確率的交通容量を考慮した BPR関数のパラメータ推定

加藤 哲平[1]・内田 賢悦[2]・峪 龍一[3]

[1]正会員 埼玉大学大学院 理工学研究科（〒338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保255）
E-mail:tkato@mail.saitama-u.ac.jp

[2]正会員 北海道大学大学院 北方圏環境政策工学部門（〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目）
E-mail: uchida@eng.hokudai.ac.jp

[3]学生会員 北海道大学大学院 北方圏環境政策工学部門（〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目）
E-mail: ryuichitani@eis.hokudai.ac.jp

本研究では，交通容量の確率的変動を考慮した，均衡配分モデルにおけるBPR関数のパラメータ推定手法を提案する．BPR関数の推定には，移動時間と交通量のデータを用いることが考えられる．しかし，直接観測することのできない確率的な交通容量を想定した場合，ある交通量に対して生起する移動時間が確率的に変動する．本研究では，対数正規分布に従う確率的交通容量を仮定することで，ある交通量に対して生起する移動時間の確率分布を解析的に表現する．ネットワーク上の観測データから，対数正規分布に従う確率的交通容量の推定手法を既存研究で提案された手法を応用することで求める．求められた確率的交通容量によって移動時間の確率分布を解析的に求め，交通容量の不確実性を考慮したBPR関数の推定を行う．

Key Words : *BPR function, stochastic capacity*

1. 背景と目的

交通量予測の手法として利用者均衡配分が広く用いられている．利用者均衡配分は，定常的な交通流を仮定した静的均衡配分と，交通流の経時的な変化を考慮した動的均衡配分に分類され，これまで多くの研究がなされている．動的均衡配分は，渋滞現象などの混雑現象を記述可能である．しかし，計算負荷や解の一意性・収束性等，実務レベルでの適用には問題が残されている．一方，静的均衡配分は動的均衡配分に比べて簡単な問題構造をとるため，実務レベルでは静的均衡配分による交通量・移動時間の推定が広く用いられている．

静的均衡配分は渋滞現象を記述できないが，交通量を変数に持つ移動時間関数を用いて，混雑現象を表現する．移動時間関数に基づき，すべての経路移動時間が均衡する状態を再現する交通量が算出される．したがって，精度の高い交通量推定を行うためには，移動時間関数のパラメータを適切に設定する必要がある．

溝上ら[1]は，移動時間関数として広く用いられているBPR関数の推定を行っている．この研究では，ある時間帯において移動時間が正規分布に従うと仮定し，その時間帯に観測された移動時間と交通量を用いてパラメータ推定を行っている．ただし，ある時間帯における移動時間が確率分布する変動要因などは特定していない．BPR関数において移動時間を決定する要因は，自由移動時間・交通量・交通容量である．上記の手法では，自由移動時間が正規分布するような想定を行っていると解釈することもできる．移動時間の不確実性を考慮した均衡配分モデルとして，確率均衡配分モデル[2]が提案されている．確率均衡配分モデルでは，交通量，交通容量，経路選択の不確実性によってネットワーク上の移動時間の不確実性を表現する．こうした研究の中で，BPR関数などの移動時間関数に確率的な交通量や交通容量を直接導入し，Taylar 展開等を用いて移動時間の不確実性を解析的に表現する手法が用いられることが多い(例えば Clark & Watling[3], Lam et al.[4]など).

上記のモデルと同様に，移動時間の不確実性要因を明示的に考慮したうえで BPR 関数の推定を行うことにより，推定精度が高まることが考えられる．このために，まずは移動時間の不確実性要因の確率分布をネットワー

ク上の観測データから推定する必要がある．本研究では特に交通容量の不確実性を考える．交通容量の不確実性を推定した研究として内田[5]は，追従モデルから導出されるマクロ交通流モデルを用いて交通容量の不確実性を推定する手法を提案している．また，推定された q-v 曲線の非混雑流部分と，BPR 関数の差を最小化する問題を解くことで BPR 関数のパラメータ推定を行っている．本研究ではこの手法を応用し，対数正規分布に従う確率的交通容量の推定をまず行う．

交通容量が不確実性を持つ場合，観測された移動時間は，確率的に生起した交通容量が反映されていると考えられる．ただし，ネットワーク上で確率的な交通容量を直接観測することは難しい．このため，移動時間と交通量の観測データのみを用いて BPR 関数の推定が行われる．交通容量の確率分布が既知であれば，ある交通量に対して BPR 関数によって計算される移動時間の確率分布が求められると考えられる．本研究では，この確率分布と観測データを用いて BPR 関数の推定を行う手法を提案する．この手法は，先述した内田[5]が提案した BPR 関数の推定手法とは異なる点に注意したい．

2. 仮定

本研究では，移動速度が対数正規分布すると仮定する．本研究では解析的にBPR関数の推定を行うため，このような仮定を設けている．対数正規分布は，その対数をとることで正規分布になる．以降では，対数正規分布を対数変換してできる正規分布の平均，分散・共分散の事をそれぞれ平均パラメータ，分散・共分散パラメータと呼ぶ．（対数正規分布自体の平均，分散・共分散はそのまま呼称する）また，対数正規分布は平均パラメータと分散・共分散パラメータによって記述するものとする．

内田[5]では，交通容量の不確実性要因として以下の二つ要因を想定していた．

- 追従行動に影響を及ぼすが，追従方程式において表現されていないパラメータがあること（以降ではこれを要因 εと表現し，それによる交通容量変動の分散パラメータをσ_ε^2と表現する）
- 追従方程式において表現されているパラメータ自体が確率変数になっていること（以降ではこれを要因 pと表現し，それによる交通容量変動の分散パラメータをσ_p^2と表現する）

これらの不確実性はそれぞれ対数正規分布によって表現され，相関を持つと仮定する．この二つの対数正規分布の共分散パラメータを$\sigma_{\varepsilon,p}$とする．また，内田[5]と同様に交通容量の確率変数は，上記の二つの確率変数の線形和で近似的に表現されるものとする．したがって，確率的交通容量は，互いに相関を持つ対数正規分布の和で表現される．峪ら[6]は，交通量と交通容量が対数正規分布する場合の確率均衡配分モデルを定式化している．このモデルの中で，経路移動時間は互いに相関を持つ対数正規分布の和で表現されている．また，相関を持つ対数正規分布の和を対数正規分布として近似し，その分散をAbu-Dayya & Beaulieu[7]による手法を用いて算出している．本研究でも，この手法を用いて確率的交通容量の分散を求める．この時，交通容量の分散は以下のように表現される．

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(C) &= 2\exp\left(2\mu_\varepsilon + 2\sigma_\varepsilon^2\right) + 2\exp\left(2\mu_p + 2\sigma_p^2\right) \\ &\quad + \exp\left\{\mu_\varepsilon + \mu_p + \frac{1}{2}\left(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_p^2 + 2\sigma_{\varepsilon,p}\right)\right\} \\ &\quad - \exp\left(2\mu_\varepsilon + \sigma_\varepsilon^2\right) - \exp\left(2\mu_p + \sigma_p^2\right)\end{aligned} \tag{1}$$

3. 確率的交通容量の推定

3.1 確率的パラメーラによる交通容量の変動

本研究では，空間移動速度の対数をとることで得られる正規分布のパラメータを推定するような手順で確率的交通容量の推定を行う．つまり，マクロ交通流モデルを対数変換したモデルに対して，内田[5]で提案された手法を適用することで，交通容量の不確実性を推定する．内田[5]では，観測される移動速度と交通密度を用いた最小二乗法によってマクロ交通流モデルが推定されている．つまり，観測される移動速度はマクロ交通流モデルから計算される値を中心とした正規分布からランダムサンプリングされていると想定している．また，推定される移動時間と観測値の二乗誤差を回帰による分散の推定値としている．

内田[5]と同様に追従モデルの一般形であるGMモデルから導出される以下のk-v式を考える．

$$v(k) = v_f \cdot \left\{1 - \left(\frac{k}{k^j}\right)^{l-1}\right\}^{\frac{1}{1-m}} \tag{2}$$

ここで，v, v_f, k, k_jはそれぞれ空間速度，自由走行速度，交通密度，飽和交通密度を表す．l, mはパラメータである．内田[5]ではk_jを定数，v_f, l, m を推定するパラメータとしているが，簡単のため，本研究ではv_f, k_jを定数とし，l, m を推定するパラメータとする．交通流観測によって速度・密度・交通量（交通流率）のデータセットがn個あるものとし，i 番目のデータセットを(v^i, k^i, q^i)とする．v^iは以下に示す確率変数V^iからランダムサンプリングされたものと仮定する．

$$V^i \sim LN\left(v\left(k^i\right), \sigma^2\right) \tag{3}$$

ここで，$\mathrm{cov}(V^i, V^j) = 0\,(i \neq j)$とする．$k$-$v$ 曲線の推定は，速

度を対数変換したものに対する最小二乗法によって行う．したがって，ここでは最小二乗法による推定誤差σ^2を分散パラメータに持つ対数正規分布によってV^iを表現している．σ^2の推定値$\hat{\sigma}^2$は，最小二乗法で推定されたパラメータとk^iを式(3)に代入して得られる$v(k^i)$と，観測値v^iをそれぞれ対数変換した値の二乗誤差で与える．したがって，上述した最小二乗法によって，k-v 曲線の各パラメータと$\hat{\sigma}^2$が推定され，確率的空間速度は以下の対数正規分布で与えられる．

$$V(k) \sim LN\left(v(k), \hat{\sigma}^2\right) \tag{4}$$

交通量保存則を用いると，式(3)で示されたk-v 曲線から交通量 q と平均速度の関係を表すq-v 曲線が与えられる．ここで，q-v 曲線によって平均交通量が与えられると仮定する．確率的交通容量の平均値 c_εは，交通量を最大化するような臨界速度 v_0をq-v曲線に代入することで与えられる．また，確率的交通容量の平均において，臨界密度 k_0は c_εをv_0で除すことで与えられる．

$$V\left(k^0\right) \sim LN\left(v\left(k^0\right), \hat{\sigma}^2\right) = LN\left(v^0, \hat{\sigma}^2\right) \tag{5}$$

交通量保存則より，上記の確率的臨界速度と臨界密度 k_0の積によって確率的交通容量を導出することが出来る．したがって，交通容量は以下の対数正規分布に従う．

$$C_\varepsilon \sim LN\left(\ln k^0 + c_\varepsilon, \hat{\sigma}^2\right) \tag{6}$$

3.2 確率的パラメータによる交通容量の変動

次に，要因pによる交通容量の変動を考える．前節では，k-v 曲線を対数変換した関数を最小二乗法で推定していた．したがって，対数変換したこの関数において，推定されたパラメータは確率変数の期待値であると考えられる．ここで，k-v 曲線を対数変換した関数において，パラメータl, mが多変量正規分布するような場合を考える．この多変量正規分布の分散・共分散を推定することで，要因pによる交通容量の変動を推定する．k-v曲線を対数変換した関数を各パラメータに関して偏微分したものは，それぞれ以下で与えられる．

$$\frac{\partial \ln(v)}{\partial l} = \frac{\ln\left(\dfrac{k}{k^j}\right)}{(1-m)\cdot\left\{\left(\dfrac{k}{k^j}\right)^{l-1} - 1\right\}} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \ln(v)}{\partial m} = \frac{\ln\left(1-\left(\dfrac{k}{k^j}\right)^{1-l}\right)}{(1-m)^2} \tag{8}$$

式(7)-(8)において$k = k^i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$としたものを各列に持つ($n$×2)列の行列を$\mathbf{Z}$とする．この時，$k$-$v$ 曲線を対数変換した関数において，パラメータの分散共分散行列$\boldsymbol{P}$は以下のように推定される．（この推定手法に関する詳細な議論は内田[5]を参照頂きたい．）

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sigma_l^2 & \sigma_{l,m} \\ \sigma_{l,m} & \sigma_m^2 \end{pmatrix} = \left(Z^T Z\right)\cdot\hat{\sigma}^2 \tag{9}$$

ここで上付きのTは行列の転置操作を表す演算子である．次に，交通容量を対数変換した値を考える．交通容量は対数正規分布に従うと仮定されているため，対数変換した交通容量で正規分布に従う．この正規分布の分散は式(9)の行列を用いることで以下のように表される．

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{\delta}^T\left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\boldsymbol{\delta}\cdot\hat{\sigma}^2 = s^2\cdot\hat{\sigma}^2 \tag{10}$$

where

$$\boldsymbol{\delta} = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \ln(q)}{\partial l} & \dfrac{\partial \ln(q)}{\partial m} \end{pmatrix}\right|_{v=v^0, l=\hat{l}, m=\hat{m}} \tag{11}$$

繰り返しになるが，本研究ではv及びqを対数変換した値が正規分布に従うと仮定している．その正規分布の平均，分散・共分散を最小二乗法を用いて推定している．さらに，その分散・共分散を推定する手法として内田[5]の手法を用いている．式(11)における各行はそれぞれ以下で与えられる．

$$\frac{\partial \ln(q)}{\partial l} = \frac{-\ln\left(1-\left(\dfrac{v}{v^f}\right)^{1-m}\right)}{(l-1)^2} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \ln(q)}{\partial m} = \frac{\ln\left(\dfrac{v}{v^f}\right)}{(l-1)\cdot\left\{\left(\dfrac{v}{v^f}\right)^{m-1} - 1\right\}} \tag{13}$$

3.3 確率的交通容量の変動

ここまでで要因ε, pによる交通容量の確率変動が求められた．次に，この二つの確率変動の相関を求めたい．これら二つの確率変動はそれぞれ，対数正規分布しており，その平均パラメータは一致している．また，どちらも分散パラメータが推定されている．上記の二つの確率分布をそれぞれ対数変換することで得られる正規分布の共分散を考える．内田[5]で示された方法を用いると，この共分散$\sigma_{\varepsilon,p}$は以下のように与えられる．

$$\sigma_{\varepsilon,p} = s\cdot\hat{\sigma}^2 \tag{14}$$

前章で示した通り，要因ε, p両方を考慮した確率的交通容量は対数正規分布に従うと仮定している．この対数正規分布の分散はAbu-Dayya & Beaulieu[7]の手法を用いて以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(C) &= 2\exp\left(2\ln\left(k^0\right)+2c_\varepsilon+2\hat{\sigma}_\varepsilon\right)\\ &+2\exp\left(2\ln\left(k^0\right)+2c_\varepsilon+2s^2\cdot\hat{\sigma}_\varepsilon\right)\\ &+\exp\left\{4\ln\left(k^0\right)+4c_\varepsilon+\frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}_\varepsilon+s^2\cdot\hat{\sigma}_\varepsilon+s\cdot\hat{\sigma}_\varepsilon\right)\right\}\\ &-\exp\left(2\ln\left(k^0\right)+2c_\varepsilon+\hat{\sigma}_\varepsilon\right)\\ &-\exp\left(2\ln\left(k^0\right)+2c_\varepsilon+s^2\cdot\hat{\sigma}_\varepsilon\right)\end{aligned} \tag{15}$$

また，確率的交通容量の平均 パラメータは$\ln k^0+c_\varepsilon$ である．式(15)から，確率的交通容量の平均パラメータμ_c，分散パラメータσ_c^2が以下のように与えられる．

$$\mu_c=\ln\left\{E(C)\right\}-\frac{1}{2}\cdot\ln\left\{1+\frac{\mathrm{var}(C)}{E(C)^2}\right\} \tag{16}$$

$$\sigma^2=\ln\left\{1+\frac{\mathrm{var}(C)}{E(C)^2}\right\} \tag{17}$$

内田[5]では，交通容量のリンク間相関を求めていたが，本研究では簡単のため，リンク間相関を考えない．つまり，確率的交通容量は各リンクで独立であると仮定する．なお，ここまで示した確率変数のパラメータを用いて計算することは可能である．

4. BPR関数の推定

BPR関数は以下に示されるような関数である．

$$t_a=\frac{d_a}{v_f}\cdot\left(1+\alpha\cdot\left(\frac{q_a}{c_a}\right)^\beta\right) \tag{18}$$

ここで，d_aはリンク長を表し，α, βはそれぞれパラメータを表す．本稿ではパラメータα, βを推定する手法を示す．また，一般的にはここで用いられるリンク交通量q_a，リンク交通容量c_aにはそれぞれの平均値を用いる．確率均衡配分モデルでは，q_aとc_aに確率変数を直接代入し，テーラー展開などを用いて移動時間の不確実性を解析的に導出する．本研究でも同様に考え，c_aに確率的交通容量を表す確率変数をそのまま代入する．

前節で述べた通り，BPR関数に含まれる変数のうち，空間移動速度と交通密度が観測可能であると想定している．速度を用いれば移動時間が求まり，交通量保存則を用いると，交通量も得ることが出来る．つまり，BPR関数の推定に対して，移動時間と交通量の観測がなされていると考えることが出来る．ただし，BPR関数は非混雑状態における移動時間を表す関数であるため，混雑が発生している時点の観測値は，BPR関数の推定には用いない．

交通容量は直接観測することが出来ないが，前節より，その確率分布が推定されている．つまり，ある移動時間と交通量が観測されたときに，生起している交通容量は観測出来ないが，その生起確率は推定されているような状況である．したがって，推定された交通容量の生起確率によって，ある交通量に対して生起する移動時間の確率分布が分かる．確率的交通容量は対数正規分布に従うため，ある交通量に対して生起する移動時間の確率分布も対数正規分布で表される．BPR関数の両辺から自由移動時間を引き，対数をとると，以下のようになる．

$$\ln\left(t_a-\frac{d_a}{v_f}\right)=\ln(\alpha)+\beta\cdot\left\{\ln\left(q_a\right)-\ln\left(C_a\right)\right\} \tag{19}$$

式(17)の右辺は以下の正規分布に従う．

$$\ln\left(t_a-\frac{d_a}{v_f}\right)\sim LN\left(\mu,\sigma^2\right) \tag{20}$$

where

$$\mu=\ln(\alpha)+\beta\cdot\left\{\left\{\ln\left(q_a\right)-\mu_c\right\}\right\} \tag{21}$$

$$\sigma^2=\beta^2\cdot\sigma_c^2 \tag{22}$$

上記のパラメータから式(20)の確率分布が解析的に求められる．したがって，観測データを生起させる確率が最も高くなるα, βを推定することが出来る．

5. 数値計算例

テストネットワークを対象とした数値計算例を発表時に示す．具体的には，本研究で推定しているk-v曲線あるいはBPR関数の真値を決め，確率的交通容量の真の分布からランダムサンプリングを行い，生起する移動時間を生成する．生成したサンプルを用いて本研究で示した推定手法を適用し，確率的交通容量とBPR関数の推定を行う．

6. まとめ

本研究では，確率的交通容量を考慮したBPR関数の推定手法を提案した．既存の手法では，移動時間の不確実性要因を特定せず，任意の移動時間の確率分布を想定したBPR関数の推定が行われていた．本研究では，BPR関数に含まれるパラメータのうち，移動時間の不確実性要因である確率的な交通容量の確率分布を明示的に考慮している．確率的な交通容量から解析的に移動時間の確率分布を算出するために，対数正規分布に従う交通容量を仮定している．また，内田[5]による手法を応用してネットワーク上の観測データから対数正規分布に従う交通容量を推定している．移動時間の不確実性を扱う研究である確率均衡配分モデルにおいて，既存の手法で推定されたBPR関数に直接確率変数を導入することで移動時間の不確実性を解析的に計算する方法がよく用いられる．本研究の手法を用いることで，このような計算方法の精度

を上げることが期待される．

リンク間相関を考慮した推定手法や，対数正規分布以外の確率分布を想定した場合に対する方法の検討が課題である．また，実データを用いた分析を行い，妥当性を検証する必要があると考えられる．今後の課題としたい．

参考文献

1) 溝上障志，松井寛，可知隆：日交通量配分に用いる リンクコスト関数の開発，土木学会論文集，No.401/IV-10，pp.99-107，1989.
2) 中山晶一朗：道路の時間信頼性に関する研究レビュ ー，木学会論文集D3 (土木計画学)， Vol. 67, No. 1, pp. 95-114, 2011.
3) Clark, S. D. and Watling, D. P. : Modelling network travel time reliability under stochastic demand, Transportation Research, Vol. 39B (2), pp.119-140, 2005.
4) Lam, W. H. K., Shao, H. and Sumalee, A. (2008) Modeling impacts of adverse weather conditions on a road network with uncertainty in demand and supply, Transportation Research Part B, Vol.42, No.10, 890-910.
5) 内田賢悦：移動時間信頼性を考慮した需要変動型均 衡配分モデル，土木学会論文集 D3 (土木計画学)， Vol. 67, No. 1, pp. 60-69, 2011.
6) Tani, R. & Uchida, K., A Stochastic User Equilibrium Assignment Model under Stochastic Demand and Supply Following Lognormal Distributions, Asian Transportation Studies., 2018.
7) Abu-Dayya, A. A., & Beaulieu, N. C. (1994), Outage probabilities in the presence of correlated lognormal interferers, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **43**(1), 164-173.

(??? 受付)