

正三角形格子状経済における 集積パターンの立地点数依存性

木暮 洋介¹・大澤 実²・池田 清宏³

¹学生会員 東北大学 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: yosuke.kogure.t2@dc.tohoku.ac.jp

²正会員 東北大学助教 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: minoru.osawa.a5@tohoku.ac.jp

³正会員 東北大学教授 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: kiyohiro.iked.a.b4@tohoku.ac.jp

二次元経済空間を仮定した空間経済モデルの分析は、経済集積のパターン形成メカニズムを理解する上で不可欠である。しかし、分析における問題点として、輸送費用などの構造パラメータの変化に伴う均衡解の複雑な分岐が生じるため、安定な均衡解を網羅することが事実上困難である。そこで本研究では、replicator dynamics の下での自明解の存在に着目する。自明解は、構造パラメータの値の如何に依存することなく空間パターンを保持する解であり、支配方程式の対称性を記述する群の分析によって理論的に特定・分類することができる。本研究では二次元経済空間として、周期境界を与えた正三角形格子状経済を仮定し、様々な格子サイズ（立地点数）における自明解を特定した。格子サイズと自明解が示す空間パターンとの関連を分析した結果、特に格子サイズが偶数である場合に、中心地理論における正六角形パターンを含む多様な集積パターンが replicator dynamics の自明解として説明できることを示した。また、Forslid and Ottaviano¹⁾ のモデルを利用した安定性解析の結果、正六角形パターンを示す自明解は格子サイズに依らず安定性が高いことを示した。

Key Words: hexagonal lattice, economic agglomeration, replicator dynamics, group-theoretic method

1. はじめに

(1) 背景

新経済地理学 (NEG) 分野を中心に、経済活動の集積現象の解明を目的とした一般均衡モデルに関する研究が行われている。これらは一般に空間経済モデルと呼ばれ、その知見は、例えば Fujita et al.²⁾, Baldwin et al.³⁾, Combes et al.⁴⁾, Fujita and Thisse⁵⁾, 佐藤他⁶⁾, 曾・高塚⁷⁾ 等に詳しい。空間経済モデルは、構造パラメータ (e.g., 立地点間の輸送費用) の変化に伴う経済活動の集積メカニズムを説明可能である。土木計画学分野においても、社会基盤整備による効果の空間的帰着を適切に予測・評価する上で経済集積がどこに・どの程度生じるのか? という問いに答えうる一般的性質の解明が囑望されており、空間経済モデルの分析は不可欠である。

空間経済モデルの一般的な性質として、均衡解の分岐が生じる。分岐とは、モデルの構造パラメータの変化に伴い、均衡解の安定性と個数が不連続的に変化する現象である。従来研究では、分岐による解析的困難が緩和される、2つの立地点 (e.g., 地域, 都市) からなる空間での分析が主流であった。一方で、多立地点での分析を考える場合には、分岐が次々に発生する複

雑系を扱うこととなるため、均衡解の解析的な分析は事実上困難となる。

上記のような解析的困難を伴うモデルの大域的な挙動を把握するために、Ikeda et al.⁸⁾ や木暮他⁹⁾ により、replicator dynamics の自明解に着目した分析が提案されている。自明解とは、モデルの構造パラメータの値に依存することなく空間パターンを保持し、常に支配方程式を満足する解のことである。自明解は、分岐現象の詳細に左右されず、対象とする系の対称性に基づいて特定可能であることから、均衡解を体系的に発見する上で有用である。

(2) 目的

本研究の目的は、周期境界を与えた正三角形格子状経済において、自明解として発現する空間パターンとその安定性に関する立地点数依存性を調べることである。具体的に本研究では、格子サイズ $n = 12$ (立地点数 $K = n^2 = 144$) までの自明解を特定・分析する。なお、解の安定性はモデルの具体形に依存するため、本研究では具体例として、Forslid and Ottaviano¹⁾ の空間経済モデルを利用する。

本研究の意義は以下である。自明解はモデルの種類やそのパラメータ値によらず存在するため、自明解を

分析することは、どのような空間パターンが重要となるかについて一般的な議論を進めていく上での基礎となる。また、従来研究ではモデルの均衡経路を試行錯誤的に追跡している。本研究で特定する自明解は、複雑な均衡経路におけるある種のベンチマークとなるため、自明解同士を繋ぐ経路を追跡するなどの体系的な分析が可能となる。これにより、モデルからあらわれる現象の大域的性質の把握に貢献できる。

本論文の構成は下記のとおりである。次節では、空間経済モデルの分析に関する従来研究を紹介し、それらと比較した本研究の位置づけを述べる。2. では、本研究において分析するモデルを定式化する。3. では、本研究において仮定する正三角形格子状経済を定式化する。4. では、対称性を持つ空間を仮定したモデルに一般に適用可能な、支配方程式を持つ群同変性に基づいて自明解を特定する方法論を導入する。5. では、正三角形格子状経済における自明解を特定し、自明解の個数・空間パターン・安定性に関する都市数依存性について述べる。6. は結びである。

(3) 従来研究と本研究の位置づけ

従来研究では主として、線分経済や競技場経済等の一次元空間を仮定した空間経済モデルの分析がなされ、経済集積のパターン形成に関する多くの研究成果が蓄積されてきた。

線分経済は、線分上に等間隔に立地点が配置された一次元空間である。線分経済を仮定した分析において、Fujita and Mori¹²⁾ は、規則的な都市システムが観察されることを確認している。Mori¹³⁾ は、都市間の輸送費用が低い状態において、いくつかの中心都市を含んだ帯状の都市群が形成されることを確認している。

競技場経済は、円周上に等間隔に立地点を配置した一次元空間である。競技場経済を仮定した分析において、Ikeda et al.¹⁴⁾, Akamatsu et al.¹⁵⁾, Osawa et al.¹⁶⁾ は、集積の起こる都市と分散の起こる都市が交互に現れる空間周期倍化現象を確認している。Tabuchi and Thisse¹⁷⁾ は、多産業モデルを用いて、人口規模の大きい核都市と人口規模の小さい周辺都市が互い違いに発現することを確認している。大澤他¹⁹⁾, 大澤・赤松²⁰⁾, Akamatsu et al.²¹⁾ は、発現しうる空間分布パターンがモデルの数理的構造に依存することを示し、理論分析の重要性を喚起している。

一方で、中心地理論で示唆された空間的距離・配置パターンに関する規則性を適切に示すためには、二次元・多立地点の枠組みにおける分析が不可欠であり、そのため空間設定として格子状経済が用いられる。格子状経済には、直交座標系による正方形格子状経済と、斜交座標系による正三角形格子状経済が存在する。正方形

格子を仮定した分析としては、Clarke and Wilson²²⁾, Weidlich and Haag²³⁾, Munz and Weidlich²⁴⁾, Brackman et al.²⁵⁾, Stelder²⁶⁾ 等が挙げられる。正三角形格子を仮定した分析としては、Ikeda et al.^{27),28),29)} 等が挙げられる。また、Ikeda et al.^{33),30)} は、群論的分岐理論に基づき、格子状経済における一様分散状態から発現しうる空間分布パターンを予測している。

上記の従来研究と比較した本研究の貢献は、格子状経済における集積パターンを、モデルの種類やパラメータに依存しない自明解によって解明する点である。二次元・多立地点の枠組みである格子状経済を仮定したモデルは、極めて複雑な挙動を示すため、均衡経路の数値計算には技術的な限界が伴う。また、数値計算はモデルの種類やパラメータを与えた上でなされるため、限定的な議論となる恐れがある。本研究では、自明解に着目することによって一般的な議論を行いつつ、格子状経済における集積パターンの性質を把握する。

本研究と同様、自明解に着目した研究は幾つか挙げられる。まず、Ikeda et al.⁸⁾ は、競技場経済および正方形格子状経済において、一様分散状態からの均衡経路上の自明解を示している。本研究では、格子状経済において、一様分散状態からの均衡経路に限定せず、網羅的に自明解を特定する。次に、木暮他⁹⁾ は、対称性を持つ空間における自明解を特定する方法論をまとめ、非周期的な正方形格子状経済における自明解を特定している。本研究では、これらの知見を応用することにより、周期的な格子状経済における自明解を網羅的に特定する。より一般性の高い格子状経済での分析を通して、多様な集積パターンの存在を解明する。

2. モデル

本章では、本研究において分析する空間経済モデルの均衡条件を定式化する。また、均衡状態に至るまでの調整過程を記述する replicator dynamics を導入する。なお、モデルの具体形については、付録 I に詳細を示す。

(1) 均衡条件の定式化

K 個の立地点からなる地理空間において、単一種類の移動主体が自身の立地点を選択する状況を考える。移動主体の利得関数は $v: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^K$ と定義する。ここで、 $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^K \mid \sum_{i=1}^K \lambda_i = 1\}$ は $K-1$ 次元の単体、 λ_i は立地点 i に立地する移動主体の人口、 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ は人口分布である。移動主体は自身の得る利得に応じて立地点を変更し、最終的に、個々の移動主体が立地点を変更する誘因を持たない均衡状態

へと至る。均衡条件は、以下のように定式化される：

$$\begin{cases} v^* - v_i(\lambda) = 0 & \text{if } \lambda_i > 0 \\ v^* - v_i(\lambda) \geq 0 & \text{if } \lambda_i = 0 \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\lambda \in \Delta$ であり、 v^* は均衡状態における利得水準である。この均衡条件 (1) を満足する人口分布が、モデルの均衡解 (Nash 均衡) となる。

(2) Replicator dynamics の下での支配方程式

移動主体による立地点の変更に伴う人口分布 λ の変化は、replicator dynamics と呼ばれる以下の調整動学に従うものと仮定する：

$$\dot{\lambda} = F(\lambda, \phi) = \{F_i(\lambda, \phi) \mid i = 1, \dots, K\} \quad (2)$$

$$F_i(\lambda, \phi) = (v_i(\lambda, \phi) - \bar{v}(\lambda, \phi))\lambda_i \quad (3)$$

ここで、 $\bar{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ は平均利得、 $\phi \in (0, 1)$ はモデルの構造パラメータ (交易自由度) である¹。

均衡条件 (1) を満足する安定な均衡解を求める問題は、replicator dynamics の安定な停留点を求める問題に変換できる²。そして、replicator dynamics の停留点 λ^* は、以下の支配方程式によって決定される：

$$F(\lambda^*, \phi) = \mathbf{0} \quad (4)$$

ここで、均衡条件 (1) を満足する均衡解と、支配方程式 (4) を満足する停留点とは、一般には過不足なく一致しないが、安定な停留点は安定均衡解となることが知られている³。本研究では、理論分析から予測可能な停留点 (i.e., 自明解) を網羅的に特定する。特定した自明解の中で安定となるもののみが、安定均衡解となる。

(3) 停留点の分類

支配方程式 (4) を満足する停留点 λ^* は、その性質に応じて、以下に述べるように分類できる。

a) 安定解と不安定解

Jacobi 行列

$$J(\lambda^*, \phi) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda^*, \phi) \quad (5)$$

の固有値を調べることにより、停留点の安定性を以下のように分類できる：

$$\begin{cases} \text{安定解} : J \text{ の全ての固有値の実部が負} \\ \text{不安定解} : J \text{ の1つ以上の固有値の実部が正} \end{cases}$$

b) 内点解と端点解

停留点は、 λ^* の成分を並べ替えることにより、

$$\hat{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_+ \\ \lambda_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

と書き換えられる。ここで、

$$\lambda_+ = \{\lambda_i \mid \lambda_i > 0, i = 1, \dots, m\} \quad (7)$$

$$\lambda_0 = \mathbf{0} \quad (8)$$

である。このとき、停留点を以下のように分類できる：

$$\begin{cases} \text{内点解} : m = K \\ \text{端点解} : m < K \end{cases}$$

ここで、内点解は全ての立地点の人口が正であり、端点解は一部の (具体的には $K - m$ 個の) 立地点の人口が 0 である。

支配方程式 (4) および Jacobi 行列 (5) は、式 (6) の表記を用いることにより、

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} F_+(\lambda_+, \lambda_0, \phi) \\ F_0(\lambda_+, \lambda_0, \phi) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} J_+ & J_{+0} \\ O & J_0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

と書き換えられる。ここで、

$$J_+ = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \left\{ \frac{\partial(v_i - \bar{v})}{\partial \lambda_j} \mid i, j = 1, \dots, m \right\} \quad (11)$$

$$J_{+0} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \times \left\{ \frac{\partial(v_i - \bar{v})}{\partial \lambda_j} \mid i = 1, \dots, m; j = m+1, \dots, K \right\} \quad (12)$$

$$J_0 = \text{diag}(v_{m+1} - \bar{v}, \dots, v_K - \bar{v}) \quad (13)$$

である。このとき、停留点が安定となるための条件は、 \hat{J} の全ての固有値が負となることであり、それは以下に示す 2 つの条件を満たすことと同値である：

$$\begin{cases} \lambda_+ \text{ の安定性条件} : J_+ \text{ の全ての固有値が負} \\ \lambda_0 \text{ の存続性条件} : J_0 \text{ の全ての対角成分が負} \end{cases}$$

停留点の安定性の変化は、 \hat{J} の特異点において起こる。特異点は、 J_+ が特異行列となる break point と、 J_0 が特異行列となる non-break point に分類できる⁴。Break point において、 λ_+ の安定性条件が満たされなくなることにより、対称性を喪失した分岐解が発生する。

c) 自明解と非自明解

支配方程式 (4) を満足する解曲線として、停留点を以下のように分類できる：

$$\begin{cases} \text{自明解} : \lambda^* = \bar{\lambda} \\ \text{非自明解} : \lambda^* = \lambda^*(\phi) \end{cases}$$

ここで、 $\bar{\lambda}$ は ϕ の値によらず常に支配方程式の解となる人口分布パターンである。一方、 $\lambda^*(\phi)$ は ϕ の値によって変化する解である。

¹ 著者らの従来研究では、輸送費用パラメータ $\tau \in (0, \infty)$ を構造パラメータとしてきた。本研究では、 τ に変数変換を施した $\phi \in (0, 1)$ を採用する (付録 I, 式 (I.3) 参照)。なお、 ϕ は経済地理学分野において標準的に用いられている。

² Sandholm³¹⁾ Chap.4 を参照されたい。

³ Sandholm³¹⁾ Chap.5 を参照されたい。

⁴ もう一種の特異点として、 ϕ の極大・極小点も存在する。ただし、本章の議論においては重要とならない。詳細は、Ikeda et al.³³⁾ p.69 を参照されたい。

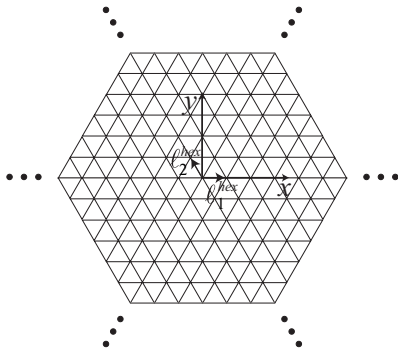


図-1 無限正三角形格子状経済

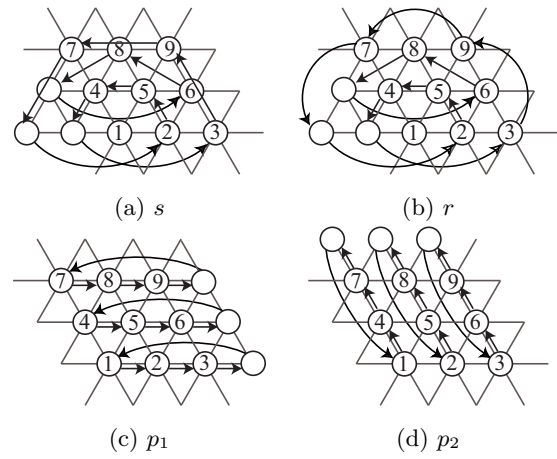
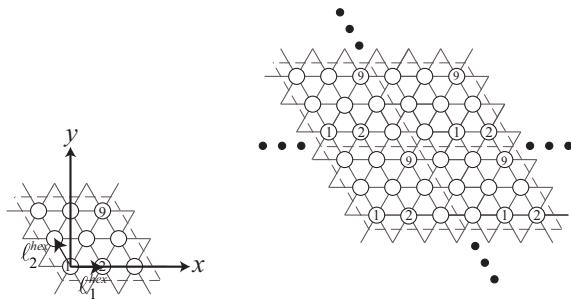


図-3 G_n^{hex} による変換作用 ($n = 3$ の例)



(a) 3×3 正三角形格子 (b) 疑似的無限正三角形格子

図-2 $n \times n$ 正三角形格子状経済 ($n = 3$ の例)

3. 地理空間

本章では、2. で導入したモデルにおいて仮定する地理空間として、正三角形格子状経済を定式化する。また、この地理空間が持つ対称性を記述するための群を導入する。

(1) 正三角形格子状経済

図-1 に示す無限正三角形格子状経済を考える。ここで、図中の格子節点が立地点を、実線が交通リンクを表している。この地理空間における立地点の位置座標の集合 \mathcal{H}^{hex} を、以下のように定義する：

$$\mathcal{H}^{hex} = \{n_1 \ell_1^{hex} + n_2 \ell_2^{hex} \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \quad (14)$$

ここで、

$$\ell_1^{hex} = d(1, 0)^\top, \ell_2^{hex} = d(-1/2, \sqrt{3}/2)^\top \quad (15)$$

であり、 $d > 0$ は隣接する立地点間の経路距離である。次に、 $K = n^2$ 個の立地点からなる、図-2 (a) に示す $n \times n$ 正三角形格子状経済を考える。ここで、図中の円が立地点を、数字が立地点番号を表している。この地理空間における立地点の位置座標の集合 \mathcal{H}_n^{hex} を、 \mathcal{H}^{hex}

の部分集合として以下のように定義する：

$$\mathcal{H}_n^{hex} = \{n_1 \ell_1^{hex} + n_2 \ell_2^{hex} \mid n_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq n_i \leq n-1\} \quad (16)$$

さらに、 \mathcal{H}_n^{hex} に対して 2 次元の周期境界を与える。具体的には、 $n_1 \ell_1^{hex} + n_2 \ell_2^{hex} \in \mathcal{H}^{hex}$ が

$$n'_1 \equiv n_1 \pmod{n}, n'_2 \equiv n_2 \pmod{n} \quad (17)$$

によって与えられる $n'_1 \ell_1^{hex} + n'_2 \ell_2^{hex} \in \mathcal{H}_n^{hex}$ に等しいと仮定する。以上により、 \mathcal{H}_n^{hex} を周期的に拡張したものととして、疑似的に \mathcal{H}^{hex} を表現する (図-2 (b) 参照)。なお、このような地理空間の設定は、隣接する立地点間の経路距離 d を用いて立地点 ij 間の最短経路距離 t_{ij} を具体的に与えることにより、支配方程式 (4) の中に組み込まれる (付録 1, 式 (I.2) 参照)。

(2) 対称性を記述する群

$n \times n$ 正三角形格子状経済における対称性が、以下の群 G_n^{hex} によって記述される：

$$G_n^{hex} = D_6 \times (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) = \langle r, s, p_1, p_2 \rangle \quad (18)$$

G_n^{hex} は、 r, s, p_1, p_2 という 4 つの要素によって生成される群であり、

- r : 時計回りの $\pi/3$ 回転変換
- s : x 軸に関する鏡映変換
- p_1 : ℓ_1^{hex} に沿った並進変換
- p_2 : ℓ_2^{hex} に沿った並進変換

である。これらの変換は具体的に、図-3 に示すような立地点の置換を施す。ここで、図中の直線矢印が変換作用を、曲線矢印は周期境界を表している。

G_n^{hex} の各々の要素は

$$s^l r^m p_1^i p_2^j, \quad l \in \{0, 1\}, m \in \{0, 1, \dots, 5\}, \\ i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (19)$$

の形で一意に表される。また、 G_n^{hex} の位数 (i.e., 要素の総数) は

$$|G_n^{hex}| = 12n^2 \quad (20)$$

である。

(3) 支配方程式の同変性

$n \times n$ 正三角形格子状経済の下では、支配方程式 (4) が G_n^{hex} に関する同変性

$$T(g)\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}, \tau) = \mathbf{F}(T(g)\boldsymbol{\lambda}, \tau), \quad g \in G_n^{hex} \quad (21)$$

を持つ。ここで、 $T(g)$ ($g \in G_n^{hex}$) は G_n^{hex} の変換作用を記述する表現行列である。なお、式 (21) は、変数 $\boldsymbol{\lambda}$ を $T(g)$ によって座標変換することと、方程式 \mathbf{F} 全体を $T(g)$ によって変換することとが同一であることを意味しており、一般的な幾何学的対称条件を表している。

4. 同変性に基づく分析

3. で述べたように、正三角形格子状経済を仮定したモデルは同変性 (21) を持つ。一般に、支配方程式がある群 G に関する同変性を持つとき、そのモデルを G -同変な系と呼ぶ。本章では、 G -同変な系に適用可能な一般論を述べる。

(1) 自明解

G -同変な系における支配方程式は、 ϕ の値によらず常に解となる自明解を持つ場合が多い。自明解の候補となるのは、 m 個の立地点に均等に人口が集積した端点解

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_+ \\ \boldsymbol{\lambda}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (22)$$

である。なお、 m を集積立地点数と呼ぶ。ここで、以下の命題が成り立つ。証明は付録 II (1) に示す⁵。

命題 1 ある端点解 (22) について、 m 個の立地点を $P^m = \{p^1, \dots, p^m\}$ という集合で表す。ここで、 G の部分群 G' に関する不変性

$$T_+(g)\boldsymbol{\lambda}_+ = \boldsymbol{\lambda}_+, \quad g \in G' \quad (23)$$

を満たし、かつ、 m 個の立地点の置換に関する条件

$$\forall p^i, p^j \in P^m, \exists g \in G' \text{ s.t. } g \cdot p^i = p^j \quad (24)$$

を満たすとき、この端点解は自明解である。ここで、 $T_+(g)$ ($g \in G'$) は G' の表現行列であり、同変性 (21) における $T(g)$ ($g \in G_n^{hex}$) の部分行列である。

⁵ Ikeda et al.⁸⁾ p.16 についても参照されたい。

(2) 軌道分解

命題 1 を援用して自明解を特定する上で、立地点 (格子節点) の軌道分解が有効となる。軌道分解とは、 G -同変な系において、 G の部分群 G' によって定義される群論的概念であり、直観的に述べれば、幾何学的条件によって立地点を分類するものである。

軌道の定義を以下に示す。

定義 1 (軌道) 全ての立地点を $P = \{1, \dots, K\}$ という集合で表す。 $i \in P$ に対し、

$$P^i = \{g \cdot i \mid g \in G'\} \quad (25)$$

を G' に関する i の軌道と定義する。

ここで一般に、 $P \neq P^i$ であり、 P は G' によって複数の軌道に分解される。軌道分解の定義を以下に示す。

定義 2 (軌道分解) 集合 P を

$$P = \bigcup_{i \in L} P^i \quad (26)$$

という直和で表すことを、 G' に関する軌道分解と定義する。ここで、 P^i ($i \in L$) は G' に関する軌道である。また、 $L = \{p^1, \dots, p^l\}$ であり、 l は G' に関する軌道の総数である。

なお、直和とは、ある集合を互いに交わらない部分集合の和によって表したものである。即ち、ある部分群に関する軌道分解において、1 つの立地点が 2 つ以上の軌道に属することはない。

上記の定義 2 および命題 1 より、以下の命題が成り立つ。証明は付録 II (2) に示す。

命題 2 ある端点解 (22) において、 $\boldsymbol{\lambda}_+$ に対応する m 個の立地点が、 G' に関する同一の軌道 P^i に含まれており、かつ、 $m = |P^i|$ であるとする。このとき、その端点解は自明解となる。ここで、 $|P^i|$ は P^i の要素数 (P^i に含まれる立地点の総数) である。

G の部分群を全て特定し、その各々に関する軌道分解に命題 2 を援用すれば、 G -同変な系における自明解を全て特定できる。

定義 1 における「任意の 2 つの立地点を互いに置換可能である」の意味は、同一の軌道に含まれる立地点の地理的条件は等しいということである。つまり自明解は、地理的条件の等しい立地点に均等に人口が分布した状態であり、これが停留点となることは直観的にも妥当である。上記の命題 2 は、以上の事柄を群論の用語によって定式化したものである。また、そのような状態であることに起因して、自明解は G' に関する不変性 (23) を満たす。換言すれば、ある部分群に関する軌道分解から得られた自明解を、その部分群の要素によって変換するとき、その結果は変換前の自明解と一致する。

表-1 自明解の個数

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$ G_n^{hex} $	108	192	300	432	588	768	972	1200	1452	1728
# of subgroups	193	480	374	1289	682	2158	1728	2638	1454	6837
# of trivial solutions	10	19	24	65	47	98	115	160	105	379

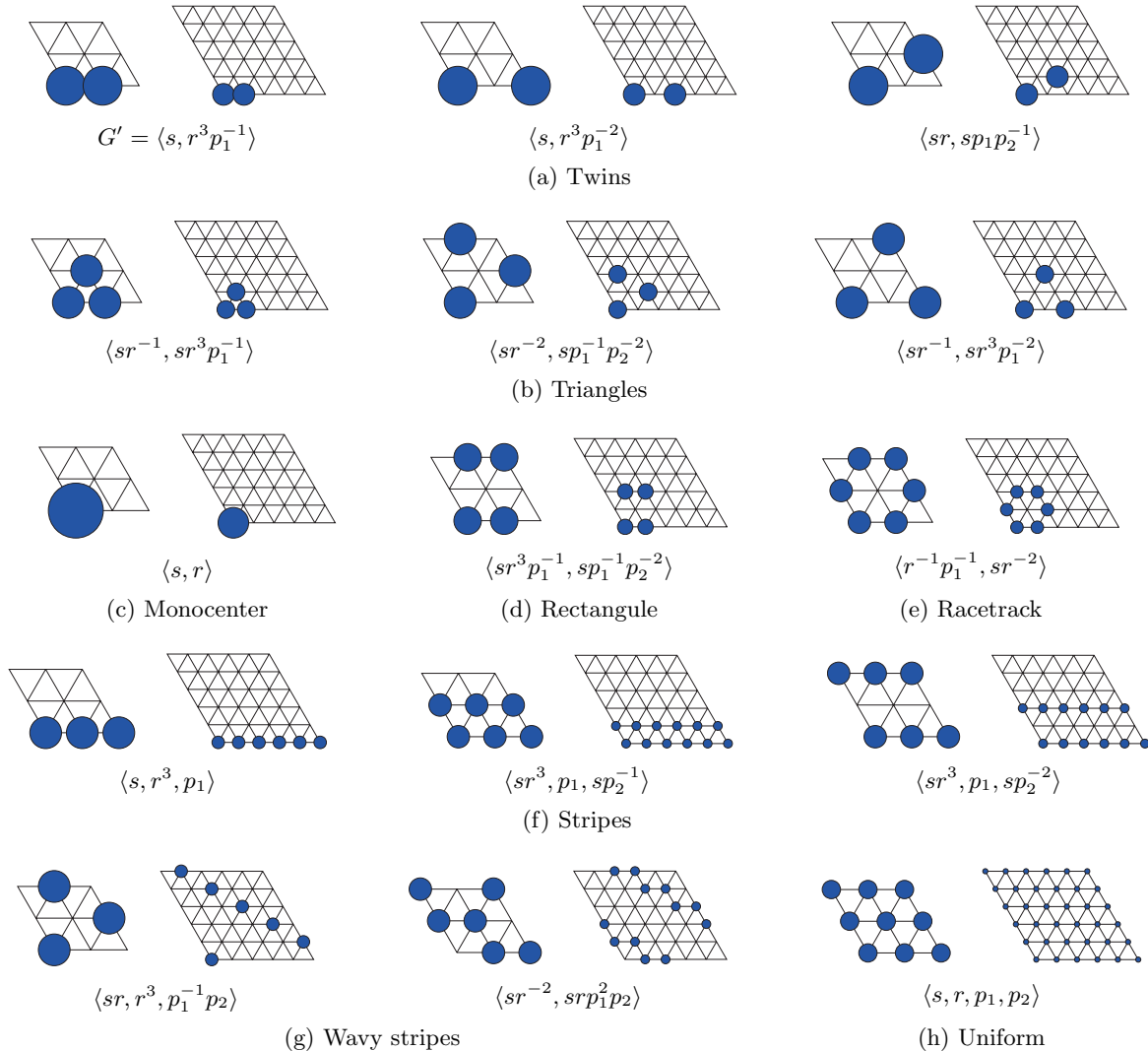


図-4 全ての n に共通して存在する自明解

5. 正三角形格子状経済における自明解

本章では、周期境界を与えた正三角形格子状経済において、自明解の個数・空間パターン・安定性に関する立地点数依存性を調べる。自明解を特定における具体的な手順は、以下の通りである：

- 格子サイズ n (立地点数 $K = n^2$) を選択する。
- G_n^{hex} の部分群 G' を選択する。
- G' に関する軌道 P^i を選択する。 P^i に含まれる立地点への均等な人口分布が自明解となる。
- 全ての軌道を選択し終えるまで繰り返す。
- 全ての部分群を選択し終えるまで繰り返す。

(1) 自明解の立地点数依存性

格子サイズ n と自明解の個数との関係を表-1 にまとめる。これより、自明解の個数は n に関して単調に増加しておらず、 n によって表現可能な空間パターンに差異があることが示唆される。 n が偶数の場合、 $n/2$ における自明解を周期的に拡張したものも自明解になることが多く、 n が奇数の場合と比較して自明解の個数が多い傾向にある。

全ての n に共通して存在する自明解を図-4 に示す。ここで、各図の左側は $n = 3$ 、右側は $n = 6$ における自明解であり、青円の大きさがその立地点における人口

表-2 安定化する自明解の個数 ($\sigma = 8.0, \mu = 0.4$)

(a) $n = 3$							(b) $n = 6$													
m	1	2	3	4	6	9	m	1	2	3	4	6	8	9	12	16	18	24	27	36
Stable	1	1	3	0	0	1	Stable	1	3	5	3	3	1	1	1	0	0	0	0	1
Unstable	0	1	0	1	2	0	Unstable	0	3	2	8	10	5	2	9	1	3	2	1	0
Total	1	2	3	1	2	1	Total	1	6	7	11	13	6	3	10	1	3	2	1	1

(c) $n = 12$																					
m	1	2	3	4	6	8	9	12	16	18	24	27	32	36	48	54	64	72	96	108	144
Stable	1	8	11	11	9	11	4	11	5	0	6	1	1	2	1	0	0	1	0	0	1
Unstable	0	10	8	38	44	35	4	43	26	16	35	2	5	6	13	2	1	4	2	1	0
Total	1	18	19	49	53	46	8	54	31	16	41	3	6	8	14	2	1	5	2	1	1

の大きさを表す。また、各図の下に示す群は、命題 2 における G' に対応する部分群である。図-4 に示す自明解は、 n によらず m が一定のもの (図-4 (a)-(e) 参照) と、 n に応じて m が変化するもの (図-4 (f)-(h) 参照) とに分類できる。前者は、特に $n = 6$ の場合を見ると明瞭であるが、人口が空間の一部に集中したパターンを呈している。これらは、正三角形という格子形状に起因して発現する自明解である。即ち、非周期的な正三角形格子状経済においても、これらと類似のパターンを持つ自明解が発現するものと予測される。一方で後者は、人口が空間全体に渡って分散したパターンを呈している。これらは、格子の周期境界条件に起因して発現する自明解である。これらに対応する部分群を確認すると、 p_1 や $p_1^{-1}p_2$ 等、並進のみからなる変換作用を含むことが分かる。

図-4 において $n = 3$ と $n = 6$ の自明解を比較すると、次の問題点が挙げられる。例えば、(b) Triangles における $\langle sr^{-2}, sp_1^{-1}p_2^{-2} \rangle$ の自明解と、(g) Wavy stripes における $\langle sr, r^3, p_1^{-1}p_2 \rangle$ の自明解に着目する。 $n = 6$ の場合、両者はどのような変換作用を施しても一致することがなく、本質的に異なる自明解である。しかし $n = 3$ の場合、両者は並進変換を施すことによって一致してしまう。異なる空間パターンを持つように見えるが、 $n = 3$ の場合には両者は本質的に同一の自明解である。上記のように、 n が高い場合には細分化されているパターンが、 n が低い場合には 1 つのパターンに縮約している場合があり、このことには注意を要する。

(2) 自明解の安定性

本節では、計算分岐理論に基づく局所安定性解析手法 (付録 III 参照) により、格子サイズ $n = 3, 6, 12$ における自明解の安定性を調べる。ここで、equi-distant economy と差別化される最小の格子サイズとして $n = 3$ を、応用上十分な示唆を得るための適当な格子サイズと

して $n = 6, 12$ を選択した。なお、安定性解析にあたっては、モデルの具体形とそのパラメータを設定する必要がある。本研究では Forslid and Ottaviano¹⁾ の空間経済モデルを用い、そのパラメータ設定として、代替の弾力性 $\sigma = 8.0$ 、工業財への支出割合 $\mu = 0.4$ を与える。また、工業財の生産関数の係数は $\alpha = \beta = 1$ とし、隣接する立地点間の経路距離は $d = 1/n$ ($n = 3, 6, 12$) とする。

a) $n = 3$

まず、 $n = 3$ の場合には 10 種類の自明解が存在し、そのうち 6 種類が安定化している (表-2 (a) 参照)。安定化する自明解と、それらが安定となる交易自由度 ϕ の区間を図-5 にまとめる。

図-5 より、 ϕ が低い区間では、集積の生じていない原始的な状態を意味する一様分散状態 (Uniform) のみが安定化する。 ϕ が中程度の区間では、特定の立地点に集積したいくつかのパターン (Twin, Stripe, Triangle, Hexagon) が安定化する。 ϕ が高い区間では、1 つの立地点への完全な集積を意味する一極集中パターン (Monocenter) のみが安定化する。また、 ϕ が高くなるにつれて、安定な自明解における集積立地点数 m が減少するという傾向を確認できる。

図-5 より、Stripe と Triangle の安定区間は同一となっている。この理由は、Stripe と Triangle とで、集積した立地点の地理的条件が同一となるためである。具体的に述べると、集積した立地点の 1 つに着目したとき、残り 2 つの集積した立地点との距離が d である。また、集積していない立地点のうち 4 つとの距離が d 、2 つとの距離が $2d$ である。このことから計算上、両者の安定区間が同一となる。

次に、自明解同士を接続する均衡経路を図-6 に示す。図中の直線が自明解を、曲線が非自明解を表す。また、実線が安定解を、破線が不安定解を表す。

一様分散状態において、点 a から ϕ が上昇すると、点

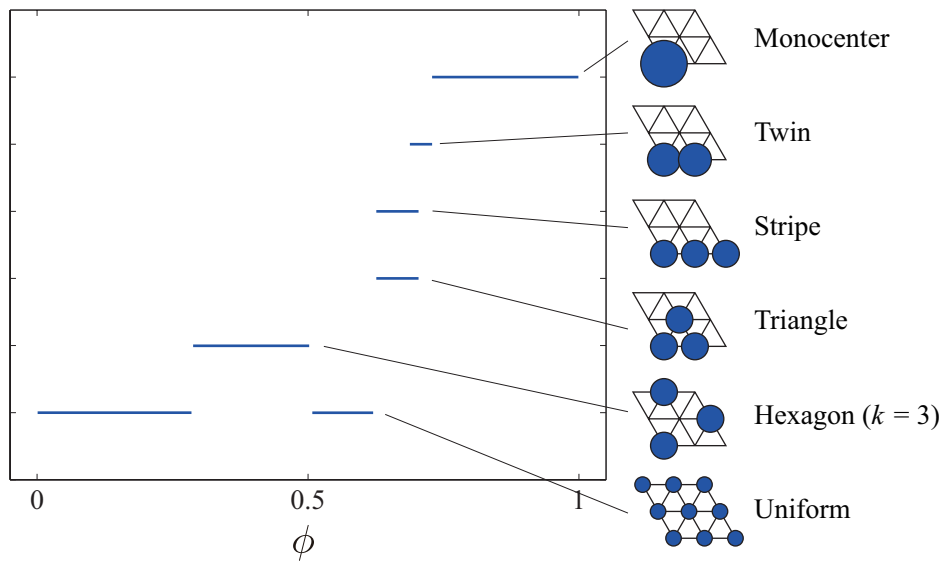


図-5 安定化する自明解とその安定区間 ($n = 3, \sigma = 8.0, \mu = 0.4$)

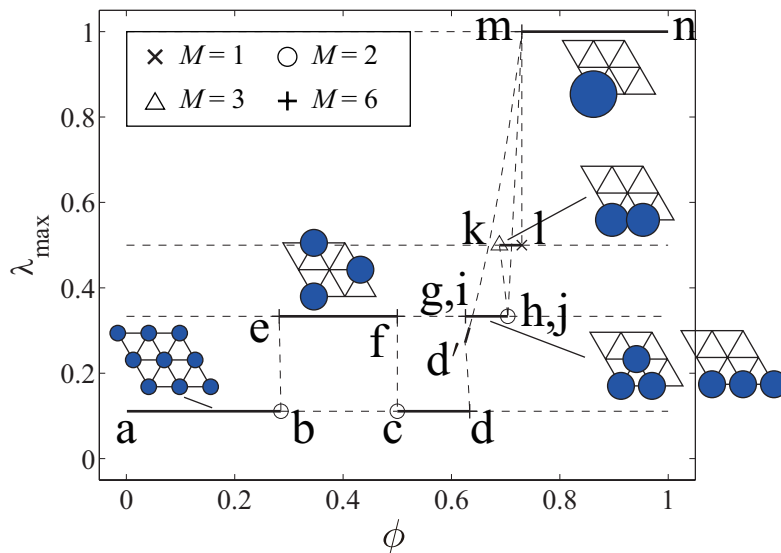


図-6 均衡経路 ($n = 3, \sigma = 8.0, \mu = 0.4$)

b にて分岐が生じ、非自明解を経て Hexagon に遷移する。さらに ϕ が上昇すると、点 f にて Hexagon が不安定となり、分岐が生じる。ここでは、再び一様分散状態に遷移しており、経済集積の再分散が表現されると解釈可能である。さらに ϕ が上昇すると、点 d にて一様分散状態が不安定となって分岐が生じ、ここでは一極集中パターンへと遷移する。

Triangle, Stripe, Twin は、一様分散状態からは直接的に遷移しないが、安定区間を持つ自明解である。Triangle および Stripe において、点 g から ϕ が上昇すると、点 h にて分岐が生じ、非自明解を経て Twin に遷移する。また、Twin においては点 l にて分岐が生じ、一極集中パターンへと遷移する。

図-6 より、自明解同士を非自明解が接続するという

モデルの分岐挙動が捉えられている。ここで、自明解同士を接続する非自明解については、そのほぼ全てが不安定となっていることを確認できる。一様分散状態から一極集中パターンへと遷移する過程(点 d')において、安定な非自明解が存在しているものの、他の安定な自明解と比較したとき、安定区間はごくわずかである。従って、モデルの挙動を説明する上で、自明解が重要な役割を果たすことは明白である。

b) $n = 6$

$n = 6$ の場合には 65 種類の自明解が存在し、そのうち 19 種類が安定化している(表-2 (b) 参照)。安定化する自明解と、それらが安定となる交易自由度 ϕ の区間を図-7 にまとめる。

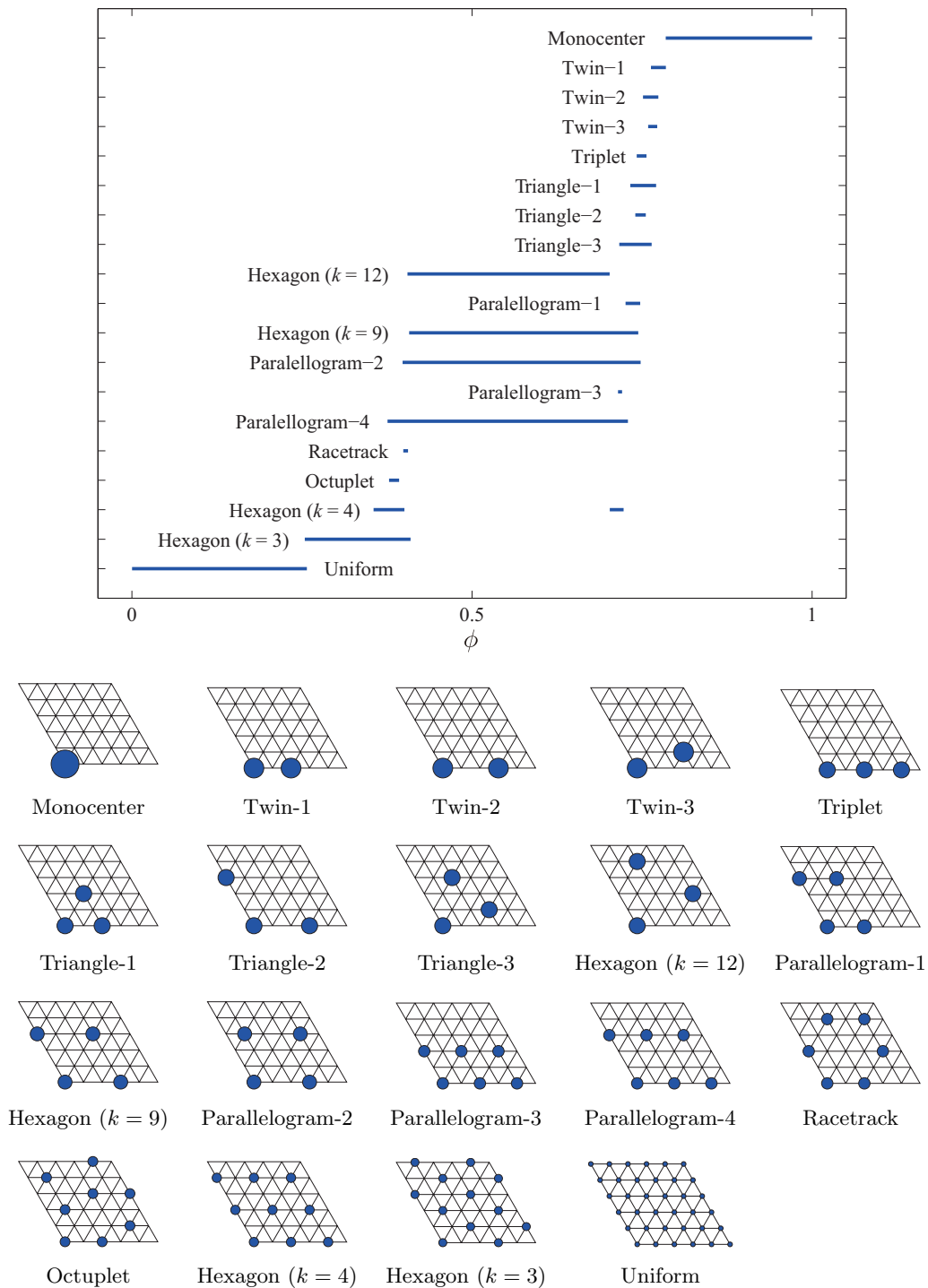


図-7 安定化する自明解とその安定区間 ($n = 6, \sigma = 8.0, \mu = 0.4$)

図-7より、 ϕ が低い区間では一様分散状態 (Uniform) が、 ϕ が中程度の区間では特定の立地点に集積した様々な空間パターンが、 ϕ が高い区間では一極集中パターン (Monocenter) が安定化する。また、 ϕ の上昇に伴い、安定な自明解における集積立地点数 m が減少する傾向を確認できる。これらは $n = 3$ の場合と同様の傾向であるが、 $n = 6$ においてはより顕著に現れている。

図-7における Hexagon ($k = 3, 4, 9, 12$) は、中心地理理論において示唆された正六角形状の都市分布を意味

する空間パターンである。ここで、 k は分布を特徴づける整数である。これらの空間パターンは具体的に、集積した立地点間の距離が \sqrt{k} となっており、 k system と称される。安定化する自明解の中でも、これら k system の安定区間の長さが顕著となっていることは、中心地理理論の文脈における幾何学的考察とも整合しており、注目すべき事実である。特に Hexagon ($k = 3$) は、 ϕ の区間 (0.257, 0.408) においては、唯一の安定な自明解となっている。

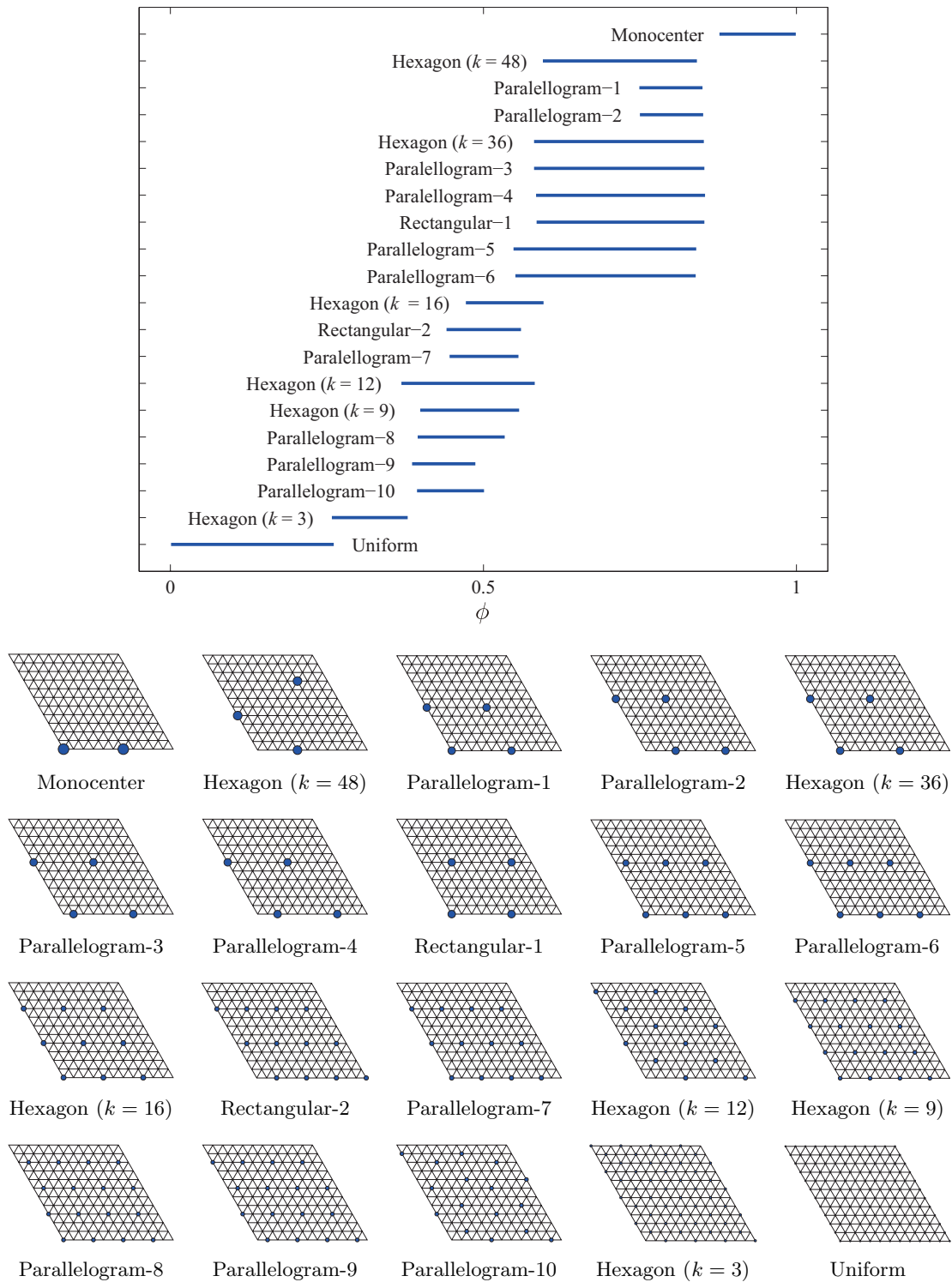


図-8 安定区間の長さが顕著な自明解 ($n = 12, \sigma = 8.0, \mu = 0.4$)

c) $n = 12$

$n = 12$ の場合には 379 種類の自明解が存在し、そのうち 84 種類が安定化している (表-2(c) 参照)。ここでは特に重要となる、安定区間の長さが顕著な自明解を図-8 にまとめる。具体的には、交易自由度 ϕ がとりうる区間 $(0, 1)$ において、安定となる ϕ の区間が 10% 以上を占めるものを示している。

図-8 より、 n の増加に伴って安定な自明解の個数も増加しており、多様な空間パターンが安定均衡解として発現しうる。ある ϕ の値における安定な自明解の個数も、 $n = 3, 6$ の場合よりも必然的に増加しており、複雑な複数均衡の可能性が示唆される。また、前節で述べた k system は依然として安定区間の長さが顕著である。 n の増加に伴い、より k の大きい Hexagon ($k = 16, 36, 48$)

も発現し、安定化している。

安定性解析の結果をまとめると、 ϕ が低・中程度の区間においては空間的にある程度分散したパターンが安定化し、 ϕ が中・高程度の区間においては空間的にある程度密集したパターンが安定化する。 $n = 3, 6$ における解析結果からも同様の傾向が見られることから、これは正三角形格子状経済における、 n に依存しない知見だといえる。

6. おわりに

本研究では、周期境界を与えた正三角形格子状経済において、自明解という分析視点により、空間経済モデルの集積パターンの分析を行った。理論分析によって特定できる自明解に着目することで、試行錯誤的な数値計算を行っていた従来のアプローチと比較して、モデルの安定均衡解を体系的に発見しうることを示した。本研究で着目した自明解は、群によって記述される対称性を持つ経済空間において、モデルの具体形やパラメータ設定によらず存在する。正三角形格子状経済以外の経済空間においても、対称性を持つ経済空間ならば、本研究と同様の理論展開により、自明解を特定できるものと予測される。

自明解に関する今後の課題として、解の安定性についてはモデルのバリエーションに依存するため、本研究とは異なるモデルにおいて、安定となるパターンにどのような違いが表れるかについての詳細な分析が必要である。また、政策提言等の実務的な貢献を目指す上では、自明解に加え、非自明解の詳細な分析も踏まえた議論が必要である。

付録 I モデル

本研究で取り上げる Forslid and Ottaviano¹⁾ の集積経済モデルについて、詳細を示す。

(1) 基本設定

a) 労働者

労働者は、その技術水準に応じて skilled worker と unskilled worker に分類されるものとする。skilled worker は高度な技術を持ち、自らが居住する都市を自由に選択できる移動主体である。skilled worker の総人口は 1 とする。従って、都市 i における skilled worker の人口を λ_i と置くと、以下の人口保存則が成り立つ：

$$\sum_{i=1}^K \lambda_i = 1 \quad (\text{I.1})$$

なお、本文中で単に「人口」と述べる場合には、「skilled worker の人口」を指している。

unskilled worker は高度な技術を持たず、自らが居住する都市を選択できない。各都市における unskilled worker の人口は 1 とし、各都市に一樣に分布しているものとする。

b) 産業

離散的な K 個の都市からなる経済システムを考える。財の生産部門は、農業部門と工業部門の 2 種類とする。農業部門は、収穫一定の技術により、unskilled worker を生産要素として 1 種類の同質な財を生産する、完全競争的な部門とする。工業部門は、収穫逡増の技術により、skilled worker と unskilled worker を生産要素として差別化された財を生産する、独占競争的な部門とする。

c) 輸送費用

ある都市で生産された財は他の都市へと輸送することができ、どの都市においても消費することができる。農業財の都市間輸送には費用がかからないものとする。一方で、工業財の都市間輸送には、距離に応じた氷塊型の輸送費用がかかるものとする。具体的には、1 単位の工業財を都市 i から j に輸送するとき、 $1/\tau_{ij}$ 単位だけが到達する。 τ_{ij} は以下のように定義される：

$$\tau_{ij} = \exp(\tau t_{ij}) \quad (\text{I.2})$$

ここで、 τ は輸送費用パラメータ、 t_{ij} は都市 ij 間の最短経路距離である。また、交易自由度 ϕ を以下のように定義する：

$$\phi = \exp[-\tau(\sigma - 1)d] \quad (\text{I.3})$$

これにより、 $\tau \in (0, \infty)$ の範囲を $\phi \in (0, 1)$ として表す。

(2) 消費者行動

労働者は全て同質であるとし、都市 i の労働者の効用関数 $U(C_i^M, C_i^A)$ が以下のように与えられるものとする：

$$U(C_i^M, C_i^A) = \mu \ln C_i^M + (1 - \mu) \ln C_i^A \quad (\text{I.4})$$

$$C_i^M \equiv \sum_j \left(\int_0^{n_j} q_{ji}(k)^{(\sigma-1)/\sigma} dk \right)^{\sigma/(\sigma-1)} \quad (\text{I.5})$$

ここで、 C_i^A は都市 i における農業財の消費量、 C_i^M は都市 i における工業財の消費量、 $k \in [0, n_j]$ は工業財の種類を表すインデックス、 n_j は都市 j で生産される工業財の種類数の総数、 $q_{ji}(k)$ は都市 j で生産された工業財 k の都市 i における消費量、 $\mu \in (0, 1)$ は工業財への支出割合、 $\sigma (> 1)$ は代替の弾力性である。

労働者の予算制約は以下のように与えられるものとする：

$$p_i^A C_i^A + \sum_{j=1}^K \int_0^{n_j} p_{ji}(k) q_{ji}(k) dk = Y_i \quad (\text{I.6})$$

ここで、 p_i^A は都市 i における農業財の価格、 $p_{ji}(k)$ は都市 j で生産された工業財 k の都市 i における価格である。また、 Y_i は都市 i における労働者の賃金（所得）であり、skilled worker の場合は w_i 、unskilled worker の場合は w_i^L と置く。

都市 i の労働者は、予算制約 (I.6) のもとで、効用関数 (I.4) を最大化する。その結果として、 C_i^A 、 C_i^M 、 $q_{ji}(k)$ が以下のように決定される：

$$C_i^A = (1 - \mu) \frac{Y_i}{p_i^A}, \quad C_i^M = \mu \frac{Y_i}{\rho_i}, \quad q_{ji}(k) = \mu \frac{\rho_i^{\sigma-1} Y_i}{p_{ji}(k)^\sigma} \quad (\text{I.7})$$

ここで、 ρ_i は都市 i における工業財の価格指数であり、

$$\rho_i = \left(\sum_{j=1}^K \int_0^{n_j} p_{ji}(k)^{1-\sigma} dk \right)^{1/(1-\sigma)} \quad (\text{I.8})$$

である。都市 i における総所得は $w_i \lambda_i + w_i^L$ であるため、都市 j で生産された工業財 k の都市 i 全体での消費量 $Q_{ji}(k)$ は、以下のように決定される：

$$Q_{ji}(k) = \mu \frac{\rho_i^{\sigma-1}}{p_{ji}(k)^\sigma} (w_i \lambda_i + w_i^L) \quad (\text{I.9})$$

(3) 生産者行動

完全競争的な農業部門では、収穫一定の技術によって同一の財を生産するため、一般性を失うことなく、1 単位の unskilled worker によって 1 単位の農業財が生産されると基準化できる。このとき、限界費用原理から、農業財の価格 p_i^A と unskilled worker の賃金 w_i^L は等しくなる。また、農業財の都市間輸送には費用がかからないものとするため、農業財の価格は全ての都市において等しくなる。そこで、農業財をニューメーラールとし、以下の関係を得る：

$$p_i^A = w_i^L = 1 \quad (\text{I.10})$$

工業部門では、企業が収穫逡増の技術によって差別化された財を生産し、Dixit-Stiglitz 型の独占的競争を行う。工業財の生産には、 α 単位の skilled worker と、生産量に応じた β 単位の unskilled worker が必要であるとする。即ち、企業の生産関数 $c(x_i(k))$ は以下のように与えられるものとする：

$$c(x_i(k)) = \alpha w_i + \beta x_i(k) \quad (\text{I.11})$$

ここで、 $x_i(k)$ は都市 i における工業財 k の生産量である。これより、都市 i の企業の利潤は以下のように与えられるものとする：

$$\Pi_i(k) = \sum_{j=1}^K p_{ij}(k) Q_{ij}(k) - (\alpha w_i + \beta x_i(k)) \quad (\text{I.12})$$

独占的競争のもとでは、規模の経済、消費における財の多様性の選好、および財の種類に制限がないことにより、どの企業も必ず他の企業とは異なる種類の財を生産する。従って、都市 i で生産される工業財の種

類の総数 n_i は、生産を行う企業の数に等しくなる。工業財の生産には α 単位の skilled worker が必要であり、都市 i における skilled worker の人口は λ_i であることから、以下の関係を得る：

$$\alpha n_i = \lambda_i \quad (\text{I.13})$$

工業財の都市間輸送には氷塊型の輸送費用がかかるため、

$$x_i(k) = \sum_{j=1}^K \tau_{ij} Q_{ij}(k) \quad (\text{I.14})$$

となる。式 (I.14) より、企業の利潤 (I.12) は以下のように書き換えられる：

$$\Pi_i(k) = \sum_{j=1}^K p_{ij}(k) Q_{ij}(k) - \left(\alpha w_i + \beta \sum_{j=1}^K \tau_{ij} Q_{ij}(k) \right) \quad (\text{I.15})$$

都市 i の企業は、独占的競争のもと、利潤 (I.15) を最大化する。その結果として、 $p_{ij}(k)$ が以下のように決定される：

$$p_{ij}(k) = \frac{\sigma \beta}{\sigma - 1} \tau_{ij} \quad (\text{I.16})$$

従って、 $p_{ij}(k)$ 、 $Q_{ij}(k)$ 、 $x_i(k)$ は k に依存せず決定される。

(4) 短期均衡

skilled worker が都市間を移動しない程の短期間での均衡状態を考え、これを短期均衡状態と呼ぶ。即ち、 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ を所与とする。短期均衡状態においては、工業財の市場清算条件、skilled worker の市場清算条件、企業の利潤ゼロ条件が満たされる。工業財の市場清算条件は式 (I.14)、skilled worker の市場清算条件は式 (I.13) によって表されている。また、企業の利潤ゼロ条件から、利潤 (I.12) を 0 と置くことにより、以下の関係を得る：

$$w_i = \frac{1}{\alpha} \left\{ \sum_{j=1}^K p_{ij} Q_{ij} - \beta x_i \right\} \quad (\text{I.17})$$

式 (I.13)、式 (I.16) より、価格指数 (I.8) は以下のように書き換えられる：

$$\rho_i = \frac{\sigma \beta}{\sigma - 1} \left(\frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^K \lambda_j d_{ji} \right)^{1/(1-\sigma)} \quad (\text{I.18})$$

ここで、

$$d_{ji} = \tau_{ji}^{1-\sigma} \quad (\text{I.19})$$

は都市 ij 間での財の輸送に関する交易条件を表す。式 (I.9)、式 (I.14)、式 (I.16)、式 (I.18) より、均衡賃金 (I.17) は以下のように書き換えられる：

$$w_i = \frac{\mu}{\sigma} \sum_{j=1}^K \frac{d_{ij}}{\Delta_j} (w_j \lambda_j + 1) \quad (\text{I.20})$$

ここで,

$$\Delta_j = \sum_{k=1}^K d_{kj} \lambda_k \quad (\text{I.21})$$

である. 以上の結果を効用関数 (I.4) に代入することにより, 都市 i における間接効用関数 v_i が以下のように決定される:

$$v_i = \frac{\mu}{\sigma - 1} \ln[\Delta_i] + \ln[w_i] \quad (\text{I.22})$$

ただし, ここでは分析に影響を及ぼさない定数項を省略している.

付録 II 証明

(1) 命題 1 の証明

いま, λ_+ の成分は

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 1/m \quad (\text{II.1})$$

である. また, 同変性 (21) が成立することと, 表現行列 $T_+(g)$ ($g \in G'$) によって λ_+ の成分どうしが置換されることから,

$$v_1 = \dots = v_m \quad (\text{II.2})$$

が成立していなければならない. 以上より,

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = v_i \quad (\text{II.3})$$

が得られ,

$$v_i - \bar{v} = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (\text{II.4})$$

を得る. 従って,

$$F_+ \left(\frac{1}{m} \mathbf{1}, \mathbf{0}, \tau \right) = \mathbf{0} \quad (\text{II.5})$$

を得る. また, λ_0 の成分は

$$\lambda_j = 0 \quad (i = m + 1, \dots, n) \quad (\text{II.6})$$

である. 従って,

$$F_0 \left(\frac{1}{m} \mathbf{1}, \mathbf{0}, \tau \right) = \mathbf{0} \quad (\text{II.7})$$

を得る. (II.5) および (II.7) より,

$$\hat{F} \left(\frac{1}{m} \mathbf{1}, \mathbf{0}, \tau \right) = \mathbf{0} \quad (\text{II.8})$$

を得る. 従って, $(\lambda_+, \lambda_0, \tau) = (\frac{1}{m} \mathbf{1}, \mathbf{0}, \tau)$ は支配方程式 (4) を満足する自明解である.

(2) 命題 2 の証明

軌道の定義より, ある軌道 P^i は, 「 G' の要素によって立地点 i に置換を施したときの, i の置換先となる立地点からなる集合」である. これより, 同じ軌道に含まれる立地点については, 明らかに条件 (24) が満たされる. また, 人口が m 個の立地点に均等に分布していることから, 明らかに G' に関する不変性 (23) が満たされる. 従って, 命題 1 における 2 つの条件が満たされることから, 命題 2 で想定した端点解は自明解となる.

付録 III 計算分岐理論

計算分岐理論³²⁾に基づき, 以下の手順によって支配方程式の解曲線を数値解析的に追跡し, 解の安定性を判定する.

(1) 経路追跡

支配方程式 (4) を満たす所与の解を (λ, τ) とし, その近傍における別の解を $(\lambda + \delta\lambda, \tau + \delta\tau)$ とおく. ここで, $\delta\lambda$ および $\delta\tau$ は増分量である. このとき, Taylor 展開により, 支配方程式 (4) は以下の増分形式に書き換えられる:

$$\tilde{F}(\delta\lambda, \delta\tau) = J(\lambda, \tau)\delta\lambda + \frac{\partial F}{\partial \tau}(\lambda, \tau)\delta\tau + \text{h.o.t.} = \mathbf{0} \quad (\text{III.1})$$

ここで, h.o.t. は高次項である. Newton-Raphson 法によって式 (III.1) を解き, 解 $(\lambda + \delta\lambda, \tau + \delta\tau)$ を決定する. この計算を繰返すことにより, 解曲線を得る.

(2) 特異性判定

固有値解析によって Jacobi 行列 $J(\lambda, \tau)$ の固有値を求める. 固有値が全て負となる解を安定と判定し, それ以外の解を不安定と判定する. また, ゼロ固有値が存在する場合には特異点と判定する.

(3) 経路切替え

特異点 (λ^*, τ^*) において, Jacobi 行列のゼロ固有値に対応した固有ベクトル η の方向に分岐経路を探索する (一般に, 直線探索法と呼ばれる). 具体的には, $\delta\lambda = C\eta$ とおき, $(\lambda^* + \delta\lambda, \tau^*)$ を初期値とした Newton-Raphson 法によって支配方程式 (4) を解き, 分岐経路上の解に収束させる. ここで, C は適当な定数であり, 試行錯誤によって決定する.

参考文献

- 1) Forslid, R. and Ottaviano, G. I. P. : An analytically solvable core-periphery model, *Journal of Economic Geography*, Vol.3, pp.229–340, 2003.
- 2) Fujita, M., Krugman, P. and Venables, A. J. : *The Spatial Economy: Cities, Regions and International Trade*, MIT Press, 1999.
- 3) Baldwin, R. E., Forslid, R., Martin, P., Ottaviano, G. I. P. and Robert-Nicoud, F. : *Economic Geography and Public Policy*, Princeton University Press, 2003.
- 4) Combes, P.-P., Mayer, T. and Thisse, J.-F. : *Economic Geography: The integration of Regions and Nations*, Princeton University Press, 2008.
- 5) Fujita, M. and Thisse, J.-F. : *Economics of Agglomeration: Cities, Industrial Location, and Globalization*, Cambridge University Press, 2013.
- 6) 佐藤泰裕, 田淵隆俊, 山本和博 : 空間経済学, 有斐閣, 2011.
- 7) 曾道智, 高塚創 : 空間経済学, 東洋経済新聞社, 2016.

- 8) Ikeda, K., Onda, M. and Takayama, Y. : Spatial period doubling, invariant pattern, and break point in economic agglomeration in two dimensions, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol.92, pp.129–152, 2018.
- 9) 木暮洋介, 恩田幹久, 大澤実, 高山雄貴, 池田清宏 : 正方形格子状経済における幾何学的安定パターン, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.74, No.4, pp. 411–425, 2018.
- 10) Christaller, W. : *Die zentralen Orte in Süddeutschland*, Gustav Fischer, Jena, 1933. English translation: *Central Places in Southern Germany*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- 11) Lösch, A. : *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Gustav Fischer, Jena, 1940. English translation: *The Economics of Location*, Yale University Press, New Haven, 1954.
- 12) Fujita, M. and Mori, T. : Structural stability and the evolution of urban systems, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.42, pp.399–442, 1997.
- 13) Mori, T. : A modeling of megalopolis formation: the maturing of city systems, *Journal of Urban Economics*, Vol.42, pp.133–157, 1997.
- 14) Ikeda, K., Akamatsu, T. and Kono, T. : Spatial period-doubling agglomeration of a core-periphery model with a system of cities, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol.36(5), pp.754–778, 2012.
- 15) Akamatsu, T., Takayama, Y. and Ikeda, K. : Spatial discounting, Fourier, and racetrack economy: A recipe for the analysis of spatial agglomeration models, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol.36(11), pp.1729–1759, 2012.
- 16) Osawa, M., Akamatsu, T. and Takayama, Y. : Harris and Wilson (1978) Model Revisited: The spatial period-doubling cascade in an urban retail model, *Journal of Regional Science*, Vol.57(3), pp.442–466, 2017.
- 17) Tabuchi, T. and Thisse, J.-F. : A new economic geography model of central places, *Journal of Urban Economics*, Vol.69, pp.240–252, 2011.
- 18) Castro, SBS.D., Correia-da-Silva, J. and Mossay, P. : The core-periphery model with three regions and more, *Papers in Regional Science*, Vol.91(2), pp.401–418.
- 19) 大澤実, 赤松隆, 高山雄貴 : Harris & Wilson (1978) モデル再考 : 集積の経済を考慮した商業立地モデルの分岐解析, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.71, No.3, pp. 141–155, 2015.
- 20) 大澤実, 赤松隆 : 集積経済理論の実証におけるモデル構造選択の課題, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.73, No.1, pp. 1–15, 2017.
- 21) Akamatsu, T., Mori, T., Osawa, M. and Takayama, Y. : Spatial scale of agglomeration and dispersion: Theoretical foundations and empirical implications, *MPRA Paper*, University Library of Munich, Germany, pp.1–53, 2018.
- 22) Clarke, M., Wilson, A. G. : The dynamics of urban spatial structure: Progress and problems, *Journal of Regional Science*, Vol.23(1), pp.1–18, 1983.
- 23) Weidlich, W. and Haag, G. : A dynamic phase transition model for spatial agglomeration processes, *Journal of Regional Science*, Vol.27(4), pp.529–569, 1987.
- 24) Munz, M. and Weidlich, W. : Settlement formation, Part II: Numerical simulation, *The Annals of Regional Science*, Vol.24, pp.177–196, 1990.
- 25) Beckman, S., Garretsen, H., van Marrewijk, C. and van den Berg, M. M. : The return of Zipf: Towards a Further Understanding of the Rank-Size Distribution, *Journal of Regional Science*, Vol.39(1), pp.183–213, 1999.
- 26) Stelder, D. : Where do cities from? A geographical agglomeration model for Europe, *Journal of Regional Science*, Vol.45, pp.657–679, 2005.
- 27) Ikeda, K., Murota, K. and Akamatsu, T. : Self-organization of Lösch's hexagons in economic agglomeration for core-periphery models, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.22, No.8, pp.1230026-1–1230026-29, 2012.
- 28) Ikeda, K., Murota, K., Akamatsu, T., Kono, T. and Takayama Y. : Self-organization of hexagonal agglomeration patterns in new economic geography models, *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol.99, pp.32-52, 2014.
- 29) Ikeda, K., Murota, K. and Takayama, Y. : Stable economic agglomeration patterns in two dimensions: beyond the scope of central place theory, *Journal of Regional Science*, Vol.57, pp.132–172, 2017.
- 30) Ikeda, K., Aizawa, H., Kogure, Y. and Takayama, Y. : Stability of bifurcating patterns of spatial economy models on a hexagonal lattice, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.28, No.11, pp.1850138-1–1850138-30, 2018.
- 31) Sandholm, W. H. : *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, 2010.
- 32) 藤井文夫, 大崎純, 池田清宏 : 構造と材料の分岐力学, 計算工学シリーズ 3, コロナ社, 2005.
- 33) Ikeda, K. and Murota, K. : *Bifurcation Theory for Hexagonal Agglomeration in Economic Geography*, Springer-Verlag, Tokyo, 2014.

(2019. 3. 10 受付)