

# 大規模な Fujita and Ogawa(1982) モデルの 効率的解法

清水 廉<sup>1</sup>・長江 剛志<sup>2</sup>

<sup>1</sup>東北大学大学院工学研究科 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-11-816)

E-mail: ren.shimizu.q4@dc.tohoku.ac.jp

<sup>2</sup>東北大学大学院工学研究科 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-11-814)

E-mail: nagae@tohoku.ac.jp

本研究の目的は、2次元空間をはじめとする大規模な FO (Fujita and Ogawa, 1982) モデルの効率的解法を開発することである。具体的には、まず、FO モデルと等価な二次計画問題に対して Benders 分解することで、FO モデルを各地点の企業数のみを未知変数とする「マスター問題」と企業数を与件として家計の通勤パターンを求める「サブ問題」とを交互に解く問題に帰着させる。ここで、サブ問題の未知変数の次元は、本来ならば、地点数の二乗のオーダーとなることから、地点数が1万個を超えるような大規模な問題に適用することは極めて困難である。そこで、本研究では、次に、このサブ問題が Hitchcock 型輸送問題と等価であることを利用することで、実質的な未知変数の次元が地点数のオーダーで済む効率的解法を開発する。最後に、提案手法を用いた数値解析を行ない、地点数が 20,000 を超えるような大規模な FO モデルに対しても、実用的な時間内に解を求められることを明らかにする。

**Key Words:** *Fujita and Ogawa (1982)*,

## 1. 序論

「都市」はなぜ形成され、発展するのだろうか。経済地理学の分野では、都市の形成や発展を「集積経済」という概念によって説明している。これは、同業種、異業種を問わず多くの企業が集中して立地することで利益が生じるという考え方である。たとえば、同じ部品を使う工場が複数あるならば、それらは集中して立地することでその部品の輸送費用が下がり、結果的に仕入れ値を低く抑えることができる。また、バックグラウンドが異なる異業種の企業が互いに交流することで、新たなアイデアが生まれることもある。この集積経済によって、さまざまな企業が集積して都市が形成されるものと考えられてきたが、一方で具体的に都市がどのように形成されるのか、また地下鉄の開通や道路の建設といった新しい交通施策によって都市の構造がどのように変化するかということに対する定量的な分析手法は確立されていない。

この定量的な分析を行うための都市モデルとして、集積経済を考慮した立地均衡モデルである Fujita and Ogawa<sup>1)</sup> [FO] モデルが存在するが、二次元空間において FO モデルの均衡パターンとしてどのような形状が得られるのかは未だに明らかになっていない。その原因の1つとして、計算量の多さが挙げられる。均衡パターンをより正確に表現するには地点数  $K$  としてなる

べく大きな値をとり、空間の解像度を高める必要があるが、モデルを解くための未知変数が  $K^2$  のオーダーであるため、単純な方法で解く場合には非常に大規模な問題になってしまう。先行研究として、秋本<sup>2)</sup> は効率的な解法の方向性を示したものの、その実装には至っていない。

本研究では、集積経済を考慮した家計と企業の立地均衡モデル (Fujita and Ogawa<sup>1)</sup>) (FO モデル) の二次元空間における均衡解を効率的に求める方法を提案し、実装することを目的とする。具体的には、秋本<sup>2)</sup> によって提案された方法を整理し、それに則って更なる改良、工夫を加えた方法を提案する。

本論文の構成は以下の通りである。まず、2章では本研究で取り扱う FO モデルを定式化する。続いて3章では秋本<sup>2)</sup> による既存解法を整理し、4章では既存解法に則った提案手法について述べる。また5章では提案手法を用いた数値計算を行う。最後に6章では本研究のまとめと今後の課題について述べる。

## 2. モデルの定式化

### (1) 記号の定義と均衡条件

$K$  個の地点集合  $\mathcal{K}$  からなる格子状の二次元空間を考える。以下ではこれを「都市」とよぶ。空間の境界とし

て周期境界条件を仮定する。<sup>1</sup>地点  $i, j \in \mathcal{K}$  間の Euclid 距離を  $T_{ij}$  とする。都市の総土地容量を  $S$  とし、各地点の土地容量を  $\bar{S} := S/K$  とする。この都市に、総数  $M$  の企業と総数  $N$  の家計が立地する。各企業の労働需要を  $L$  とすると、 $N = LM$  を満たすものと仮定する。地点  $i$  に立地し、地点  $j$  の企業に通勤する家計を家計  $(i, j)$  とよび、その総数を  $n_{ij}$  とする。この家計  $(i, j)$  が必要とする通勤費用は  $tT_{ij}n_{ij}$  で表される。ここで  $t$  は通勤費用パラメータを表す。一方、地点  $i$  に立地する企業を企業  $i$  とよび、その総数を  $m_i$  とする。企業同士は互いに交流し、利潤を得る。企業  $i$ 、企業  $j$  の交流による利潤は、 $d_{ij}m_i m_j$  で表される。ここで  $d_{ij} := \exp(-\tau T_{ij})$  は空間的割引率、 $\tau$  は交流費用パラメータをそれぞれ表す。

家計  $(i, j)$  は企業  $j$  に勤務することにより賃金  $W_j$  を得て、通勤費用  $tT_{ij}$  および地代  $R_i$  を支払い、その差額となる  $W_j - R_i - tT_{ij}$  を合成財（ニューメレール財）の消費に充てる。よって各家計は効用  $W_j - R_i - tT_{ij}$  が最大となるように居住地  $i$  と勤務先  $j$  を選択する。家計の均衡効用を  $\psi^*$  とすると、家計の最適な選択行動は以下のように表せる：

$$\begin{cases} n_{ij} > 0 \Rightarrow W_j - R_i - tT_{ij} = \psi^* \\ n_{ij} = 0 \Leftarrow W_j - R_i - tT_{ij} < \psi^* \end{cases} \quad (1)$$

一方、企業  $i$  はすべての企業  $j \in \mathcal{K}$  と交流して交流利潤  $\sum_j d_{ij}m_j$  を得て、地代  $R_i$  と賃金  $LW_i$  を支払う。そしてその差額  $\sum_j d_{ij}m_j - R_i - LW_i$  を利潤とし、これが最大となるように立地点  $i$  を選択する。企業の均衡利潤を  $\pi^*$  とすると、企業の最適な選択行動は以下のように表せる：

$$\begin{cases} m_i > 0 \Rightarrow \sum_j d_{ij}m_j - R_i - LW_i = \pi^* \\ m_i = 0 \Leftarrow \sum_j d_{ij}m_j - R_i - LW_i < \pi^* \end{cases} \quad (2)$$

FO モデルにおける均衡条件は、すべての家計  $(i, j)$  および企業  $i$  について式 (1)、式 (2) を満足していることである。これは、各企業および家計がそれぞれの立地や勤務先を変更するメリットがない状態である。言い換えれば、すべての企業および家計が現時点の立地、勤務先に満足している状態であるといえる。

企業の交流利潤は、距離が長いほど減衰するので、企業同士は互いに集まろうとし、集積経済が表現される。しかし、企業が密集するほど家計は遠くに立地せざるを得なくなり、通勤費用は増加する。つまり、交流利潤は企業同士の引力として、通勤費用は斥力として作用する。したがって、均衡パターンの形状は 2 つのパラメータ  $\tau, t$  の大きさによって決まることが分かる。

<sup>1</sup> 周期境界条件とは、空間の左端と右端、上端と下端がそれぞれつながっているとしたものである。

## (2) 等価な最適化問題

FO モデルの均衡条件と等価な最適化問題は以下の通りである：

$$[\text{P1}] \min_{m, n} Z(m, n) := -\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} d_{ij} m_i m_j + t \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} T_{ij} n_{ij} \quad (3a)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in \mathcal{K}} m_i = M \quad (3b)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = N \quad (3c)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i \leq \bar{S} \quad (3d)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \geq Lm_j \quad (3e)$$

$$m_i \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{K} \quad (3f)$$

$$n_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \quad (3g)$$

目的関数 (3a) はベクトル・行列を用いると以下のようにも表現できる：

$$Z(m, n) = -\frac{1}{2} \mathbf{m}^\top \mathbf{D} \mathbf{m} + t \mathbf{T}^\top \mathbf{n} \quad (4)$$

ただし、正方行列  $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$ 、ベクトル  $\mathbf{T} = \{T_{ij}\}$ 、ベクトル  $\mathbf{n} = \{n_{ij}\}$  である。

目的関数 (3a) の第 1 項は交流利潤の和に  $-1/2$  をかけたもの、第 2 項は通勤費用の和になっているので、これは総交流利潤を最大化し、総通勤費用を最小化している問題になっている。制約条件 (3d) は土地制約、(3e) は労働市場の需給制約をそれぞれ表す。

なお、[P1] の目的関数 (3a) は  $n_{ij}$  について単調増加であることから、労働市場の需給制約 (3e) および  $N = LM$  が満足されていれば制約条件 (3c) は自動的に満たされる。さらにこのとき、労働市場の需給制約は常に等号が成立する。すなわち、すべての地点において労働力が余ることはない。

## 3. 既存解法

### (1) Frank-Wolfe 法による解法

問題 [P1] は非線形最適化問題であり、そのまま解くのは非常に困難である。秋本<sup>2)</sup> は、これを効率的に解く方法として Frank-Wolfe 法を用いた。Frank-Wolfe 法の各ステップは以下ようになる。

**Step 0:** 初期実行可能解  $(\mathbf{m}^{(0)}, \mathbf{n}^{(0)})$  を設定する。

**Step 1:** 問題 [P1] を現時点の解で線形近似した問題（補助問題）を解き、解の改訂方向を定める。 $q$  回目の繰り返しで暫定解  $(\mathbf{m}^{(q)}, \mathbf{n}^{(q)})$  が求められているとすると、解の改訂方向  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を求める補助問題は以

下のようになる：

$$[P2] \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} Z^{(q)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := - \sum_{i \in \mathcal{K}} A_i^{(q)} x_i + t \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} T_{ij} y_{ij} \quad (5a)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in \mathcal{K}} x_i = M \quad (5b)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{K}} y_{ij} + x_i \leq \bar{S} \quad (5c)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} y_{ij} = Lx_j \quad (5d)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{K} \quad (5e)$$

$$y_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \quad (5f)$$

ただし,  $A_i^{(q)} := \sum_{j \in \mathcal{K}} d_{ij} m_j^{(q)}$  である. また目的関数 (5a) は以下のようにも表現できる：

$$Z^{(q)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{m}^{(q)\top} \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{T}^\top \mathbf{y} \quad (6)$$

**Step 2:** 暫定解  $(\mathbf{m}^{(q)}, \mathbf{n}^{(q)})$  と解の改訂方向  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を用いて一次元探索を行い, 新たな解  $(\mathbf{m}^{(q+1)}, \mathbf{n}^{(q+1)})$  を求める. すなわちこれは,

$$(\mathbf{m}^{(q+1)}, \mathbf{n}^{(q+1)}) = (1 - \alpha)(\mathbf{m}^{(q)}, \mathbf{n}^{(q)}) + \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (7)$$

とおき, 最適なステップ・サイズ  $\alpha \in [0, 1]$  を求める問題となる.

ただし, 解くべき問題 [P1] は未知変数  $\mathbf{m}, \mathbf{n}$  について高々二次なので, 最適なステップ・サイズ  $\alpha$  は解析的に求められ,  $\alpha = 1$  が最適となる (詳細な議論は付録 I を参照). したがって (7) 式は,

$$(\mathbf{m}^{(q+1)}, \mathbf{n}^{(q+1)}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (7')$$

となる.

**Step 3:** 収束判定を行う. 収束した場合は  $(\mathbf{m}^{(q)}, \mathbf{n}^{(q)})$  を均衡解として終了するが, そうでない場合は Step 1 に戻る. 本研究では, 以下の式 (8) を満たした場合に収束したものと見なす.

$$\left| \frac{Z(\mathbf{m}^{(q+1)}, \mathbf{n}^{(q+1)}) - Z(\mathbf{m}^{(q)}, \mathbf{n}^{(q)})}{Z(\mathbf{m}^{(q+1)}, \mathbf{n}^{(q+1)})} \right| < \epsilon \quad (\epsilon = 10^{-10}) \quad (8)$$

Frank-Wolfe 法を適用することにより, 非線形最適化問題 [P1] は線形最適化問題である補助問題 [P2] を繰り返し解く問題へと置き換えられた. しかし, 補助問題 [P2] は線形ではあるものの大規模な問題であるため, これもそのまま解くのは難しい. そこで次節ではこの補助問題 [P2] に新たなアプローチを加えている.

## (2) Benders 分解を用いた補助問題の解法

### a) Benders 分解の概要

秋本<sup>2)</sup> は, 大規模な問題である補助問題に対して Benders 分解<sup>3)</sup> を適用した. これは, 構造の異なる 2 種類の変数が混ざった問題をそのまま解くのではなく, そ

れぞれの問題に分解して構造上の特性を利用して解き, それを“持ち寄って解く”<sup>8)</sup> という方法である.

補助問題 [P2] に対して Benders 分解を適用すると, 企業立地パターン  $\hat{\mathbf{x}}$  を与件として家計の立地・通勤パターン  $\mathbf{y}$  を求める問題 (**サブ問題**) および, サブ問題の双対解である端点集合を与件として企業立地パターン  $\hat{\mathbf{x}}$  を求める問題 (**マスター問題**) に分解することができる.

### b) サブ問題とその双対問題

企業立地パターン  $\hat{\mathbf{x}}$  が与えられたとき, 家計の立地・通勤パターン  $\mathbf{y}$  を求めるサブ問題は以下ようになる：

$$[P_{\text{sub-P}}] \min_{\mathbf{y}} Z_{\text{sub-P}}(\mathbf{y}) := \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} T_{ij} y_{ij} \quad (9a)$$

$$\text{s.t.} \sum_{j \in \mathcal{K}} y_{ij} \leq \bar{S} - \hat{x}_i, \quad \forall i \in \mathcal{K} \quad (9b)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} y_{ij} \geq L\hat{x}_j, \quad \forall j \in \mathcal{K} \quad (9c)$$

$$y_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \quad (9d)$$

このサブ問題は, 起点集合  $\mathcal{K}$  および終点集合  $\mathcal{K}$  の Hitchcock 型輸送問題<sup>4)</sup> と見なすことができる. Hitchcock 型輸送問題は線形計画問題の一種であるので, 線形計画問題の基本的な性質により  $K^2$  個の未知変数  $\mathbf{y}$  のうち非零のものは  $(2K - 1)$  個のみとなる. つまり問題を解くプログラムを実装する際に, 記憶させる未知変数の数を大幅に減らすことができる.

土地の総供給量が総需要量以上である ( $S \geq N + M$ ) 限り, サブ問題は任意の  $\hat{\mathbf{x}}$  について実行可能である. さらに, 家計立地数が非負なのでサブ問題の目的関数は下に有界である. したがって, 与件となる  $\hat{\mathbf{x}}$  が実行可能ならばサブ問題は必ず最適解を持つ.

一方, サブ問題の双対問題 (サブ双対問題) は地代  $\mathbf{R}$  と賃金  $\mathbf{W}$  を変数として以下のように定式化される：

$$[P_{\text{sub-D}}] \max_{\mathbf{R}, \mathbf{W}} Z_{\text{sub-D}}(\mathbf{R}, \mathbf{W}) := - \sum_{i \in \mathcal{K}} \{R_i(\bar{S} - \hat{x}_i) + LW_i \hat{x}_i\} \quad (10a)$$

$$\text{s.t.} T_{ij} + R_i - W_j \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \quad (10b)$$

サブ双対問題  $[P_{\text{sub-D}}]$  の許容領域は企業立地パターン  $\hat{\mathbf{x}}$  とは無関係に決まる非有界な凸多面体であり, 有限の端点集合  $\mathcal{V}^* := \{(\mathbf{R}^{(1)}, \mathbf{W}^{(1)}), (\mathbf{R}^{(2)}, \mathbf{W}^{(2)}), \dots, (\mathbf{R}^{(Q)}, \mathbf{W}^{(Q)})\}$  を持つ. したがってサブ双対問題は, この端点集合の中から最適なものを選択する問題

$$\max_{(\mathbf{R}^{(p)}, \mathbf{W}^{(p)}) \in \mathcal{V}^*} Z_{\text{sub-D}}(\mathbf{R}^{(p)}, \mathbf{W}^{(p)}) = \left\{ \sum_{i \in \mathcal{K}} \hat{x}_i (R_i^{(p)} + LW_i^{(p)}) - \bar{S} \sum_{i \in \mathcal{K}} R_i^{(p)} \right\} \quad (11)$$

といえる.

### c) マスター問題

マスター問題は、サブ双対問題 [P<sub>sub-D</sub>] の解として得られる端点集合を与件として、新たな企業立地パターン  $\hat{x}$  を得る問題である。  $p$  回目繰り返しにおいて、サブ双対問題の解の集合である端点集合  $\mathcal{V}^{(p)} := \{(R^{(1)}, W^{(1)}), (R^{(2)}, W^{(2)}), \dots, (R^{(p)}, W^{(p)})\}$  を与えられたマスター問題は以下のような min-max 問題となる：

[P<sub>master</sub>]

$$\min_{\mathbf{x}} Z_{\text{master}}(\mathbf{x}) := - \sum_{i \in \mathcal{K}} A_i^{(q)} x_i + t \max_{(R^{(l)}, W^{(l)}) \in \mathcal{V}^{(p)}} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{K}} x_i (R_i^{(l)} + LW_i^{(l)}) - \bar{S} \sum_{i \in \mathcal{K}} R_i^{(l)} \right\} \quad (12a)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in \mathcal{K}} x_i = M \quad (12b)$$

$$x_i \leq \bar{S}, \quad \forall i \in \mathcal{K} \quad (12c)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{K} \quad (12d)$$

この問題は以下のような線形計画問題と等価である：

[P'<sub>master</sub>]

$$\min_{\mathbf{x}} Z_{\text{master}}(\mathbf{x}) := - \sum_{i \in \mathcal{K}} A_i^{(q)} x_i + \zeta \quad (13a)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in \mathcal{K}} x_i = M \quad (13b)$$

$$x_i \leq \bar{S}, \quad \forall i \in \mathcal{K} \quad (13c)$$

$$\zeta \geq t \left\{ \sum_{i \in \mathcal{K}} x_i (R_i^{(l)} + LW_i^{(l)}) - \bar{S} \sum_{i \in \mathcal{K}} R_i^{(l)} \right\} \quad \forall l = 1, \dots, p \quad (13d)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{K} \quad (13e)$$

サブ双対問題のすべての端点集合  $\mathcal{V}^*$  を与件としてマスター問題 [P'<sub>master</sub>] を解けば補助問題の解が得られるが、すべての端点集合を列挙することは現実的ではないため、端点を逐次生成しながらそのつどマスター問題を解く。すなわちサブ問題とマスター問題を交互に繰り返し解くことによって解を求める。

### d) 補助問題の解法

補助問題 [P2] を解くための手順は以下の通りである：

#### Step 0: 初期解

与件となる企業立地パターン  $m^{(q)}$  を用いてサブ問題を 1 回解くことにより、初期解  $(x^{(1)}, y^{(1)}, \mathcal{V}^{(1)} = (R^{(1)}, W^{(1)}))$  を得る。繰り返し回数  $p := 1$  とする。

#### Step 1: マスター問題

$\mathcal{V}^{(p)}$  を与件としてマスター問題 [P'<sub>master</sub>] を解き、新しい企業立地パターン  $x^{(p+1)}$  を求める。

#### Step 2: サブ問題

$x^{(p+1)}$  を与件としてサブ問題 [P<sub>sub-p</sub>] を解き、家

計の立地・通勤パターン  $y_{ij}^{(p+1)}$ 、地代  $R^{(p+1)}$  および賃金  $W^{(p+1)}$  を求める。またサブ双対問題の端点集合を  $\mathcal{V}^{(p+1)} := \mathcal{V}^{(p)} \cup \{(R^{(p+1)}, W^{(p+1)})\}$  と改める。

#### Step 3: 収束判定

以下の 2 つの条件のいずれかを満足したならば  $(x^{(p)}, y^{(p)})$  を最適解として終了する。そうでなければ  $p := p + 1$  として **Step 1** に戻る。

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} |x_i^{(p+1)} - x_i^{(p)}| < \epsilon \quad (\epsilon = 10^{-10}) \quad (14)$$

$$\zeta - Z_{\text{sub-p}}(y^{(p+1)}) \geq 0 \quad (15)$$

それぞれ、式 (14) は改訂によって企業立地パターンが変化していないこと、式 (15) はマスター問題の目的関数値が上限に達したことを意味する。

## 4. 提案手法

### (1) 概要

3. において、Benders 分解を用いて補助問題 [P2] をサブ問題 [P<sub>sub-p</sub>] とマスター問題 [P'<sub>master</sub>] に分解した。このうちサブ問題は未知変数のオーダーが  $K^2$  の Hitchcock 型輸送問題、マスター問題は未知変数のオーダーが  $K$  の線形計画問題である。つまり、サブ問題はマスター問題に比べて非常に大規模な問題になっている。FO モデルの効率的な解法を開発するためには、サブ問題をいかに効率的に解くかが鍵となることが分かる。

そこで本研究では、マスター問題は汎用の数値計画ソルバーを用いて解けばよいものと考え、サブ問題に的を絞って効率的な解法を提案する。具体的には、サブ問題を Hitchcock 型輸送問題として解く際に 3 つの工夫を加える。

### (2) サブ問題の解法

本研究では、サブ問題の解法として Sheffi<sup>5)</sup> による Hitchcock 型輸送問題の解法を利用する。Hitchcock 型輸送問題は図 1 のような 2 部グラフとよばれる形で表される多対多の線形マッチング問題である。サブ問題を Hitchcock 型輸送問題として見るには、制約条件 (9b)、(9c) について等号が成立する必要があるが、等号が成立しない場合であってもこれらはダミー企業  $\hat{x}_0 := \{S - (1 + L)M\}/L$  およびそれに通勤するダミー一家計  $\{y_{i0} : i \in \mathcal{K}\}$  を定義すれば以下のような等式制約に直すことができる：

$$\sum_{j \in \mathcal{K}} y_{ij} + y_{i0} = \bar{S} - \hat{x}_i, \quad \forall i \in \mathcal{K} \quad (9b')$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} y_{ij} = L\hat{x}_j, \quad \forall j \in (\mathcal{K} \cup \{0\}) \quad (9c')$$

なお、ダミー企業への通勤費用は 0 とする。以降は制約条件 (9b)、(9c) について等号が成立している、すなわち  $S = N + M$  が成立している場合について考える。

サブ問題を Hitchcock 型輸送問題として見ると、ある労働供給量  $\{O_i = \bar{S} - \hat{x}_i : i \in \mathcal{K}\}$  を持つ  $K$  個の家計ノード (起点) と、ある労働需要量  $\{D_j = L\hat{x}_j : j \in \mathcal{K}\}$  を持つ  $K$  個の企業ノード (終点) の間を結ぶ  $K^2$  本のリンクから、労働市場の需給制約を満たしつつ総通勤費用が最小となるように  $(2K - 1)$  本の基底リンクを選ぶ問題となる。

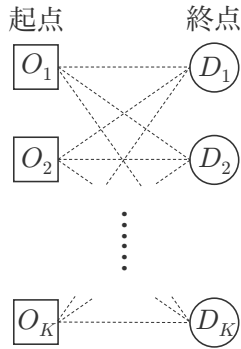


図-1: Hitchcock 型輸送問題としてサブ問題を表す 2 部グラフ

Sheffi の方法の各ステップは以下の通りである：

**Step 1: 初期解の生成**

労働市場の需給制約をすべてのノードにおいて満足するように起終点間のリンクを結び、初期解を生成する。初期解の生成方法は以下の通りである：

- 0) 労働市場の需給制約を満足しているノードを「飽和している」と表現する。飽和していない起点集合  $\mathcal{O} := \{1, \dots, K\}$ 、終点集合  $\mathcal{D} := \{1, \dots, K\}$  をとる。
- 1)  $\mathcal{O}, \mathcal{D}$  から任意に起終点を 1 組選ぶ。いずれかの集合が空集合である場合、終了する。この選び方として、代表的なものに北西隅法がある。これは、ノード番号の小さいものから順に選ぶというものであるが、効率性を度外視している。そこで本研究では「すべてのリンクをリンクコストの小さい順に並べ、それを順に見ていき、起終点ともに飽和していないならばそれを選ぶ」という方法をとっている。なおこの際、各地点が格子状に整然と並んでいるというモデルの特性から、すべてのリンクを列挙したり並べ替えたりする必要はなく、代わりに「隣人リスト」を用いることによって容易に実装できる。詳細は付録 II を参照。
- 2) 以下のルールに則って、選んだ起終点  $(i, j)$  の間のリンクを結び、このうちどちらか 1 つのノードを飽和させたのち、1) へ戻る：
  - (a)  $O_i < D_j$  ならば  $y_{ij} = O_i, O_i = 0, D_j := D_j - O_i$  とし、起点  $i$  を集合  $\mathcal{O}$  から取り除く

く (「飽和」とする)。

- (b)  $O_i \geq D_j$  ならば  $y_{ij} = D_j, O_i := O_i - D_j, D_j = 0$  とし、終点  $j$  を集合  $\mathcal{D}$  から取り除く。

**Step 2: ツリー化**

任意の終点ノード  $k$  を根とするツリーを構成する。2 部グラフからツリーを構成するには、根となるノードからつながっている基底リンクを順にたどって親子関係を結ばばよい。Step 1 の 2) (b) で  $O_i = D_j$  の場合に終点  $j$  を集合  $\mathcal{D}$  から取り除くことにしているため、Step 1 が終了した時点ですべての終点は飽和しており ( $\mathcal{D} = \emptyset$ )、起点はいくつか不飽和のものが残っている (ただし、いずれも労働供給量  $O_i = 0$  である)。この不飽和の起点ノード  $i \in \mathcal{O}$  について、まずはこれらを根とする部分木を構成する。そして部分木のうちノード  $k$  を含むものをノード  $k$  が根になるように変換し、ノード  $k$  を含まないものはノード  $i$  をノード  $k$  の子とする (リンク  $(i, k)$  を新たに基底リンクとする)。これによってすべてのノードがノード  $k$  を根とする全体木に含まれることになる。

また、根ノード  $k$  の賃金  $W_k = 0$  とし、

$$T_{ij} + R_i - W_j = 0 \tag{16}$$

を満たすように根から順に価格を定義する。式 (16) は、「各企業  $j$  は、そこに通勤する家計  $i$  の通勤距離  $T_{ij}$  と地代  $R_i$  の和に相当する分だけ賃金  $W_j$  を払う」ことを意味する。

**Step 3: 改善可能リンクの探索**

現時点でつながっていないすべてのリンクのうちから、

$$T_{ij} + R_i - W_j < 0 \tag{17}$$

を満たすリンク (改善可能リンク)  $(i, j)$  を探索する。式 (17) は、「家計  $i$  にとって、今の勤務先よりも都合のよい勤務先  $j$  が存在する」ことを意味する。改善可能リンクが存在する場合、これにフローを新たに流すことによって解を改善できるので、Step 4 に進む。存在しない場合、最適解が得られていることが保証されるので、終了する。

**Step 4: 解の改善**

2 部グラフ上またはツリー上で、改善可能リンク  $(i, j)$  を新たに基底としてつなげると、リンク  $(i, j)$  を含む高々 1 つの閉路 (closed loop) ができる。労働市場の需給制約を満たしたまま改善可能リンク  $(i, j)$  に新たにフローを流す (すなわち、 $y_{ij} > 0$  となるようにする) には、閉路をたどりつつ閉路上のフローを交互に増減させればよい。例えば、改善可能リンク  $(i, j)$  をつないだことにより、 $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow i$

という閉路ができたとする、リンクフロー  $y_{ij}, y_{kl}$  を増加させ、 $y_{kj}, y_{il}$  を減少させることによって解を改善できる。この閉路によって改善できる最大の改訂量は、減少するリンクフローの最大値、すなわちこの例の場合  $\max(y_{kj}, y_{il})$  となる。この量だけ閉路上のリンクフローを増減させると、必ずリンクフローが 0 となる基底リンクが 1 つ出現する。これを基底から削除することにより、基底リンクの本数は常に一定に保たれる。これらの操作が終わったら、Step 2 と同様にツリーをたどって価格を再定義したのち、Step 3 に戻り新たな改善可能リンクを探索する。

### (3) 超過労働需要の導入

ある地点  $i$  において、労働供給量  $O_i$  と労働需要量  $D_i$  がいずれも正である(企業と家計がどちらも立地している)とき、その地点内での通勤距離  $T_{ii}$  が 0 であることから、わざわざ他の地点の家計を通勤させたり、他の地点の企業に通勤したりする必要はなく、地点内で可能な限りの需給のマッチングを行えばよい。つまり、他の地点から見れば労働供給量または労働需要量の超過分のみが存在すると考えてよいことになる。

そこで、地点  $i$  の超過労働需要  $l_i$  を以下のように定義する。

$$l_i := D_i - O_i = (1 + L)\hat{x}_i - \bar{S} \quad (18)$$

$l_i$  の符号によって、正ならば地点  $i$  は終点(企業のみが立地)、負ならば起点(家計のみが立地)、0 ならば終点でも起点でもない(企業と家計が釣り合って飽和している)と見なすことができる。これにより、起点、終点がそれぞれ  $K$  個あったものが、起終点数の和が高々  $K$  個となり、ノード数を約半分に減らすことができる。これに伴って、全リンク数は高々  $K^2$  本  $\rightarrow (K/2)^2$  本、基底リンク数は高々  $(2K-1)$  本  $\rightarrow (K-1)$  本といずれも減少させることができる。

また、双対変数である価格  $(R, W)$  については、超過労働需要の導入によって 1 種類の変数  $P$  にまとめることができる。これは、地点内での通勤(通勤距離  $T_{ii} = 0$ )が行われるときに式(16)から  $R_i = W_i$  となることを利用したもので、地点  $i$  の価格  $P_i$  は以下のように定義される：

- (a)  $l_i > 0$  ならば  $P_i := W_i$
- (b)  $l_i < 0$  ならば  $P_i := R_i$
- (c)  $l_i = 0$  ならば  $P_i := \max_{j \in (j | l_j \neq 0)} (P_j - T_{ij})$

地点  $i$  の価格  $P_i$  は、企業立地のある地点ではその企業の賃金を表し、家計立地のある地点ではその家計の支払う地代を表す。

### (4) リンク探索範囲のブロック化による高速化

Sheffi の方法(2)節)の Step 3 で改善可能リンクを探索する際、本来の方法ではすべてのリンクを平等に候補として繰り返し探索を行う。これは汎用的ではあるものの、効率的ではない。そこで、最初は通勤距離が短いリンクのみを候補とし、徐々に探索範囲を広げていくという方法をとる。これには本来すべてのリンクを列挙し、リンクコストの小さい順にソートするという手順が必要であるが、(2)節の Step 1 で初期解を生成したときと同じように「隣人リスト」を用いてこれを実現できる。(隣人リストについては付録 II を参照)

隣人リストを用いると、あるノード  $i$  から  $r$  番目に近いノード  $j$  を  $i$  と  $r$  の関数として求めることができる。なおモデルの特性から、 $i, j$  間の距離  $T_{ij}$  は  $r$  が一定ならば  $i$  の値には依存しない。よって探索範囲を  $r_a (1 \leq r_a \leq K, a = 0, 1, 2, \dots)$  番目のノードまでに限定することで、実質的に探索半径を定めることになる。これを用いて改善可能リンクの探索方法を以下のように改める：

- 0)  $a := 1$  とし、 $r_1$  を比較的小きな値に設定する。 $(r_1 := 1$  など) また  $r_0 := 0$  とする。
- 1) 各ノードから  $\rho (= r_{a-1} + 1, r_{a-1} + 2, \dots, r_a)$  番目に近いノードを求め、それらのリンクについて改善可能かどうか式(17)を用いて判定する。改善可能ならば 2) に進み、改善不可能ならば 3) に進む。
- 2) 各ノードから  $\rho (= 1, 2, \dots, r_a)$  番目に近いノードとのリンクについて、改善不可能になるまで繰り返し解の改善を行う。改善不可能になったら 3) に進む。
- 3)  $r_a = K$  ならば終了(最適解が得られている)。 $r_a < K$  ならば、 $a := a + 1$  とし、 $r_a := \min(2r_{a-1}, K)$  などとして探索半径を増やしたのち、1)へ戻る。

## 5. 数値計算

### (1) 提案手法の効率性の評価

空間の解像度を変えることによりサブ問題を解く速度がどのように変化するかを明らかにし、また提案手法の効率性を評価するため、次の数値計算を行った。

以下の 3 つの方法を用いたプログラムを作成し、それぞれにおいて地点数  $K$  を変えながらサブ問題を 1 回解くためにかかった時間を比較した。なお、サブ問題を解くために必要な時間は、与件となる企業の立地  $\hat{x}$  に大きく依存する。ここでは、均衡パターンとして頻出であると考えられる一極集中パターン(図 2)について計算を行った。各企業の労働需要  $L = 1$  とした。

比較対象となる 3 つの方法を以下に示す：

- 提案手法を用いたもの
- 提案手法のうち、Sheffi の方法(2)節)のみを適用したもの

- 汎用の数理計画ソルバー Gurobi Optimizer で大規模な線形計画問題として解いたもの

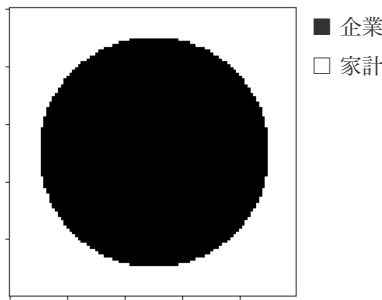


図-2: 一極集中パターン

計算結果を図 3 に示した。図 3 は横軸に地点数  $K$ ，縦軸に計算時間 [s] をとったグラフである。この結果から、計算時間は地点数  $K$  が増加するのに伴って急激に増加することが分かる。また、提案手法の計算時間は Gurobi Optimizer に比べると約 1/50，Sheffi の方法のみに場合に比べると約半分となり、提案手法によって高速化、効率化がなされていることが分かる。

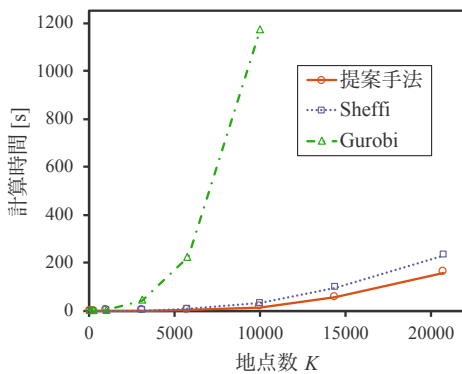


図-3: サブ問題を解くプログラムによる計算時間の比較

## (2) 解析解との比較

提案手法を用いてサブ問題を解くプログラムの正当性を確かめるため、サブ問題の目的関数 ((9a) 式) の解析解を近似によって求め、プログラムによって計算された値と比較した。

企業立地パターン  $\hat{x}$  が、図 2 のような一極集中パターンあるいは複数の円形の極が整然と立地する  $n$  極集中パターンである場合、家計  $i$  から企業  $j$  への通勤ベクトル  $\vec{ij}$  がすべて極の中心を向いているものと近似すると、サブ問題の目的関数値  $Z_{\text{sub-P}}$  は次式から求められる (詳細は付録 III を参照)：

$$Z_{\text{sub-P}} = \frac{1}{6\sqrt{n}} \left\{ \sqrt{2} + \frac{\log(3 + 2\sqrt{2})}{2} - \frac{4}{\sqrt{\pi(L+1)}} \right\} \quad (19)$$

ただし、 $n = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$  は極の数を表す。

これを用いて計算した理論値 (近似値) とプログラムによる計算値を比較した。地点数  $K = 10^4$  とし、与件となる企業立地パターン  $\hat{x}$  は図 4 のような  $n$  極集中パターン ( $n = 1, 2, 4, 8, 16$ ) とした。各企業の労働需要  $L = 1$  とした。

計算結果を表 1 に示した。この結果から、理論値と計算値の誤差はいずれも小さく、実装したプログラムによってある程度正当性のある結果が得られていることが分かった。

表-1: サブ目的関数値の計算値と理論値の比較 ( $n$  極集中パターン)

n	計算値	理論値	誤差 [%]
1	0.11766	0.11664	0.874
2	0.08317	0.08247	0.849
4	0.05884	0.05832	0.892
8	0.04161	0.04124	0.897
16	0.02958	0.02916	1.440

## (3) 計算例：均衡解への収束パターン

全体の問題 [P1] を解くプログラムについても、その正当性と効率性を評価するため、計算実験を行った。地点数  $K = 10^4$ ，初期企業立地パターン  $m^{(0)}$  はランダムとした。また各パラメータについては、交流費用パラメータ  $\tau = 1$ ，通勤費用パラメータ  $t = 10^{-4}$ ，各企業の労働需要  $L = 3$  とした。

均衡解への収束パターンを図 5 に示した。均衡解を得るまでにかかった計算時間は 126.8 s であった。図 5 を見ると、ランダムであった企業立地が集積して歪な 1 つの塊になり、最終的には均衡解としてほぼ正円の形状になっている。通勤費用パラメータ  $t$  として  $10^{-4}$  と非常に小さい値をとっていることから、この計算条件では通勤費用に比べて交流利潤がきわめて支配的になっている。よって各企業は可能な限り集積しようとし、円形の極が形成されたものと考えられる。このように理論通りの結果が得られたことから、全体の問題 [P1] を解くプログラムについてもある程度の正当性が担保できると考える。また、現実的な時間内で大規模 ( $O(K^2 = 10^8)$ ) かつ非線形の問題 [P1] を解くことができていることから、効率性も十分実用的な水準に達しているといえる。

## 6. 結論

本研究では、集積経済を考慮した家計と企業の立地均衡モデル (Fujita and Ogawa<sup>1)</sup> (FO モデル) の二次元空

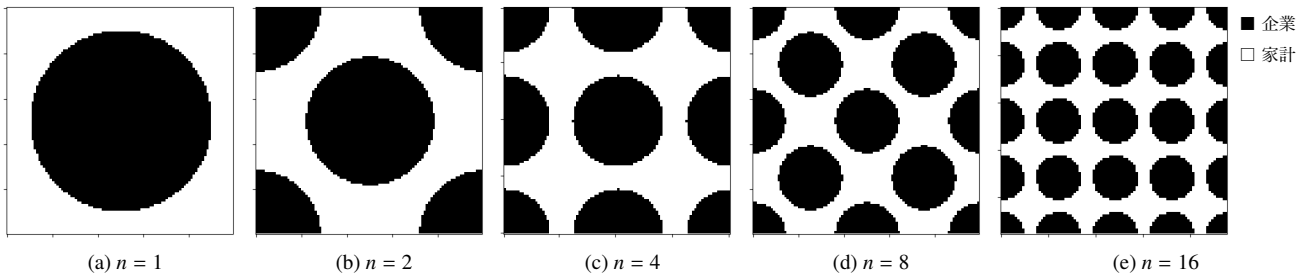


図-4:  $n$  極集中パターン

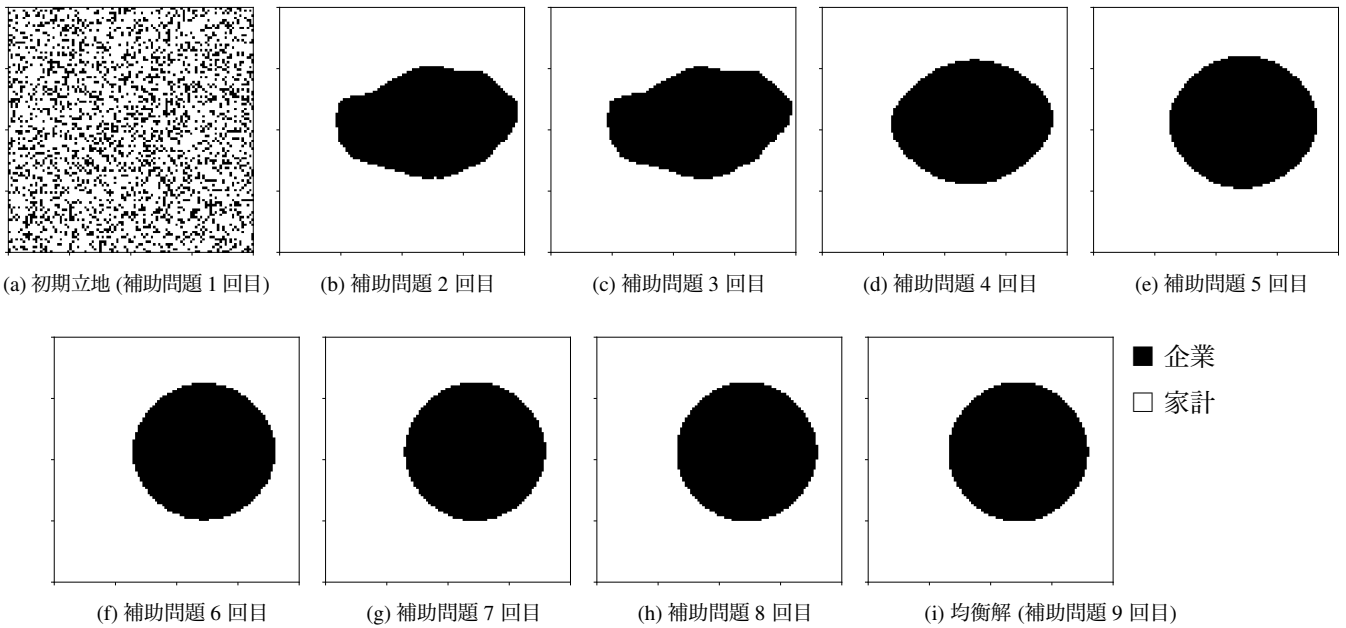


図-5: 均衡解への収束パターン例

間における均衡解を効率的に求める手法を開発した。

まず、秋本<sup>2)</sup>による次のような既存解法を整理した。FO モデルの等価最適化問題 [P1] は非凸の非線形計画問題であるので、これに Frank-Wolfe 法を適用することにより、大規模な線形計画問題 [P2] を繰り返し解く問題に置き換えた。さらに、この問題 [P2] に Benders 分解<sup>3)</sup> を適用することにより、これをマスター問題  $[P_{\text{master}}](O(K))$  とサブ問題  $[P_{\text{sub-p}}](O(K^2))$  を交互に繰り返し解く問題へと置き換えた。

また提案手法として、より大規模な問題であるサブ問題  $[P_{\text{sub-p}}]$  を効率的に解くために 3 つの工夫を加えた。まず、サブ問題が Hitchcock 型輸送問題であることを利用し、Sheffi<sup>5)</sup> による Hitchcock 型輸送問題の解法をサブ問題の解法として用いた。次に、モデルの構造を活用してより効率的にサブ問題を解くため、超過労働需要を導入し、加えてリンク探索範囲の限定を行った。

さらに、数値計算によって提案手法には十分な効率

性、正当性があることを明らかにした。

今後の課題としては、実際の都市のデータを入れて新たな交通施策や都市計画に使えるようにすることや、各パラメータを様々に変えて実験を行うことで均衡パターンとしてどのような都市構造が得られるのかを明らかにすることが挙げられる。

## 付録 I Frank-Wolfe 法のステップ・サイズ

Frank-Wolfe 法 ((1) 節) の Step 2 における最適なステップ・サイズ  $\alpha$  は解析的に求められる。まず、式 (7) をもとの問題の目的関数 (4) に代入すると、 $\alpha$  を変数とした目的関数：

$$g(\alpha) := -\frac{1}{2}m(\alpha)^\top Dm(\alpha) + tT^\top n(\alpha) \quad (I.1)$$



を得る.  $g$  の  $\alpha$  についての 1 階微分, 2 階微分は,

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= -\mathbf{m}(\alpha)^\top \mathbf{D} \mathbf{m}'(\alpha) + t \mathbf{T}^\top \mathbf{n}'(\alpha) \\ &= -(\mathbf{x}^{(q)} - \mathbf{m}^{(q)})^\top \mathbf{D} \left( (1 - \alpha) \mathbf{m}^{(q)} + \alpha \mathbf{x}^{(q)} \right) \\ &\quad + t \mathbf{T}^\top (\mathbf{y}^{(q)} - \mathbf{n}^{(q)}) \\ &= (1 - \alpha) \mathbf{m}^{(q)\top} \mathbf{D} \mathbf{m}^{(q)} - (1 - 2\alpha) \mathbf{m}^{(q)\top} \mathbf{D} \mathbf{x}^{(q)} \\ &\quad - \alpha \mathbf{x}^{(q)\top} \mathbf{D} \mathbf{x}^{(q)} + t \mathbf{T}^\top (\mathbf{y}^{(q)} - \mathbf{n}^{(q)}), \quad (\text{I.2}) \end{aligned}$$

$$g''(\alpha) = -(\mathbf{x}^{(q)} - \mathbf{m}^{(q)})^\top \mathbf{D} (\mathbf{x}^{(q)} - \mathbf{m}^{(q)}) \quad (\text{I.3})$$

となる.

(I.3) 式より  $g''(\alpha) \leq 0$  (等号が成立するのは  $\mathbf{m}^{(q)} = \mathbf{x}^{(q)}$  のときのみ) である. すなわち,  $g'(\alpha = 0) < 0$  となるように解の改訂方向  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  をとれば,  $g(\alpha)$  は  $\alpha \in [0, 1]$  について単調減少となる. このことは, 最適なステップ・サイズ  $\alpha$  が常に 1 となることに他ならない.

## 付録 II 隣人リスト

(2) 節や (4) 節で, すべてのリンクをリンクコストが小さい順に探索するというプロセスがあるが, 前述したようにモデルの特性を利用し, 「隣人リスト」を作ることですべてのリンクを列挙したり, 並べ替えたりすることなくこれを実現できる.

例として, 図 6 のように  $X$  方向に  $K_1 = 3$  個,  $Y$  方向に  $K_2 = 3$  個の  $K = K_1 K_2 = 9$  地点からなる正方形格子型の都市を考える. 周期境界条件を仮定しているのだから, たとえばノード 3 とノード 5 は隣り合っている. 各地点のノード番号  $i$  と座標  $(X_i, Y_i)$  を図 6 のように定めると,  $i$  から  $(X_i, Y_i)$  を, また  $(X_i, Y_i)$  から  $i$  を次のように求めることができる:

$$X_i = i \bmod K_1 \quad Y_i = \left\lfloor \frac{i}{K_1} \right\rfloor \quad i = K_1 Y_i + X_i \quad (\text{II.1})$$

ここで, 基準となるノード 0 から近い順にすべてのノードを並べたものを「隣人リスト」と呼ぶ. 隣人リストの  $r$  番目の要素, すなわちノード 0 から  $r$  番目に近いノードを  $\delta_r$  で表す. 図 6 のモデルの場合, ノード 0 を基準とした隣人リスト  $\delta$  は,  $\delta = \{0, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 7, 8\}$  となる.

隣人リストおよび式 (II.1) を用いると, 任意のノード  $i$  から  $r$  番目に近いノード  $j$  を求めることができる. これは, モデルの構造から次式が成り立つことを利用したものである:

$$\vec{ij} = \vec{0}\delta_r \quad (\text{II.2})$$

この式は

$$\begin{aligned} (X_j, Y_j) - (X_i, Y_i) &= (X_{\delta_r}, Y_{\delta_r}) - (X_0, Y_0) \\ (X_j, Y_j) &= (X_i, Y_i) - (X_{\delta_r}, Y_{\delta_r}) - (0, 0) \\ &= \left( i \bmod K_1, \left\lfloor \frac{i}{K_1} \right\rfloor \right) - \left( \delta_r \bmod K_1, \left\lfloor \frac{\delta_r}{K_1} \right\rfloor \right) \quad (\text{II.3}) \end{aligned}$$

と変形できるから,  $j$  の値は以下の式から求められる:

$$\begin{aligned} j &= K_1 Y_j + X_j \\ &= K_1 \left( \left\lfloor \frac{i}{K_1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\delta_r}{K_1} \right\rfloor \right) + (i \bmod K_1 - \delta_r \bmod K_1) \quad (\text{II.4}) \end{aligned}$$

$\delta_r$  は隣人リストから参照できるので,  $i, r$  の値を (II.4) 式に代入すれば容易に  $j$  の値を求められる. これにより,  $r = 1, 2, \dots, K$  についてリンク  $(i, j)$  を順に求めていくことでリンクコストの小さい順に探索を行うことができる.

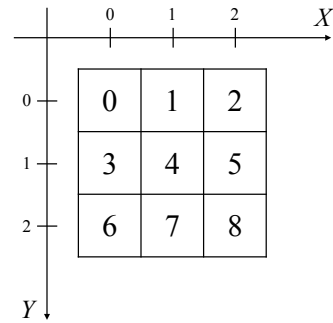


図-6: 格子状都市の例

## 付録 III 近似解析解の導出

$n$  極集中パターンでは, 各家計は最も近くにある企業極内に通勤するので, 図 7 のように正方形に通勤圏が分けられる. 通勤圏の 1 辺の長さを  $\gamma$  とすると,  $\gamma = 1/\sqrt{n}$  ( $n = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$ ) が成り立つ. また企業極の半径を  $r_1$  とし,  $S = N + M$  を仮定すると,  $N = LM$  より,

$$\pi r_1^2 = \gamma^2 \frac{1}{L+1} \quad (\text{III.1})$$

が成り立つ. この条件において, サブ問題の目的関数値  $Z_{\text{sub-P}}$  の近似解析解を導出する.

まず, 図 7 のように極の 1/4 の部分のみ考え,  $r$  軸を図 7 のようにとる. 円  $r = R$  と正方形 OABC の交点からなる弧 PQ の長さを  $f(R)$  と表すことにすると,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi r & \left( 0 \leq r \leq \frac{\gamma}{2} \right) \\ \left\{ \frac{1}{2} \pi - 2 \cos^{-1} \left( \frac{\gamma}{2r} \right) \right\} r & \left( \frac{\gamma}{2} \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

となる.

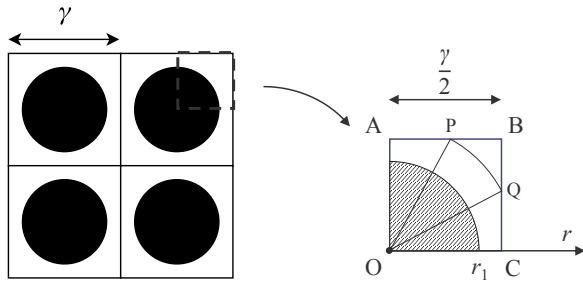


図-7: 近似解析解の導出

ここで、家計  $i$  から企業  $j$  への通勤ベクトル  $\vec{ij}$  がすべて極の中心を向いているものと近似すると、「いったんすべての家計が原点  $O$  に通勤したのち、 $L$  人ずつ負の通勤費用で四分円  $r = r_1$  内に散らばる」と考えることで総通勤費用の近似解析解を求めることができる。すなわち総通勤費用は「正方形  $OABC$  内の全家計が原点  $O$  に通勤する費用」から「四分円  $r = r_1$  内に家計が立地していると仮定した場合にその家計が原点  $O$  に通勤する費用の  $L$  倍」を引いたものになる。全体の都市モデルには正方形  $OABC$  と同じ形状のものが  $4n$  個存在することを考慮すると、サブ問題の目的関数値は次のように求められる：

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{sub-P}} &= 4n \left\{ \int_{r_1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma} f(r)rdr - L \int_0^{r_1} f(r)rdr \right\} \\
 &= 4n \left\{ \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma} f(r)rdr - (L+1) \int_0^{r_1} f(r)rdr \right\} \\
 &= 4n \left\{ \left[ \frac{\pi}{6} r^3 - \frac{2}{3} \cos^{-1} \left( \frac{\gamma}{2r} \right) \gamma^3 + \frac{1}{6} \gamma r \sqrt{r^2 - \frac{\gamma^2}{4}} + \frac{\gamma^3}{48} \log \left| \frac{r + \sqrt{r^2 - \gamma^2/4}}{r - \sqrt{r^2 - \gamma^2/4}} \right| \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma} - (L+1) \left[ \frac{\pi}{6} r^3 \right]_0^{r_1} \right\} \\
 &= 4n \left\{ \frac{\sqrt{2}}{24} \pi \gamma^3 - \frac{\sqrt{2}}{6} \cos^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \gamma^3 + \frac{\sqrt{2}}{24} \gamma^3 + \frac{\gamma^3}{48} \log \left| \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right| - \frac{\pi(L+1)}{6} r_1^3 \right\} \\
 &= \frac{n}{6} \left\{ \sqrt{2} \pi \gamma^3 - \sqrt{2} \pi \gamma^3 + \sqrt{2} \gamma^3 + \frac{1}{2} \log(3+2\sqrt{2}) \gamma^3 - 4\pi(L+1) \left( \frac{1}{\pi(L+1)} \right)^{\frac{3}{2}} \gamma^3 \right\} \\
 &= \frac{1}{6\sqrt{n}} \left\{ \sqrt{2} + \frac{\log(3+2\sqrt{2})}{2} - \frac{4}{\sqrt{\pi(L+1)}} \right\} \tag{III.3}
 \end{aligned}$$

参考文献

- 1) Fujita, M. and Ogawa, H., Multiple equilibria and structural transition of non-monocentric urban configurations, *Regional Science and Urban Economics*, vol. 12, pp. 161-196, 1982.
- 2) 秋本 克哉, 二次元空間 Fujita and Ogawa (1982) モデルの数値解法の開発, 土木計画学研究・講演集 56, 011, 2017.
- 3) J.F. Benders, Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems, *Numerische Mathematik*, vol.4, pp. 238-252, 1962.
- 4) D. R. Fulkerson, Hitchcock transportation problem, *RAND Res. Rep.* P-890, 1956.
- 5) Sheffi, Y., *Urban transportation networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, New Jersey: Prentice Hall, 1985.
- 6) 佐々木 公明, 文 世一, 都市経済学の基礎, 有斐閣, 2000.
- 7) 佐藤 泰裕, 田淵 隆俊, 山本 和博, 空間経済学, 有斐閣, 2011.
- 8) 刀根 薫, 数理計画, 朝倉書店, 2007.

(2019. 3. 9 受付)

AN EFFICIENT SOLUTION METHOD FOR LARGE-SCALE FUJITA AND OGAWA(1982) MODELS

Ren SHIMIZU and Takeshi NAGAE