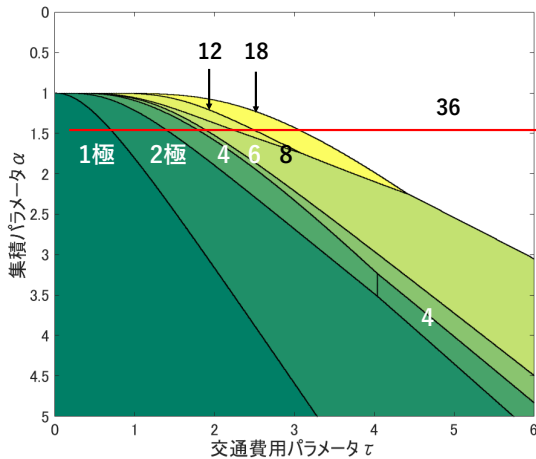


図-3 6×6 立地点/正方形格子における  
( $\tau, \alpha$ ) 平面上の大域安定な集積パターン

## 6. おわりに

本研究では、代表的な商業集積立地モデルである Harris & Wilson<sup>1)</sup> モデルを二次元空間に拡張し、均衡解の安定性とその性質を明らかにした。具体的には自明解に着目し、線形安定性解析に基づく局所安定性と、確率安定性解析に基づく大域安定性という、二つの安定判別方法により均衡解の安定性を確認した。そして、局所安定な均衡立地パターンは多数存在すること、大域安定な均衡立地パターンは輸送技術の向上とともに、極数が単調に減少しながら集積が進展していくことを明らかにした。

本研究で得られた結果は、空間として6×6立地点の都市構造を用いて得られたものである。より現実に近づけるためには立地点数を増やした空間でモデルの集積挙動を解析する必要がある、これは、今後の重要な研究課題である。

## 付録 I 集団ゲーム/ポテンシャル・ゲームの定義と性質

### (1) 集団ゲームの定義と性質

集団ゲームとは、有限かつ非常に多数のエージェントの集合と有限の戦略集合で構成されるゲームである。各エージェントは共通の戦略集合と利得関数を持ち、自らの利得を最大化するように行動する。エージェントの戦略集合を  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  とする。また、起こりうる集団状態の集合は、 $\mathcal{P} \equiv \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in S} p_i = 1\}$  である。ここで、 $p_i$  は戦略  $i$  をとるエージェントの割合であり、集団状態  $\mathbf{p}$  は、 $p_i$  を  $i$  番目の要素に持つベクトルである。さらに、集団状態  $\mathbf{p}$  のときに戦略  $i$  をとる

エージェントの利得関数を  $F_i(\mathbf{p})$  とする。各戦略の利得関数を要素に持つベクトル値関数を  $\mathbf{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  と定義する。戦略集合、集団状態、利得関数の3つの要素で集団ゲームは定義され、 $\mathcal{G} \equiv (S, \mathcal{P}, \mathbf{F})$  と表す。

集団ゲーム  $\mathcal{G} \equiv (S, \mathcal{P}, \mathbf{F})$  の状態  $\mathbf{p}$  が Nash 均衡となるのは、以下の変分不等式を満たすときである。

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{P} \quad (\text{I.1})$$

### (2) ポテンシャル・ゲームの定義と性質

ポテンシャル・ゲームは、以下の性質 (I.2) を持つポテンシャル関数  $Z : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  が存在する集団ゲーム  $\mathcal{G} \equiv (S, \mathcal{P}, \mathbf{F})$  である。

$$\frac{\partial Z(\mathbf{p})}{\partial p_j} - \frac{\partial Z(\mathbf{p})}{\partial p_i} = F_j - F_i \quad \forall i, j \in S \quad (\text{I.2})$$

Sandholm<sup>3)</sup> によると、ポテンシャル  $Z$  をもつ、集団ゲーム  $\mathcal{G}$  の Nash 均衡の集合は、最大化問題  $\max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} Z(\mathbf{p})$  の Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす状態の集合と一致する。

## 付録 II 6×6 立地点/正方形格子の自明解一覧

6×6 立地点/正方形格子の周期境界条件下におけるすべての自明解を図-5、図-6 示す。

## 付録 III 6×6 立地点/正三角形格子における均衡解の評価

正三角形格子でも空間に対称性があるため、自明解を列挙することが可能である。6×6 立地点では、65 個の自明解が存在する。正方形格子と比較すると、格子の幾何特性によって安定となる立地パターンの極数は異なるが、定性的なモデルの集積挙動は同じである。

### (1) 局所安定解の特定

3章の方法を均衡解の候補である自明解に対して実行した結果を示す。HW モデルでは、集積が進展する条件として  $\alpha \geq 1$  が必要である。ここでは、集積パラメータ  $\alpha = 1.25$ ,  $\alpha = 2.5$  の結果を示す。総企業数  $N = 36$  とした。

図-7-a-図-7-b は、横軸に消費者の交通費用パラメータ  $\tau$ 、縦軸に立地パターンのインデックスをとり、局所安定となる立地パターンを示したものである。

図-7 からわかるように、どの  $\alpha$  でも1極集中パターンは常に局所安定であり、他のパターンもある交通費用パラメータ  $\tau$  以上で局所安定となっている。パラメータ  $\tau$  に対して、多数の立地パターンが安定となってお



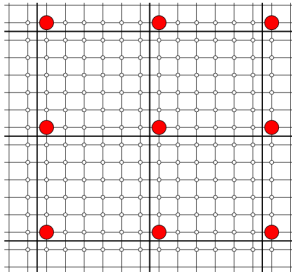


図-4-a 1 極パターン

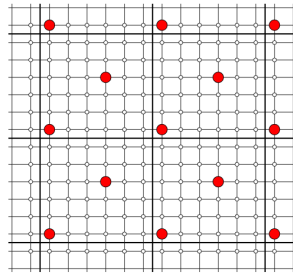


図-4-b 2 極パターン

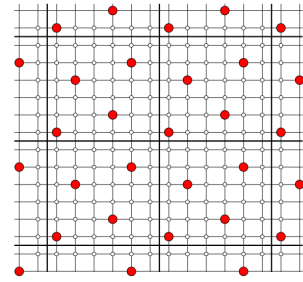


図-4-c 4 極パターン

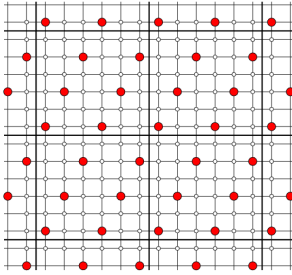


図-4-d 6 極パターン

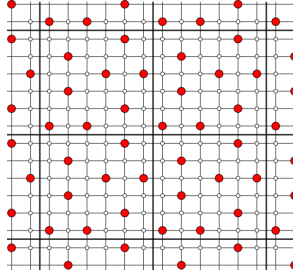


図-4-e 8 極パターン

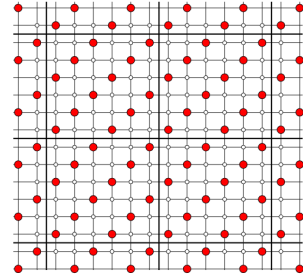


図-4-f 12 極パターン

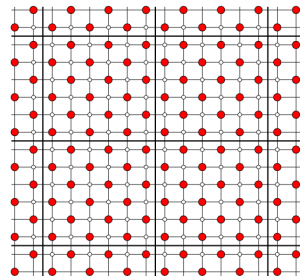


図-4-g 18 極パターン

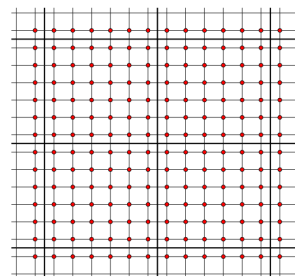


図-4-h 分散パターン

図-4 大域安定となる立地パターン

り、ある交通費用パラメータに対し、どの立地パターンがより尤もらしいかに関しては議論することはできない。

## (2) 確率安定解の特定

均衡解の候補を自明解とし、4章で示した手順で確率安定性解析を実行した結果を示す。図-8は、HWモデルの構造パラメータである $\alpha$ と $\tau$ を網羅的に変化させ、数値計算によって大域安定となる均衡立地パターンを表したものである。図中の数字は極数であり、具体的な立地パターンの形状は図-9にまとめて示す。

図-8から、 $\alpha < 1$ のとき、どのような交通費用パラメータでも分散パターンが大域安定である。これは、

$\alpha < 1$ の条件では需要量が立地点 $i$ の店舗数 $n_i$ に関して収穫逓減となり、集積が起こりえないためである。次に、 $\alpha \geq 1$ ならば、交通費用パラメータを下げていくと企業が立地する地点数(極数)が単調に減少し集積が進展していくことが分かる。確率安定解は、局所安定性を満たす立地パターンから選択される。また、確率安定解として選択された立地パターンは企業が立地した地点を中心として均等な広がりをもった立地パターンとなっている。



## 参考文献

- 1) Harris, B. and Wilson, A. G.: Equilibrium values and dynamics of attractiveness terms in production-constrained spatial-interaction models, *Environment and Planning A*, Vol. 10, No. 4, pp. 371-388, 1978.
- 2) Osawa, M., Akamatsu, T. and Takayama, Y.: Harris and Wilson (1978) Model Revisited: The Spatial Period Doubling Bifurcation Cascade in an Urban Retail Model, *Journal of Regional Science*, Vol.57, No.3, pp.442-466, 2017.
- 3) Sandholm, W. H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT press, 2010.
- 4) Kiyohiro Ikeda, Mikihisa Onda, Yuki Takayama : Spatial period doubling, invariant pattern, and break point in economic agglomeration in two dimensions, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 92, pp. 129-152, 2018
- 5) 木暮洋介, 恩田幹久, 大澤実, 高山雄貴, 池田清宏: 正方形格子状経済における幾何学的安定パターン, 土木学会論文集 D3, Vol.74, No.4, pp.411-425, 2018.
- 6) Wallace, C. and Young, H.P.: *Stochastic Evolutionary Game Dynamics*, In forthcoming in the Handbook of Game Theory, Vol.4,2014

(2019.3.10 受付)

STOCHASTIC STABILITY ANALYSIS OF A RETAIL LOCATION MODEL  
WITH AGGLOMERATION ECONOMY IN A TWO-DIMENSIONAL SPACE

Masashi SUZUKI, Shuhei YAMAGUCHI and Takashi AKAMATSU

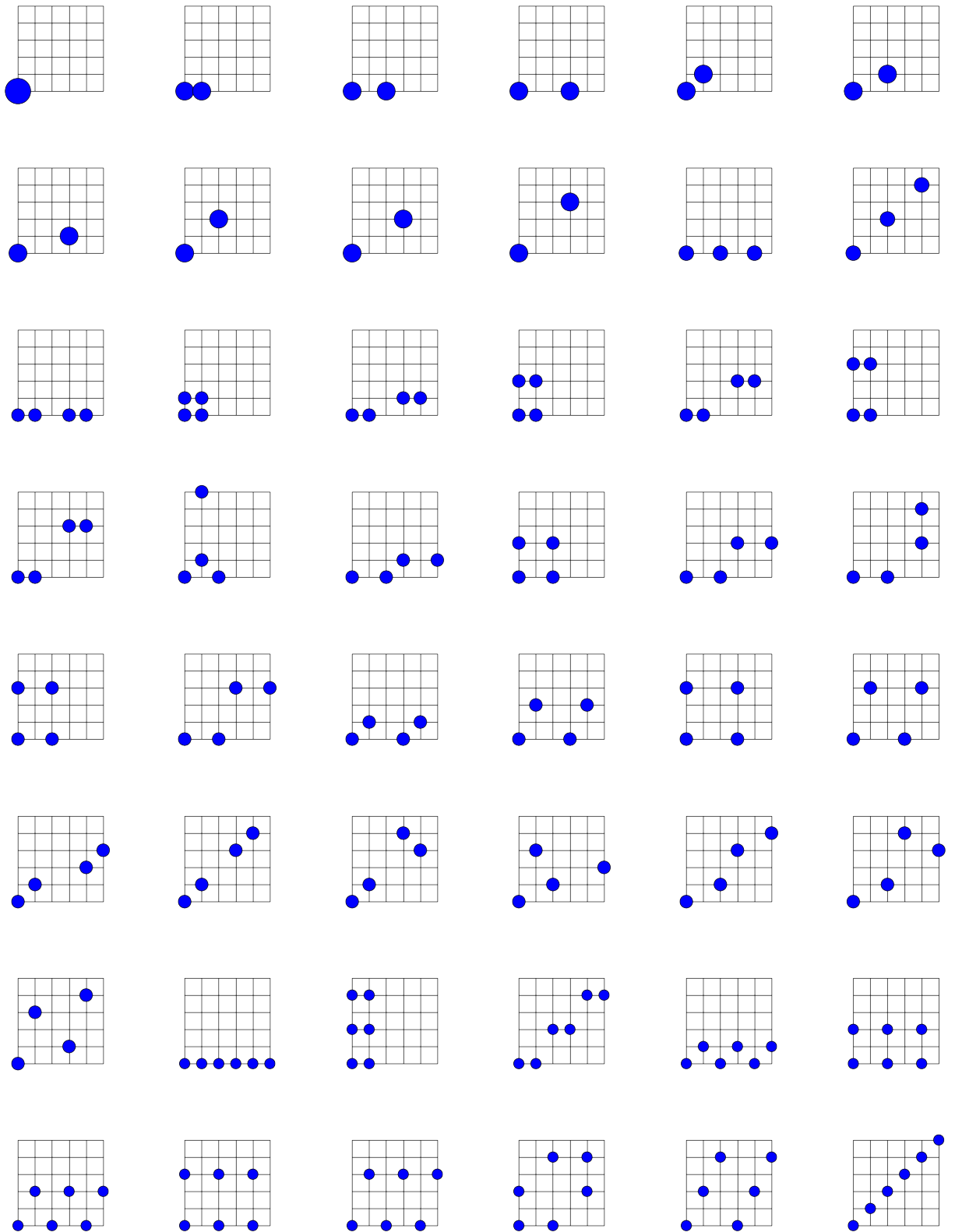


図-5 6 × 6 立地点正方形格子の全自明解-1 (木暮ら<sup>5)</sup> より)

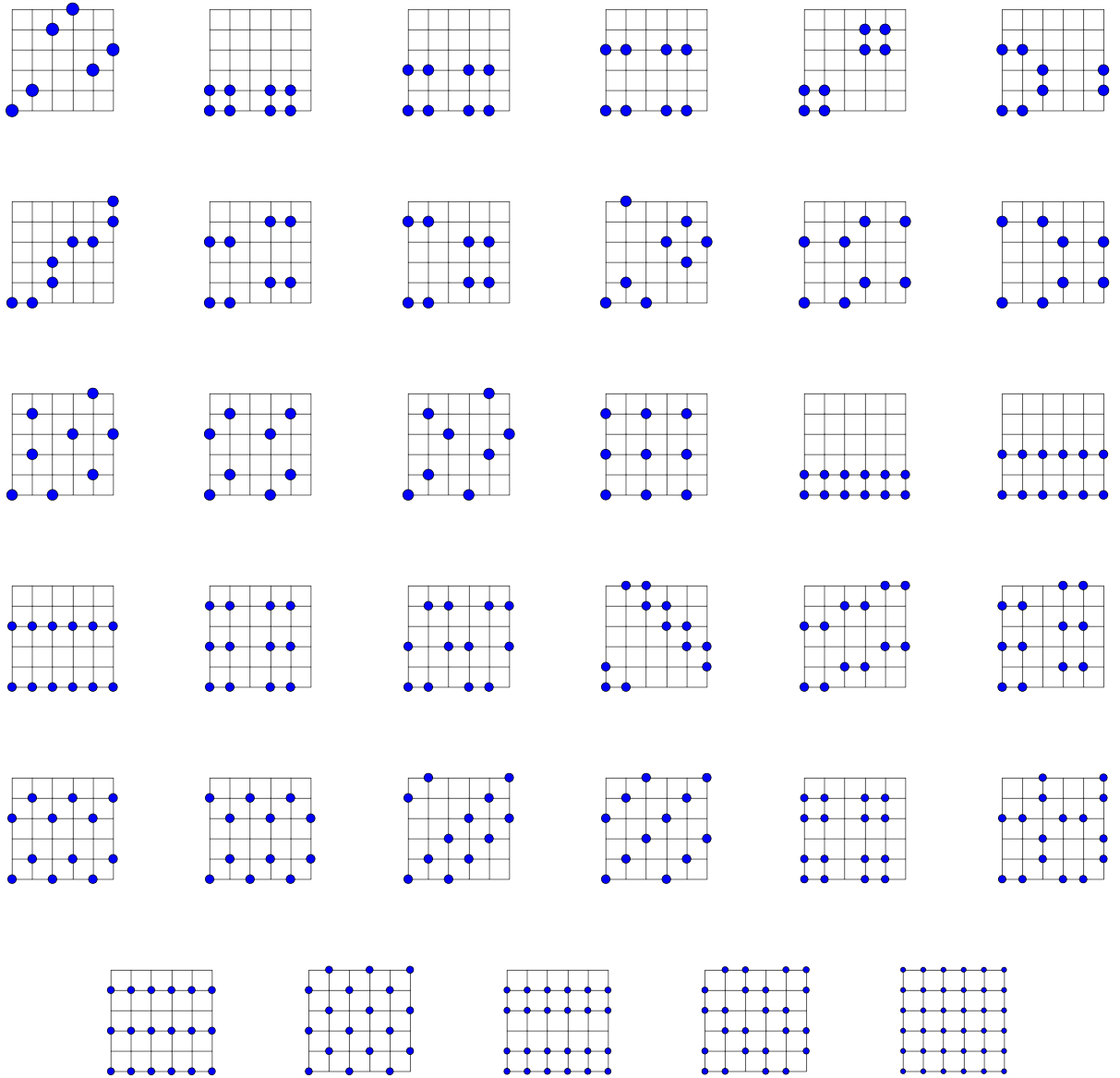


図-6 6×6 立地点正方形格子の全自明解-2 (木暮ら<sup>5)</sup> より)

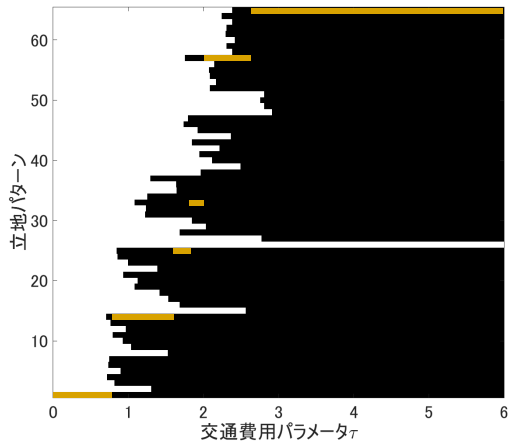


図-7-a  $\alpha = 1.25$

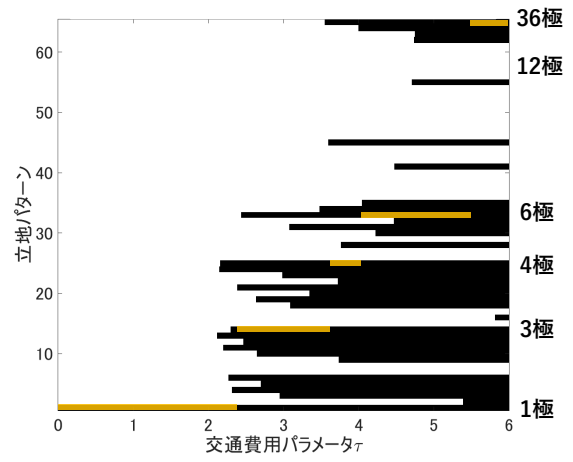


図-7-b  $\alpha = 2.5$

図-7 6 × 6 立地点/正三角形格子におけるパラメータ  $\alpha$  を固定したときの局所安定な均衡立地パターン

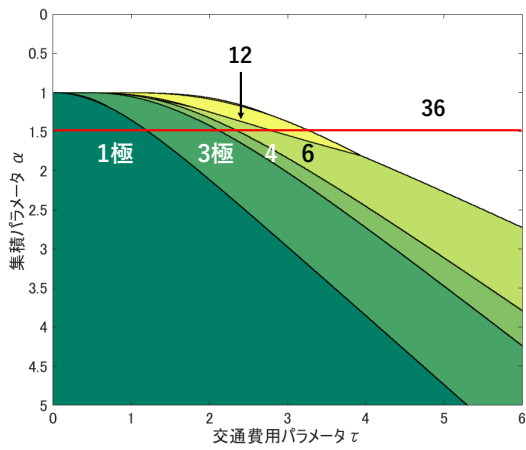


図-8 6 × 6 立地点/正三角形格子における  $(\tau, \alpha)$  平面上の大域安定な集積パターン



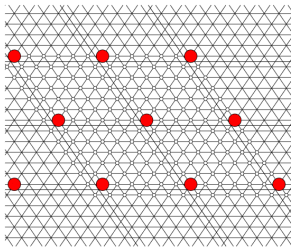


図-9-a 1極パターン

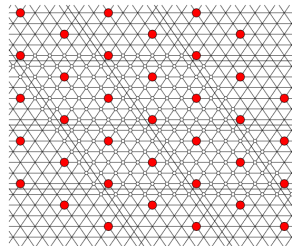


図-9-b 3極パターン

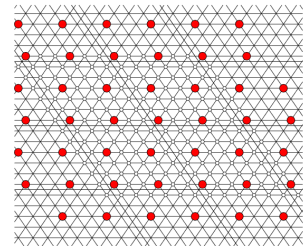


図-9-c 4極パターン

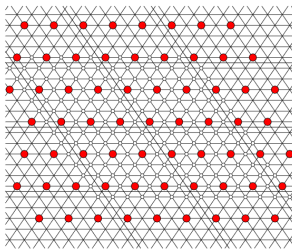


図-9-d 6極パターン

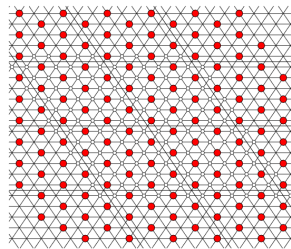


図-9-e 12極パターン

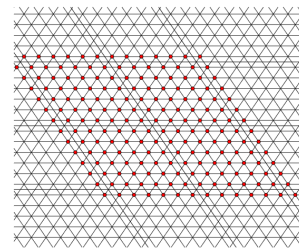


図-9-f 分散パターン

図-9 大域安定となる立地パターン