

# サンプル選択バイアスを考慮した 社会基盤施設の統計的劣化予測手法

二宮 陽平<sup>1</sup>・貝戸 清之<sup>2</sup>

<sup>1</sup>学生会員 大阪大学大学院博士後期課程 工学研究科地球総合工学専攻・独立行政法人日本学術振興会 特別研究員  
(〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: y.ninomiya@civil.eng.osaka-u.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

本研究では、サンプル選択バイアスを明示的に考慮して、社会基盤施設の時系列点検データに基づく劣化予測モデルを提案する。社会基盤施設に関する点検データはその供用期間中に経験する補修・補強に起因して、欠損することが少なくなく、点検データのサンプル選択メカニズムを無視して単純に劣化予測をした場合、劣化予測結果にサンプル選択バイアスが生じている可能性がある。本研究では、ヘックマンのプロビット選択モデルに基づき、劣化予測モデルを定式化した上で、社会基盤施設に対する点検データのサンプル選択バイアスの効果を把握するとともに、サンプル選択バイアスを考慮した社会基盤施設の統計的劣化予測手法を開発する。

**Key Words** : *sample selection bias, inspection data, sample selection mechanism, deterioration modeling, Heckman probit model*

## 1. はじめに

近年、点検データに基づく社会基盤施設の統計的劣化予測手法が多数開発されている。施設の健全性は、健全度と呼ばれる離散的な数値で記録されている場合が少なくないため、健全度を劣化指標とした劣化予測モデルが少なくない。中でも、マルコフ劣化ハザードモデルは、施設の健全度に関する時系列データさえ存在すれば、どんな場合でも適用できる高い汎用性を持ち、実際の施設のマネジメントにも活用されている<sup>1)</sup>。

一方で、点検データは対象とする施設全体からランダムに獲得されていることが前提である。実際の施設の中には、補修・補強を経験しているものが少なくなく、獲得されている点検データが健全な施設から獲得されたものに偏っている可能性がある。このような点検データのサンプル選択メカニズムを無視して単純な劣化予測を行うことにより、劣化予測結果にサンプル選択バイアスが生じる可能性がある<sup>2)</sup>。

以上の問題意識のもと、本研究では、サンプル選択バイアスを補正する社会基盤施設の劣化予測手法を提案する。まず、点検データに基づいた社会基盤施設の劣化予測モデルを開発する。その上で、社会基盤施設に対して補修/補強が適用されるか否かを、ヘックマンのプロビット選択モデルを拡張してモデル化することにより、点検データの選択バイアスを明示的に考慮する。

以下、**2.**で本研究の基本的な考え方を述べる。**3.**で

は、サンプル選択バイアスを考慮した社会基盤施設の劣化予測モデルを定式化する。

## 2. 本研究の基本的な考え方

### (1) 社会基盤施設の補修・補強と点検

社会基盤施設はその用途に応じて、要求される性能と、その要求レベルがある。施設の供用期間中に、劣化により要求レベルを満足しなくなれば、低下した施設の性能を回復・向上させる何らかの対策が必要となる。例えば、橋梁の鋼部材の場合、再塗装や当て板補修、コンクリート部材の場合、断面修復やひびわれ注入、表面防水などが一般的な対策である<sup>3)</sup>。また、トンネル施設の場合、ポインティングおよび当板を用いた剥落防止工、斜面の場合、のり面保護工が挙げられる<sup>4)</sup>。本研究では、これらの対策を総称して、補修・補強と呼ぶ。

補修・補強の可否を判定するためには、点検によって施設の性能を確認する必要がある。社会基盤施設に対する点検は、例えば、国土交通省道路局が2014年6月に発行した道路定期点検要領<sup>5)</sup>によれば、道路管理者は国が定める統一的な基準により、5年に1回の頻度で近接目視により点検を行うことが基本とされている。本研究では、点検によって確認される施設の性能を健全度と呼ぶ。点検によって健全度が要求水準を下回っていることが確認されれば、補修・補強が実施される。

一方で、補修・補強の内容によっては、実施の後、点

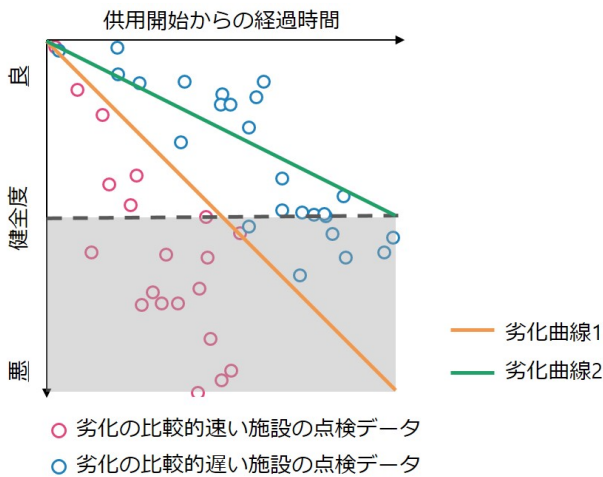


図-1 点検データ分布と劣化曲線の差異

点検データが欠損する場合がある。例えば、前述した橋梁の鋼部材の当て板補修の場合、その実施前までに行われる点検においては、鋼部材に直接発生している損傷を確認でき、それらを評価することにより、施設の健全度を記録できる。一方で、その実施後以降に行われる点検においては、当て板の存在により、鋼部材に直接発生している損傷が確認できなくなり、鋼部材に直接発生している損傷を評価した施設の健全度が記録できなくなることがある。本研究ではこのような点検データの欠損が存在する状況下における点検データの解析手法を提案する。

## (2) 施設の補修・補強による点検データの欠損

本研究で対象とする点検データの分布の様子を表現した概念図を、図-1 に示す。同図には、横軸に竣工からの経過時間、縦軸に施設の健全度を取り、施設の点検データを丸印でプロットしている。なお、対象としている施設は、1) 劣化の比較的速い施設、2) 劣化の比較的遅い施設、と2種類に便宜的に分類し、前者1) の点検データを赤色で、後者2) の点検データを青色でプロットしている。1) および2) すべての点検データをもとに劣化予測をした場合、図中に橙色の実線で示すような劣化曲線1のような劣化予測がされるであろう。

一方で、対象とする施設は、ある一定の健全度に達した後、補修・補強が実施されることにより、点検データが獲得できなくなるとする。この基準となる健全度を図-1 中の灰色の破線とすると、灰色の領域で囲まれる部分の点検データが欠損することになる。したがって、劣化予測を行う際には、灰色の領域以外の部分の点検データを用いて、劣化予測を行うこととなる。灰色の領域以外の部分には明らかに、劣化の比較的速い施設に比べて、劣化の比較的遅い施設の点検データが

多くなっている。このように、点検データが欠損する場合、同図中に緑色の実線で示すような劣化曲線2のような劣化予測がされるであろう。劣化曲線1と劣化曲線2を比較すると、差異が生じることがわかる。このような点検データを用いて単純に劣化予測をした場合、ある健全度あるいは竣工からの経過時間以降の劣化過程は、補修・補強が実施されていない施設のみ の点検データが用いられているため、劣化予測結果にバイアスが存在する可能性がある。

## (3) サンプル選択メカニズムとサンプル選択バイアス

前節 2.(2) でとりあげた例のように、対象とするデータが観測されるかどうかランダムではなく、特定の対象のデータのみが観測されるメカニズムは一般に、サンプル選択メカニズム (sample selection mechanism) と呼ばれる。また、サンプル選択メカニズムを無視して単純な推定を行うことで生じるバイアスは一般に、サンプル選択バイアス (sample selection bias) と呼ばれる。サンプル選択バイアスは、1973年、労働経済学分野において初めて本格的に議論された<sup>6)</sup>。

土木分野においても、サンプル選択バイアスをとりあげた研究がある。例えば、小林らは舗装の点検データが、舗装に対する補修に起因して欠損することに着目し、選択肢サンプリング法を用いてサンプル欠損バイアスを考慮した最尤推定法を提案し、多段階指数ハザードモデルの推計に適用している<sup>7)</sup>。また、林らは、社会基盤施設の点検データが複数の劣化事象の中から、もっとも劣化が進行した劣化事象が施設を代表する劣化事象として記録されることが多い点に着目し、複数の劣化過程がそれぞれ独立にマルコフ過程に従うと考え、その中でもっとも劣化が進行した劣化事象が代表的な事象として選択されるメカニズムを表現する競合的劣化ハザードモデルを開発している<sup>8)</sup>。本研究で開発する劣化予測モデルはヘックマンのプロビット選択モデル<sup>9)</sup>に基づき、劣化予測モデルを定式化している点に新規性がある。

## 3. モデルの定式化

### (1) 点検データに基づく施設劣化過程のモデル化

施設の劣化過程をマルコフ劣化ハザードモデルに基づいて定式化する。いま、施設の健全性を記録した指標が  $S$  段階の離散的健全度  $1, \dots, S$  であるとする。健全度の値は大きくなるほど、施設の劣化が進行している様子を表現することとする。ここで、ある単一の施設に着目し、当該施設の健全度  $s (= 1, \dots, S-1)$  の寿命 (健全度が  $s$  に達した時点から健全度が  $s+1$  に推移する時点までの期間長) を確率変数  $\zeta_s$  で表す。さらに、確

率変数  $\zeta_s$  は確率密度関数  $f_s(\zeta_s)$ 、分布関数  $F_s(\zeta_s)$  に従うと考える。さらに、施設の供用開始時点を中心とする時間軸上におけるある時点  $\tau_E$  において、照明柱の健全度が  $s$  であり、そこから任意の時間  $y_s (\geq 0)$  が経過した時点で健全度  $s+1$  に到達する確率密度をハザード関数<sup>10),11)</sup>を用いて表現する。ハザード関数  $\lambda_s(y_s)$  は、施設の健全度が  $s$  に達した時点から時間  $y_s$  が経過するまで健全度  $s$  の状態が継続したという条件の下で、微小期間  $[y_s, y_s + \Delta y_s]$  中に健全度が  $s+1$  に推移する条件付き確率となる。すなわち、時間  $y_s$  まで健全度が  $s$  のまま継続する生存確率  $\tilde{F}_s(y_s) (= 1 - F_s(y_s))$  を用いて、

$$\lambda_s(y_s)\Delta y_s = \frac{f_s(y_s)\Delta y_s}{\tilde{F}_s(y_s)} \quad (1)$$

$$(s = 1, \dots, S-1)$$

と表現できる。ハザード関数が時点  $y_s$  に依存せず、常に一定値  $\theta_s (> 0)$  をとると考え、指数ハザード関数を

$$\lambda_s(y_s) = \theta_s \quad (2)$$

$$(s = 1, \dots, S-1)$$

と表現する。指数ハザード関数を用いることにより、劣化過程が過去の履歴に依存しないというマルコフ性を表現できる。さらに、ハザード関数  $\theta_s (s = 1, \dots, S-1)$  が照明柱の構造条件や環境条件に依存して変化すると考え、具体的なハザード関数を

$$\theta_s = \exp(\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}'_s) \quad (3)$$

$$(s = 1, \dots, S-1)$$

と定義する。記号「 $'$ 」は転置操作を表す。また、

$\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_A)$  は定数項  $x_0 = 1$  および施設のハザード率に影響を及ぼす  $A$  個の説明変数  $x_1, \dots, x_A$  を要素とする説明変数ベクトル、 $\boldsymbol{\beta}_s = (\beta_{0,s}, \dots, \beta_{A,s})$  は定数項および各説明変数がハザード関数  $\theta_s$  へ及ぼす影響の度合いを表現する未知パラメータベクトルである。式 (3) により、未知パラメータベクトル  $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_{S-1})$  の関数としてマルコフ推移確率を表現することができ、施設の構造条件や環境条件が劣化過程に及ぼす影響を定量化できる。

さらに、指数ハザード関数を用いれば、健全度  $s$  の寿命が  $y_s$  以上となる確率  $\tilde{F}_s(y_s)$  は、

$$\tilde{F}_s(y_s) = \exp(-\theta_s y_s) \quad (4)$$

$$(s = 1, \dots, S-1)$$

と表現できる。

サンプル時間軸上の  $\tau_E$  で、健全度が  $s$  であり、かつ時点  $\tau_E$  から追加的に  $z (\geq 0)$  以上にわたって健全度  $s$

が継続する確率  $\tilde{F}_s(\tau_E + z | \zeta_s \geq \tau_E)$  は、

$$\begin{aligned} & \tilde{F}_s(\tau_E + z | \zeta_s \geq \tau_E) \\ &= \text{Prob}[\zeta_s \geq \tau_E + z | \zeta_s \geq \tau_E] \\ &= \frac{\exp\{-\theta_s(\tau_E + z)\}}{\exp(-\theta_s \tau_E)} \\ &= \exp(-\theta_s z) \end{aligned} \quad (5)$$

$$(s = 1, \dots, S-1)$$

と表される。すなわち、時点  $\tau_E$  において健全度が  $s$  であり、時点  $\tau_{E'} = \tau_E + z$  においても健全度が  $s$  と判定される確率は、

$$\text{Prob}[h(\tau_{E'}) = s | h(\tau_E) = s] = \exp(-\theta_s z) \quad (6)$$

$$(s = 1, \dots, S-1)$$

となる。確率  $\text{Prob}[h(\tau_{E'}) = s | h(\tau_E) = s]$  はマルコフ推移確率  $\pi_{s,s}(z | \boldsymbol{\beta})$  に他ならない。指数ハザードモデルを用いた場合、推移確率  $\pi_{s,s}(z | \boldsymbol{\beta})$  はハザード関数  $\theta_s$  と時間間隔  $z$  のみに依存し、時点  $\tau_E$ 、時点  $\tau_{E'}$  に関する情報を用いなくとも推移確率を推計することが可能となる。以上の議論を拡張し、指数ハザード関数を用いて、時点  $\tau_E$  と時点  $\tau_{E'} = \tau_E + z$  の間で健全度が  $s_1$  から  $v (> s)$  に推移するマルコフ推移確率  $\pi_{s,v}(z | \boldsymbol{\beta}) (s = 1, \dots, S-1; v = s, \dots, S)$  は、

$$\begin{aligned} \pi_{s,v}(z | \boldsymbol{\beta}) &= \text{Prob}[h(\tau_{E'}) = v | h(\tau_E) = s] \\ &= \sum_{k=s}^v \prod_{m=s}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \prod_{m=k}^{v-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} \exp(-\theta_k z) \end{aligned} \quad (7)$$

$$(s = 1, \dots, S-1; v = s+1, \dots, S)$$

と表すことができる<sup>1)</sup>。ただし、表記上の規則として、

$$\left\{ \begin{aligned} \prod_{m=s}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} &= 1 & (k=s \text{ のとき}) & \quad (8a) \\ \prod_{m=k}^{v-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} &= 1 & (k=v \text{ のとき}) & \quad (8b) \end{aligned} \right.$$

が成立すると考える。さらに、表記の便宜上、

$$\begin{aligned} & \prod_{m=s, \neq k}^{v-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \exp(-\theta_k z) \\ &= \prod_{m=s}^{k-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \prod_{m=k}^{v-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_k} \exp(-\theta_k z) \end{aligned} \quad (9)$$

と簡略化する。また、 $\pi_{s,S}$  に関しては、マルコフ推移確率の条件より次式で表せる。

$$\pi_{s,S}(z | \boldsymbol{\beta}) = 1 - \sum_{v=s}^{S-1} \pi_{s,v}(z | \boldsymbol{\beta}) \quad (10)$$

$$(s = 1, \dots, S-1)$$

## (2) ヘックマンのプロビット選択モデル

2.(1) で述べたように、劣化の進んだ施設に関しては、補修・補強が適用されることにより、点検データが欠損する場合がある。そこで、ヘックマンのプロビット選

択モデルに基づき、点検データのサンプル選択メカニズムをモデル化する。

任意の施設  $i$  の点検結果は当該施設の供用から寿命に達するまでの全ての期間において観測されるのではなく、供用開始から補修・補強が実施されるまでの期間にのみ観測されると考える。ここで、施設  $i$  に対する補修・補強が実施されるかどうか、施設  $i$  に対する観測されない補修・補強の実施基準によって判断されると考える。これを本研究では、補修・補強選択指標と呼ぶ。具体的に、施設  $i$  に対して補修・補強選択指標を表現するために、施設  $i$  の供用開始からの経過時間に依存する潜在的な状態変数  $u_i(t)$  を導入し、 $u_i(t) > 0$  となったときに施設  $i$  に対して補修・補強が実施されると考える。さらに、この潜在変数  $u_i(t)$  に、施設  $i$  の特性を表現する  $B$  個の説明変数  $y_{i,1}, \dots, y_{i,B}$  が影響を及ぼすと考える。具体的に潜在変数  $u_i(z)$  を、

$$u_i(t) = \mathbf{y}_i \boldsymbol{\gamma}' + \epsilon \quad (11)$$

と表現する。ただし、 $\mathbf{y}_i = (y_{i,0}, y_{i,1}, \dots, y_{i,B})$  で構成されるとする。 $y_{i,0}$  は定数項を表現し、 $y_{i,0} = 1$  とする。また、 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_B)$  で構成されるとし、 $\gamma_1, \dots, \gamma_B$  はそれぞれ説明変数  $y_{i,1}, \dots, y_{i,B}$  の補修・補強選択指標に対する影響度合いを表現する未知パラメータベクトルとする。さらに、 $\epsilon$  は標準正規分布を示す。式 (11) は、点検データが得られるかどうかを決定する式であることから、同式を選択方程式と呼ぶ。

### (3) 尤度関数の定式化

任意の施設  $i$  に関して獲得されるデータの尤度関数  $l_i$  は、マルコフ推移確率 (7) および選択方程式 (11) により、

$$\begin{aligned} l_i(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} | \bar{\mathbf{x}}_i) &= \prod_{m: u_i(t_{i,m}) \leq 0} \left\{ \text{Prob}[u_i(t_{i,m}) \leq 0] \right\} \\ &\cdot \prod_{m: u_i(t_{i,m}) > 0} \left\{ \text{Prob}[s_{i,m} = \bar{s}_{i,m}, s_{i,m+1} = \bar{s}_{i,m+1}, \right. \\ &\left. z_{i,m} = \bar{z}_{i,m} | u_i(t_{i,m}) > 0] \cdot \text{Prob}[u_i(t_{i,m}) > 0] \right\} \\ &= \prod_{m: u_i(t_{i,m}) \leq 0} \left\{ \text{Prob}[u_i(t_{i,m}) \leq 0] \right\} \\ &\cdot \prod_{m: u_i(t_{i,m}) > 0} \left\{ \text{Prob}[s_{i,m} = \bar{s}_{i,m}, s_{i,m+1} = \bar{s}_{i,m+1}, \right. \\ &\left. z_{i,m} = \bar{z}_{i,m}, u_i(t_{i,m}) > 0] \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

と表現できる。ただし、 $t_{i,m}$  は施設  $i$  の供用開始時点を中心とする時間軸上の  $m$  回目の点検実施時点を示す。ここで、尤度関数を表現するには、尤度関数を構成する確率  $\text{Prob}[s_1 = \bar{s}_1, s_2 = \bar{s}_2, z = \bar{z}, u_i > 0]$  を定式化する必要がある。この確率を定式化するためには、1)

事前健全度、2) 事後健全度、3) 点検間隔、4) 補修・補強選択指標という 4 つの確率変数の同時確率分布を定義すればよい。ここで、マルコフ推移確率  $\pi_{s,v}(z)$  は、1) 事前健全度、2) 事後健全度、3) 点検間隔という 3 つの確率変数の同時確率分布と解釈できる。したがって、マルコフ推移確率  $\pi_{s,v}(z)$  および補修・補強選択指標  $u_i$  の同時確率分布を定義する必要がある。

### (4) コピュラを用いたマルコフ推移確率と補修・補強選択指標の同時確率分布の定式化

マルコフ推移確率  $\pi_{s,v}(z)$  および補修・補強選択指標  $u_i$  の同時確率分布を定義するために、本研究ではコピュラ (copula) を用いる<sup>12),13)</sup>。コピュラは多変数の分布関数とその周辺分布関数の関係を示す関数のことであり、例えば、確率変数  $x_1, \dots, x_n$  の  $n$  次元分布関数  $H(x_1, \dots, x_n)$  が連続な 1 次元周辺分布関数  $G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)$  をもつとき、

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)) \quad (13)$$

を満たす  $n$  次元コピュラが一意に存在することが、スカラーの定理から導ける<sup>14)</sup>。同じくスカラーの定理から、

(a) 任意の  $u_j = G_j(x_j) \in [0, 1]$  ( $d = 1, \dots, D$ ) について、

$$C(u_1, \dots, u_{d-1}, 0, u_{d-1}, \dots, u_D) = 0 \quad (14)$$

(b) 任意の  $u_j = G_j(x_j) \in [0, 1]$  ( $d = 1, \dots, D$ ) について、

$$C(1, \dots, 1, u_d, 1, \dots, 1) = u_d \quad (15)$$

(c)  $u_d^1 \leq u_d^2$  を満たすすべての  $(u_1^1, \dots, u_D^1), (u_1^2, \dots, u_D^2) \in [0, 1]^D$  に対して、

$$\sum_{j_1=1}^2 \dots \sum_{j_D=1}^2 (-1)^{\sum_{s=1}^D j_s} C(u_1^{j_1}, \dots, u_D^{j_D}) \geq 0 \quad (16)$$

という性質をすべて満たすような関数  $C$  がコピュラとして定義される<sup>12)</sup>。

コピュラ  $C$  を用いると、マルコフ推移確率  $\pi_{s,v}(z)$  および補修・補強選択指標  $u_i$  の同時確率分布  $H$  は、

$$H = C(\pi_{s,v}(z), u_i) \quad (17)$$

と定義できる。本研究では、積コピュラ、Gumbel コピュラ<sup>15)</sup>、Clayton コピュラ<sup>16)</sup>、Frank コピュラ<sup>17)</sup> などの 1 パラメータ Archimedean コピュラを検討する。

マルコフ推移確率と補修・補強選択指標の接合分布関数が 1 パラメータ Archimedean コピュラ  $C_r(a)$  であるとき、任意の施設  $i$  に関して獲得されるデータの尤

度関数  $l_i$  は,

$$\begin{aligned} l_i(\beta, \gamma, a | \Xi_i) &= \prod_{m \in \Omega_i} \{1 - \Phi(\mathbf{y}_{i,m} \gamma')\} \\ &\cdot \prod_{m \in \Omega_i^c} \pi_{s,v}(z) \cdot \Phi(\mathbf{y}_{i,m} \gamma') \\ &\cdot C_r(\pi_{s,v}(z), \Phi(\mathbf{y}_{i,m} \gamma')) \end{aligned} \quad (18)$$

と表現できる。ただし、 $\Phi(\cdot)$  は標準正規分布の累積分布関数を表し、 $a$  は Archimedean コピュラ  $C_r(a)$  のパラメータを表す。

#### 4. おわりに

本研究では、サンプル選択バイアスを明示的に考慮した社会基盤施設の時系列点検データに基づく劣化予測手法を開発した。具体的には、マルコフ劣化ハザードモデルおよびヘックマンのプロビット選択モデルに基づき、劣化予測モデルを定式化した。なお、本研究で提案した方法論を実在する社会基盤施設の点検データに適用した実証分析に関しては、研究発表会当日に発表する予定である。

謝辞：本研究を実施するにあたり、独立行政法人日本学術振興会科学研究費助成事業「特別研究員奨励費（研究課題/領域番号：JP18J20014）」の助成を受けた。ここに記して感謝の意を表す。

#### 参考文献

- 1) 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司: 橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定, 土木学会論文集, No.801/I-73, pp.68-82, 2005.
- 2) 例えば, 星野崇宏: 調査観察データの統計科学—因果推論・選択バイアス・データ融合, 岩波書店, 2009.
- 3) 土木学会: 橋梁の維持管理実践と方法論, 丸善出版, 2016.
- 4) 土木学会メンテナンス工学連合小委員会: 社会基盤メンテナンス工学, 東京大学出版会, 2004.
- 5) 国土交通省道路局: 道路橋定期点検要領, 2014.
- 6) Gronau, R.: The Effect of Children on the Housewife's Value of Time, *Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.168-199, 1973.
- 7) 小林潔司, 熊田一彦, 佐藤正和, 岩崎洋一郎, 青木一也: サンプル欠損を考慮した舗装劣化予測モデル, 土木学会論文集F, Vol.63, No.1, pp.1-15, 2007.
- 8) 林秀和, 貝戸清之, 熊田一彦, 小林潔司: 競合的劣化ハザードモデル: 舗装ひび割れ過程への適用, 土木学会論文集D, Vol.65, No.2, pp.143-162, 2009.
- 9) Heckman, J.: Shadow Prices, Market Wages, and Labor Supply, *Econometrica*, Vol.42, No.4, pp.679-694, 1974.
- 10) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- 11) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
- 12) Nelsen, R. B.: An Introduction to Copulas, *Springer*, 1999.

- 13) 戸坂凡展, 吉羽要直: コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説, 日本銀行金融研究所, 金融研究, pp.115-162, 2005.
- 14) Sklar, A.: Random variables, joint distribution functions, and copulas, *Kybernetika*, Vol. 9, No. 6, pp.449-460, 1973.
- 15) Gumbel, E. J.: Bivariate exponential distributions, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.55, No.292, pp.698-707, 1960.
- 16) Clayton, D. G.: A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence, *Biometrika*, Vol.65, No.1, pp.141-151, 1978.
- 17) Frank, M. J.: On the simultaneous associativity of  $F(x, y)$  and  $x + y - F(x, y)$ , *Aequationes Mathematicae*, Vol.19, pp.194-226, 1979.