

# 正方形格子状経済における 幾何学的安定パターン

木暮 洋介<sup>1</sup>・恩田 幹久<sup>2</sup>・大澤 実<sup>3</sup>・高山 雄貴<sup>4</sup>・池田 清宏<sup>5</sup>

<sup>1</sup>学生会員 東北大学 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: yosuke.kogure.t2@dc.tohoku.ac.jp

<sup>2</sup>学生会員 東北大学 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: mikihiisa.onda.p8@dc.tohoku.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 東北大学助教 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: minoru.osawa.a5@tohoku.ac.jp

<sup>4</sup>正会員 金沢大学准教授 理工研究域 (〒 920-1192 石川県金沢市角間町)

E-mail: ytakayama@se.kanazawa-u.ac.jp

<sup>5</sup>正会員 東北大学教授 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: kiyohiro.ikeda.b4@tohoku.ac.jp

集積経済モデルの分析においては、輸送費用などの構造パラメータの変化に伴い、均衡解の複雑な分岐現象が発生する。そのため、安定な均衡解を網羅することは事実上困難である。そこで本研究では、安定な均衡解を合理的・体系的に把握するために、自明解に着目した方法論を提案する。ここで自明解とは、構造パラメータの値の如何に依存することなく空間分布パターンを保持する解である。自明解は、支配方程式の対称性を記述する群の分析により、理論的に特定・分類可能である。本研究では具体的に、境界を与えた有限格子による正方形格子状経済において発現する自明解の一般的特性を解明する。また、Forslid and Ottaviano<sup>1)</sup>の集積経済モデルを用いて、安定な自明解を特定するとともに、集積形態と安定性の関係を議論する。

**Key Words:** square lattice, economic agglomeration, replicator dynamics, group-theoretic method

## 1. はじめに

### (1) 背景

大規模交通インフラ整備等、経済効果が空間的に偏在する計画案の便益評価を合理的に行うことを目的として、空間応用一般均衡 (SCGE) モデルが構築されてきた。それらの多くは、人口の都市間移動を捨象するなど、短中期的な予測を前提としたものである。一方で、より長期的な予測を考えると、人口の都市間移動と集積形成を組み込んだ理論的枠組みとモデルの体系化が望まれる。

上記の要請に答える理論的枠組みとして、新経済地理学 (NEG) 分野において、Dixit and Stiglitz 型の独占的競争による一般均衡に基づく人口の都市間移動と集積形成を記述可能な一連の数理モデルが構築されている。本論文では、それらを集積経済モデルと呼ぶ。集積経済モデルは、都市間の輸送費用の減少に伴う人口集積のメカニズムを説明することができる。その知見は、Fujita et al.<sup>2)</sup>, Baldwin et al.<sup>3)</sup>, Combes et al.<sup>4)</sup>, Fujita and Thisse<sup>5)</sup>, 佐藤他<sup>6)</sup>, 曾・高塚<sup>7)</sup> 等により、専門書としてまとめられるに至っている。特に Krugman<sup>8)</sup> は、二次元経済空間を仮定した集積経済モデルを用いれば、中心地理論<sup>9),10)</sup> で予測された規則的な空間分布パターン

を示すことも可能だと推論している。経済学的根拠に立脚した集積経済モデルの分析を通して、二次元・多都市の枠組みにおける人口集積の空間分布パターンの形成メカニズムを統一的に解明することは、重要な基礎的研究課題である<sup>1)</sup>。

### (2) 本研究の目的

集積経済モデルの分析においては、一般に、均衡解の分岐が発生する。分岐とは、モデルの構造パラメータの変化に伴い、解の安定性と個数が不連続的に変化する現象である。特に、多くの都市数を扱った多都市モデルの支配方程式は、分岐が次々に発生する複雑系となり、均衡解の解析的な分析は事実上困難となる。このことから、多都市モデルの分析は必然的に数値計算に頼ることになるが、膨大な試行錯誤を要するうえ、得られる情報は必ずしも多くない。

Ikeda et al.<sup>17)</sup> は、周期的な空間を仮定した多都市モデルの集積挙動が、自明解に着目することで統一的に理解できることを示した。自明解とは、モデルの構造パラメータの値に依存することなく空間分布パターン

<sup>1</sup> 近年、久武・山崎<sup>11)</sup>, 佐藤他<sup>12)</sup>, 石倉<sup>13)</sup>, 高山他<sup>14),15),16)</sup> 等により、NEG の知見を応用した SCGE モデルも開発されつつある。これらのモデルによる評価を適切に実施するための前提としても、人口集積に関する一般的特性の解明は重要となる。

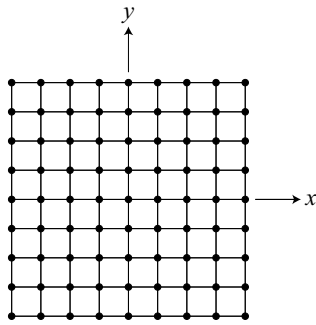


図-1 正方形格子状経済 (都市数  $K = 9^2 = 81$ )

図中の点は都市を，実線は交通リンクを表す。

を保持し，常に支配方程式を満たす解である。自明解は，分岐現象の詳細に左右されず，対象とする系の対称性に基づいて特定することが可能なため，均衡解を合理的・体系的に発見する上でも有用である。

本研究の目的は，多都市モデルの分析における自明解という視点の重要性を，境界を与えた非周期的な空間において確認することである。そのために，自明解の体系的な発見法として，群論的概念である軌道分解を利用した方法論を提案する。提案する方法論自体は，群同変な系であれば一般に適用可能であるが，本研究では例として，境界を与えた有限格子による正方形格子状経済を仮定する。これは，図-1 に示すような二次元都市経済システムである。

本研究では，上記の正方形格子状経済を仮定した多都市モデルの自明解を特定し，多様な空間分布パターンが発現することを示す。さらに，自明解の安定性解析を通して，安定な空間分布パターンを特定するとともに，それらがモデルの集積挙動を理解する上で重要となることを示す。なお，解の安定性はモデルの具体形に依存する。本研究では例として，Forslid and Ottaviano モデルを利用する。

本論文の構成は以下のとおりである。次節では，集積経済モデルの挙動を分析した関連研究を紹介する。2. では，本研究で分析するモデルを定式化する。3. では，正方形格子状経済を定式化する。また，支配方程式が持つ群同変性に基づき，自明解を特定する。4. では，計算分岐理論に基づく安定性解析手法によって自明解を分析し，安定な空間分布パターンを特定する。5. は結びである。

### (3) 関連研究と本研究の位置づけ

集積経済モデルには様々なバリエーションが存在する。大澤他<sup>18)</sup>，大澤・赤松<sup>19)</sup>，Akamatsu et al.<sup>20)</sup> は，競技場経済を仮定したモデルの分岐特性を分析し，発現する空間分布パターンがモデルの数理的構造に依存することを示すとともに，数理的構造に応じたモデ

ル分類の重要性を論じている。その上で，本研究で着目する自明解は，経済空間の対称性に起因した空間分布パターンであり，モデルの数理的構造の子細に依らず存在するという特徴を持つため，モデル依存性を検討するための基礎となりえる。

Ikeda et al.<sup>21),22),23)</sup> は，正三角格子状経済空間を仮定したモデルの分析を試みており，正六角形状の規則性を持つ空間分布パターンの発現など，人口集積のメカニズムを解明する上で示唆に富んだ結果を示している。しかし，複雑な分岐現象が妨げとなり，多くの試行錯誤的な数値計算によってモデルの均衡解を断片的に示すに留まっている。モデルの集積挙動の全貌を把握するためには，従来行われてきた均衡解を数值的・局部的に発見するアプローチではなく，均衡解を体系的に発見するアプローチが必要となる。その上で，本研究で着目する自明解は，支配方程式が持つ群同変性の観点から合理的・体系的に特定することが可能である。また，Ikeda et al.<sup>21),22),23)</sup> で発見された安定な均衡解に関して，実はその大半が自明解であることは注目すべき事実である。

集積経済モデルにおいてどのような空間分布パターンが発現するかに関する研究が蓄積され，その結果として，空間周期倍化分岐と呼ばれる特徴的な分岐現象の存在が指摘されてきている。これは，人口集積の起こる都市と人口分散の起こる都市が互い違いとなった空間分布パターンを形成する分岐現象である。Ikeda et al.<sup>24)</sup>，Akamatsu et al.<sup>25)</sup>，Osawa et al.<sup>26)</sup>，Tabuchi and Thisse<sup>27)</sup> は，競技場経済において，空間周期倍化分岐が繰り返し発生することを示している。また，Ikeda et al.<sup>17)</sup> は，正方形格子状経済空間においても，競技場経済と類似した空間周期倍化分岐が生じることを確認している。その上で，空間周期倍化分岐によって形成される空間分布パターンは，本研究で着目する自明解にあたる。

## 2. モデル

本章では，本研究で分析する集積経済モデルの均衡条件を定式化する。ただし，モデルの具体形については，付録 I に詳細を示す。また，均衡状態に至るまでの調整過程を記述する replicator dynamics を導入する。

### (1) 均衡条件の定式化

$K$  個の都市が存在する都市経済システムを考え，利得関数  $v: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^K$  を定義する。ここで， $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^K \mid \sum_{i=1}^K \lambda_i = 1\}$  は  $K - 1$  次元の単体， $\lambda_i$  は都市  $i$  の人口， $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_K)$  は人口分布である。立地主体は，自身が得る利得を最大化するように都市間を移

動する。このとき、均衡条件は以下のように定式化される：

$$\begin{cases} v^* - v_i(\boldsymbol{\lambda}) = 0 & \text{if } \lambda_i > 0 \\ v^* - v_i(\boldsymbol{\lambda}) \geq 0 & \text{if } \lambda_i = 0 \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $\boldsymbol{\lambda} \in \Delta$ 。ここで、 $v^*$  は均衡状態における利得水準である。

## (2) Replicator dynamics の下での支配方程式

人口分布  $\boldsymbol{\lambda}$  は、replicator dynamics と呼ばれる以下の微分方程式に従って変化するものと仮定する：

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}, \tau) = \{F_i(\boldsymbol{\lambda}, \tau) \mid i = 1, \dots, K\} \quad (2)$$

$$F_i(\boldsymbol{\lambda}, \tau) = (v_i(\boldsymbol{\lambda}, \tau) - \bar{v}(\boldsymbol{\lambda}, \tau))\lambda_i \quad (3)$$

ここで、 $\bar{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$  は平均利得である。また、式中において、パラメータ  $\tau \in (0, \infty)$  を明示的に記している。

均衡条件 (1) を満たす安定な均衡解を決定する問題は、replicator dynamics の安定な停留点を決定する問題に変換できる<sup>2</sup>。停留点  $(\boldsymbol{\lambda}^*, \tau)$  は、以下の支配方程式により決定される：

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}^*, \tau) = \mathbf{0} \quad (4)$$

## (3) 停留点の分類

支配方程式 (4) を満足する停留点を、その性質に応じて、以下に述べるように分類する。

### a) 安定解と不安定解

Jacobi 行列

$$J(\boldsymbol{\lambda}^*, \tau) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}^*, \tau) \quad (5)$$

の固有値を調べることにより、停留点  $(\boldsymbol{\lambda}^*, \tau)$  の安定性を以下のように分類できる：

$$\begin{cases} \text{安定解： } J \text{ の全ての固有値の実部が負} \\ \text{不安定解： } J \text{ の } 1 \text{ つ以上の固有値の実部が正} \end{cases}$$

### b) 内点解と端点解

停留点  $(\boldsymbol{\lambda}^*, \tau)$  は、 $\boldsymbol{\lambda}^*$  の成分を並べ替えることにより、一般性を失うことなく、

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_+ \\ \boldsymbol{\lambda}_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

と書き換えられる。ここで、

$$\boldsymbol{\lambda}_+ = \{\lambda_i \mid \lambda_i > 0, i = 1, \dots, m\}, \boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{0} \quad (7)$$

である。このとき、停留点を以下のように分類できる：

$$\begin{cases} \text{内点解： } m = K \\ \text{端点解： } m < K \end{cases}$$

ここで、内点解は全ての都市の人口が正であり、端点解は一部の（具体的には  $K - m$  個の）都市の人口が 0 である<sup>3</sup>。

<sup>2</sup> Sandholm<sup>28)</sup> Chap.4 を参照されたい。

<sup>3</sup> 端点解の安定性に関して、付録 II に詳細を示す。

## c) 自明解と非自明解

支配方程式 (4) を満足する解曲線として、停留点  $(\boldsymbol{\lambda}^*, \tau)$  を以下のように分類できる：

$$\begin{cases} \text{自明解： } \boldsymbol{\lambda}^* = \bar{\boldsymbol{\lambda}} \\ \text{非自明解： } \boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\lambda}^*(\tau) \end{cases}$$

ここで、 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$  は一定の人口分布パターンであり、 $\tau$  の値によらず常に支配方程式の解となる。一方、 $\boldsymbol{\lambda}^*(\tau)$  は  $\tau$  の値により変化する解である。

1. で述べたように、本研究では自明解の存在に着目し、モデルが示す多様な空間分布パターンを明らかにする。特に、安定となる自明解に主眼を置く。

**定義 1 (幾何学的安定パターン)** 安定となる自明解を、幾何学的安定パターンと定義する。

## 3. 正方形格子状経済における自明解

本章では、境界を与えた有限格子による正方形格子状経済を定式化する。また、正方形格子状経済において、支配方程式が群に関する同変性を持つことに着目し、群論的概念である軌道分解を導入することにより、自明解を体系的に特定する。

### (1) 正方形格子状経済の定式化

都市数  $K = n^2$  の正方形格子状経済における各都市の位置座標の集合  $\mathcal{H}_n$  を

$$\mathcal{H}_n = \{x\boldsymbol{\ell}_1 + y\boldsymbol{\ell}_2 \mid x, y \in \mathbb{Z}, -\frac{n-1}{2} \leq x, y \leq \frac{n-1}{2}\} \quad (8)$$

によって与える。ただし、本研究では  $n$  が奇数である場合のみを考える<sup>4</sup>。ここで、

$$\boldsymbol{\ell}_1 = d(1, 0)^\top, \boldsymbol{\ell}_2 = d(0, 1)^\top \quad (9)$$

であり、 $d > 0$  は隣接する都市間の経路距離である。また、 $\mathbb{Z}$  は整数の集合である。正方形格子状経済は、 $d$  を用いて、都市  $ij$  間の最短経路距離  $t_{ij}$  を具体的に与えることにより、支配方程式 (4) の中に組み込まれる（付録 I, 式 (I.1) 参照）。

### (2) 支配方程式の同変性

正方形格子状経済の対称性は、4 次二面体群  $D_4$  によって記述される：

$$D_4 = \{e, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\} \quad (10)$$

ここで、 $r$  は時計回りの  $\pi/2$  回転変換、 $s$  は  $x$  軸に関する鏡映変換である。

正方形格子状経済のもとでは、支配方程式 (4) が  $D_4$  に関する同変性

$$T(g)\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}, \tau) = \mathbf{F}(T(g)\boldsymbol{\lambda}, \tau), g \in D_4 \quad (11)$$

<sup>4</sup>  $n$  が偶数の場合、後述の軌道分解が簡素化されるため、より容易に分析できる。

を持つ。ここで、 $T(g)$  ( $g \in D_4$ ) は  $D_4$  の変換作用を記述する表現行列である<sup>5</sup>。

### (3) 同変性に基づく分析

本研究で取り上げる正方形格子状経済をはじめ、支配方程式がある群  $G$  に関する同変性を持つ都市経済システム（以下、 $G$ -同変な系と呼ぶ）に対しては、以下に述べる一般論が適用できる。なお、次節において、正方形格子状経済への適用を具体的に示す。

#### a) 支配方程式の自明解

$G$ -同変な支配方程式には、 $\tau$  の値によらず常に支配方程式の解となる自明解が存在する。自明解の候補となるのは、 $m$  個の都市に均等に人口が分布する端点解

$$\hat{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_+ \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (12)$$

である。ここで、以下の命題が成り立つ<sup>6</sup>。なお、証明は付録 IV に示す。

**命題 1** ある端点解 (12) に関して、 $\lambda_+$  が  $G$  の部分群  $G'$  に関する不変性

$$T_+(g)\lambda_+ = \lambda_+, \quad g \in G' \quad (13)$$

を満たし、かつ、 $T_+(g)$  ( $g \in G'$ ) によって  $\lambda_+$  の任意の 2 成分を互いに置換可能であるとする。このとき、その端点解は  $G$ -同変な支配方程式の自明解となる。ここで、 $T_+(g)$  ( $g \in G'$ ) は  $G'$  の表現行列である。

#### b) 都市経済システムの軌道分解

命題 1 を援用して自明解を特定する上で、格子節点に位置する都市群の軌道分解が重要な役割を果たす。軌道分解とは、 $G$ -同変な支配方程式に対し、 $G$  の部分群  $G'$  によって定義される群論的概念であり、直観的には、幾何学的条件によって都市を分類するものである。以下に、軌道および軌道分解の定義を示す。

**定義 2 (軌道)** 都市を  $P = \{1, \dots, K\}$  という集合で表し、ある部分集合  $P_l \subset P$  を考える。 $P_l$  に含まれる都市に関して、部分群  $G'$  の変換作用によって任意の 2 都市を互いに置換可能であるとき、 $P_l$  を  $G'$  に関する軌道と呼ぶ。

一般に  $P \neq P_l$  であり、 $P$  は  $G'$  によって複数の軌道に分割される。これを軌道分解と呼ぶ：

**定義 3 (軌道分解)** 集合  $P$  を

$$P = \bigcup_{l \in L} P_l \quad (14)$$

という直和で表すことを、 $G'$  に関する軌道分解と呼ぶ。ここで、 $P_l$  ( $l \in L$ ) は  $G'$  に関する軌道である。また、

<sup>5</sup> 表現行列および同変性に関して、付録 III に補足を示す。

<sup>6</sup> Ikeda et al.<sup>17)</sup> p.16 を参照されたい。

$L = \{1, \dots, L'\}$  であり、 $L'$  は  $G'$  に関する軌道の総数である。

ここで、軌道分解の定義および命題 1 より、以下の命題が成り立つ。なお、証明は付録 V に示す。

**命題 2** ある端点解 (12) に関して、 $\lambda_+$  に対応する  $m$  個の都市が、 $G'$  に関する同一の軌道  $P_l$  に含まれており、かつ、 $m = |P_l|$  を満たすとする。このとき、その端点解は自明解となる。ここで、 $|P_l|$  は  $P_l$  の要素数 ( $P_l$  に含まれる都市の総数) である。

任意の 2 都市を互いに置換可能であるということは、直観的には、地理的条件が全ての都市で等しいということであり、そうした人口分布が停留点となることは明らかである。上記の命題 2 は、この直観を群論のことで定式化したものである。

### (4) 正方形格子状経済の軌道分解

正方形格子状経済の対称性を記述する 4 次二面体群  $D_4$  に対して命題 2 を適用するために、 $D_4$  およびその部分群に関する軌道分解を求める。なお、軌道分解を具体的に求めるに当たり、都市数  $K$  を指定する必要がある。本研究では具体的に、都市数  $K = 81$  (図-1 参照) を取り上げる。

$D_4$  に関する軌道分解を図-2 に示す。 $D_4$  に関する軌道は  $P_1, \dots, P_{15}$  の 15 種類であり、それらは図中に示す Type 0, Type 1M, Type 1V, Type 2 に分類される。ここで、各タイプの図は、同心の正方形により正方形格子状経済を簡易的に表しており、正方形上のマーカーが都市を表している。また、同一の正方形上の都市のうち、同一のマーカーで表されている都市が、同一の軌道に含まれる。これを踏まえ、 $D_4$  に関する軌道は、原点に位置する都市のみを含む Type 0 ( $P_1$ )、正方形の頂点に位置する都市を含む Type 1V ( $P_2, \dots, P_5$ )、正方形の辺の midpoint に位置する都市を含む Type 1M ( $P_6, \dots, P_9$ )、上記タイプ以外で原点からの距離が等しい都市を含む Type 2 ( $P_{10}, \dots, P_{15}$ ) の 4 タイプに分類される。

$D_4$  の部分群に関する軌道分解の結果については、付録 VI に示す。なお、 $D_4$  の部分群は以下のように与えられる<sup>7</sup>：

$$D_m^l = \{r^{4i/m}, sr^{l-1+4i/m} \mid i = 0, 1, \dots, m-1\} \quad (15)$$

$$C_m = \{r^{4i/m} \mid i = 0, 1, \dots, m-1\} \quad (16)$$

ここで、 $D_m^l$  ( $m = 1, 2, l = 1, 2, \dots, 4/m$ ) は  $m$  次二面体群であり、 $l$  は鏡映変換における軸の方向を表す。また、 $C_m$  ( $m = 1, 2, 4$ ) は  $m$  次巡回群である。

<sup>7</sup> Ikeda and Murota<sup>30)</sup> p.210 を参照されたい。

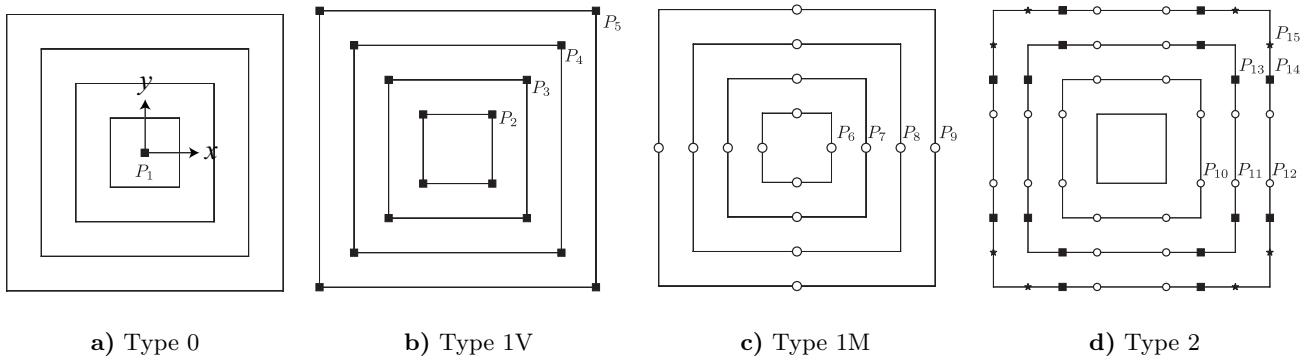


図-2 D<sub>4</sub>に関する軌道分解

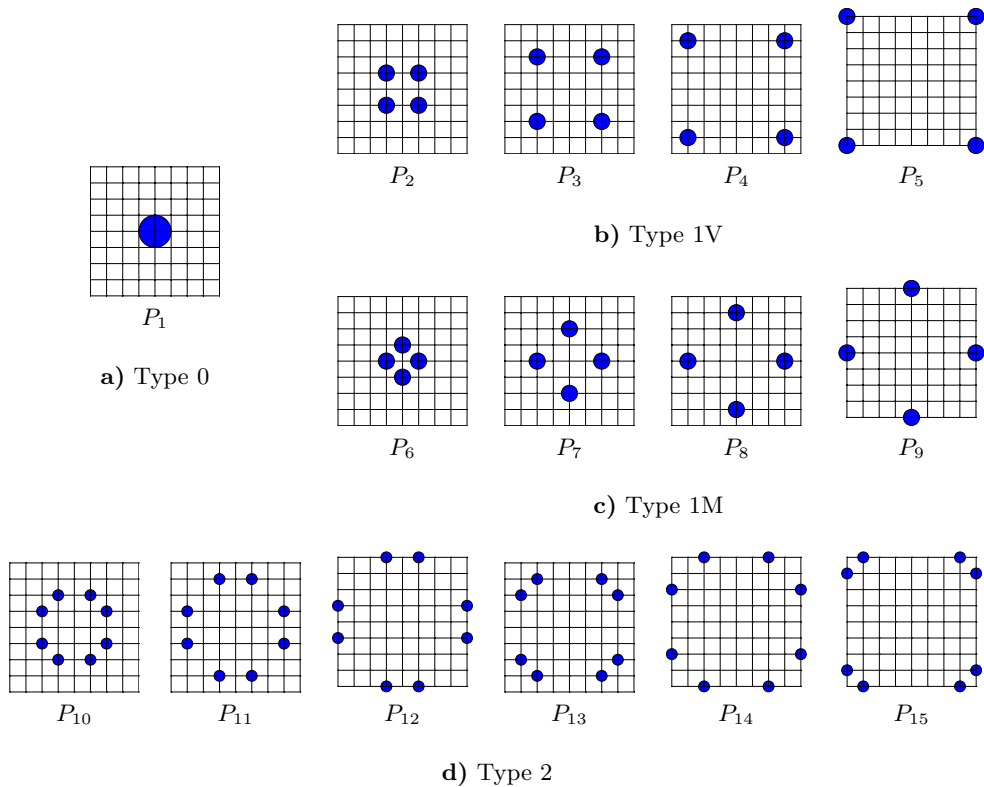


図-3 D<sub>4</sub>に関する軌道に対応した自明解

**(5) 正方形格子状経済における自明解**

前節および付録 VIにおいて、D<sub>4</sub> およびその部分群に関する軌道分解を示した。本節ではそれらの結果をもとに、都市数  $K = 81$  の正方形格子状経済における自明解を特定する。

D<sub>4</sub>に関する軌道分解の結果および命題 2 より、軌道に対応した、即ち、軌道に含まれる都市に均等に人口が分布した、図-3 に示す 15 種類の自明解が特定される。ここで、図中の円の大きさはその都市における人口の大きさを表す。

D<sub>4</sub>の部分群に関する軌道分解においても同様に、軌道に対応した自明解が特定される。例えば、C<sub>1</sub> に関す

る軌道分解（付録 VI，図-15 参照）においては、全ての都市が異なる軌道に分解されることから、任意の都市における人口の一極集中は自明解となる。

**4. 正方形格子状経済における幾何学的安定パターン**

本章では、具体的な集積経済モデルとして、Forslid and Ottaviano モデルを取り上げ、正方形格子状経済における幾何学的安定パターンを特定する。また、数値計算によってモデルの均衡経路を大域的に解析し、集積挙動を理解する上で幾何学的安定パターンの重要性

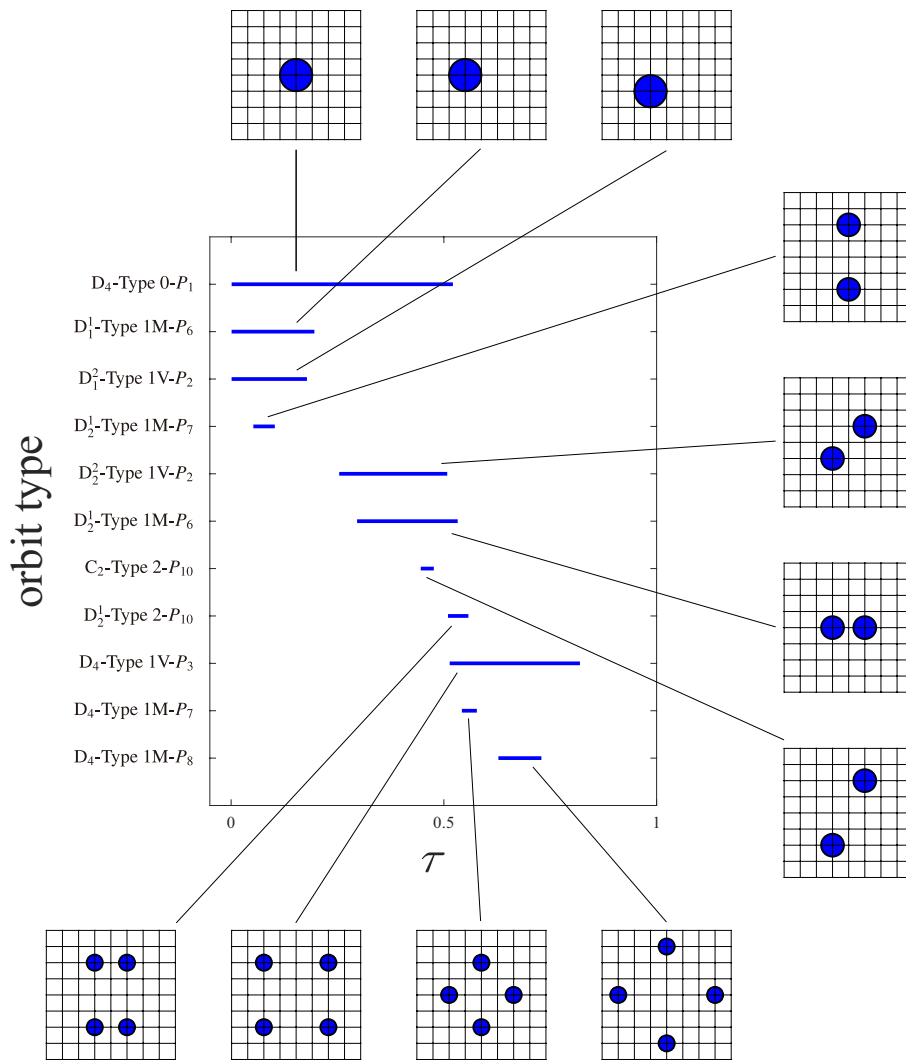


図-4 幾何学的安定パターンおよび安定なパラメータ  $\tau$  の区間 ( $\sigma = 5.0, \mu = 0.4$ )

が高いことを示す。

数値計算を行うに当たり、モデルの初期条件としては、代替の弾力性  $\sigma = 5.0$ 、工業財への出資割合  $\mu = 0.4$  を与えた。また、簡単のために、工業財の生産関数のパラメータは  $\alpha = \beta = 1$  とし、隣接する都市間の経路距離は  $d = 1/9$  とした。

### (1) 幾何学的安定パターンの特定

計算分岐理論に基づく局所安定性解析手法<sup>29)</sup>を用いて、3. で特定した自明解の安定性を解析した。得られた幾何学的安定パターンと、それらが安定となる構造パラメータ  $\tau$  の区間を図-4 にまとめる。なお、グラフの縦軸に記した呼称について、例えば「D<sub>4</sub>-Type 1M-P<sub>8</sub>」の場合は、「D<sub>4</sub>」に関する軌道分解における Type 1M の軌道 P<sub>8</sub>」に対応していることを意味する。

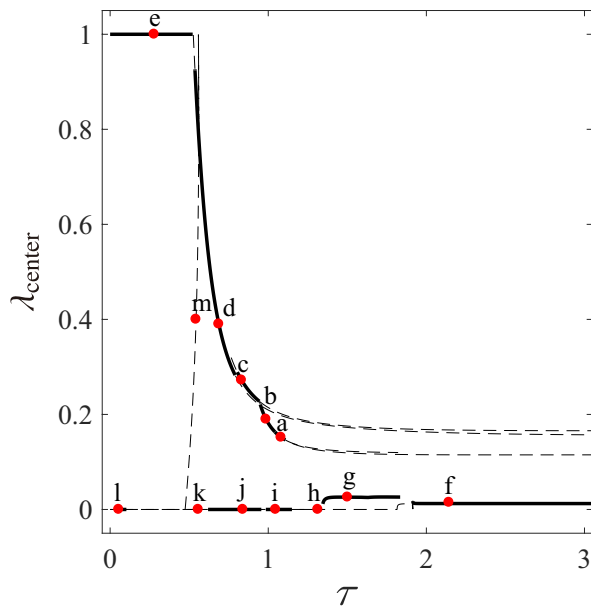
図-4 より、 $\tau$  が高い区間では、D<sub>4</sub> に関する軌道に対応した 4 極パターンが安定化している。 $\tau$  が低下する

につれて、より対称性の低い部分群である D<sub>2</sub><sup>1</sup>・D<sub>2</sub><sup>2</sup>・C<sub>2</sub> に関する軌道に対応した 2 極パターンが安定化ようになる。更に  $\tau$  が低下した区間では、特定の都市への完全な集積を意味する一極集中パターンのみが安定化しており、特に、中央の都市への一極集中パターン (D<sub>4</sub>-Type 0-P<sub>1</sub>) は、安定化傾向が顕著となっている。

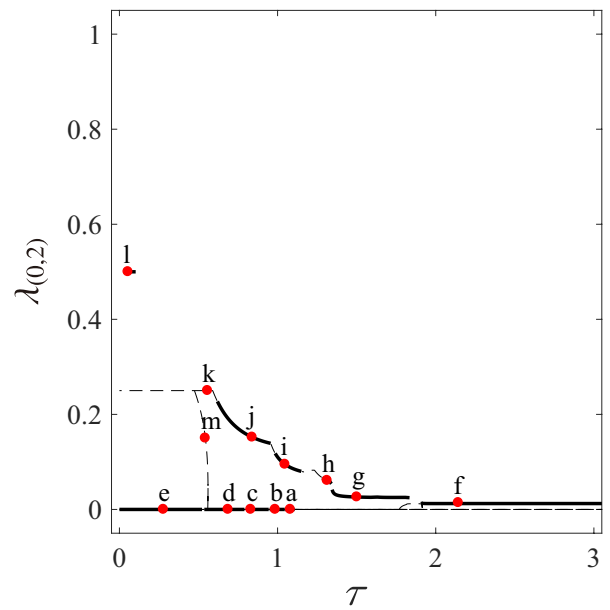
上記の解析結果に基づけば、 $\tau$  が高い区間では空間的にある程度分散したパターンの安定化傾向が高く、 $\tau$  が低い区間では空間的に密集したパターンの安定化傾向が高いと結論できる。なお、図-4 に示す以外の自明解は、 $\tau$  の値によらず不安定となった。但し、安定区間はモデルの初期条件 ( $\sigma$  および  $\mu$ ) に依存して決まることには注意を要する。

### (2) 分散状態からの均衡経路追跡

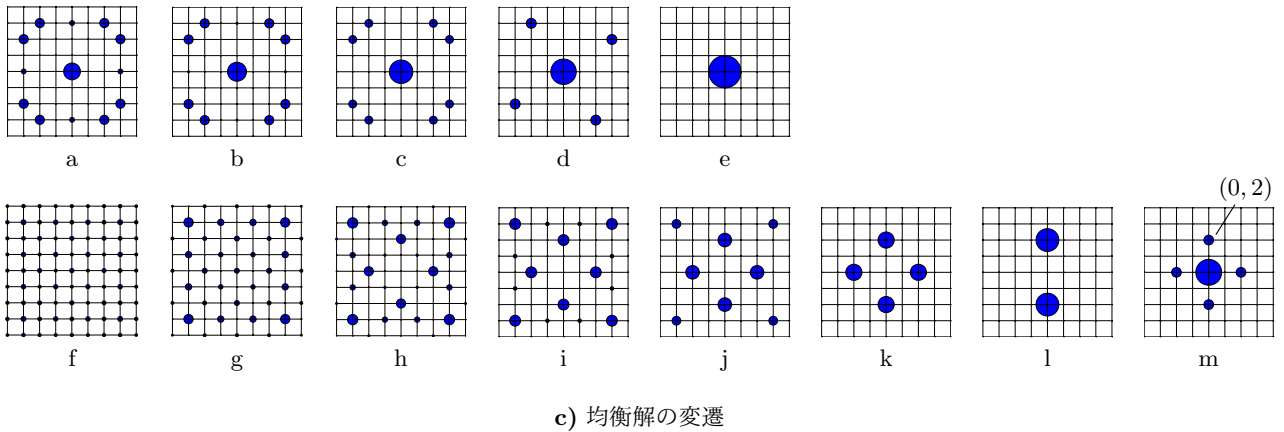
本節では、本研究で着目する自明解と、既存研究で利用されてきた数値計算によって得られる均衡経路と



a) 均衡経路（縦軸は中央の都市人口）



b) 均衡経路（縦軸は座標 (0, 2) の都市人口）



c) 均衡解の変遷

図-5 分散状態からの均衡経路

の関係を検討する。

数値計算によって得られた均衡経路を図-5 a) および b) に示す。なお、これらは同一の解析結果を示したものであり、グラフの縦軸として a) では中央の都市人口を、b) では座標 (0, 2) の都市人口をとっている。また、安定解は実線で、不安定解は破線で示している。図-5 a) および b) からは、

$$\begin{cases} \text{経路 1: } a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \\ \text{経路 2: } f \rightarrow g \rightarrow h \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow k \end{cases}$$

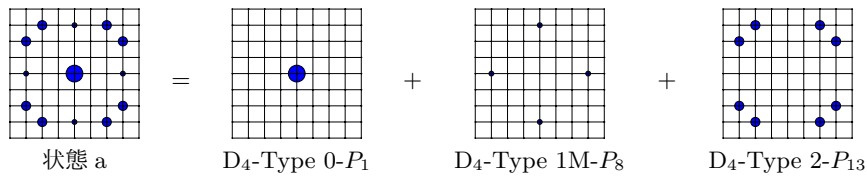
という均衡経路が安定となっていることを確認できる。

まず、経路 1 は、一極集中へとつながる均衡経路である。τ が高い区間では安定解が見られず、τ の低下に伴い、核都市および衛星都市の形成を意味する空間分布 (状態 a) が安定化する。更に τ が低下することにより、一極集中パターン (状態 e) に至る。

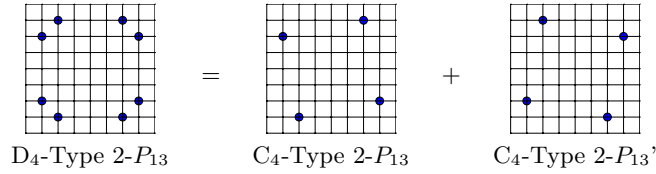
次に、経路 2 は、既存研究においてもよく見られる、

一様分散状態に近い空間分布を初期状態とした均衡経路である。τ が高い区間では一様分散状態に近い空間分布 (状態 f) が安定化する。τ の低下に伴い、特定の都市への集積が進展し、4 極パターン (状態 k) に至る。更に τ が低下することにより、2 極パターン (状態 l)、もしくは、中央の都市への集積過程 (状態 m) を経て一極集中パターン (状態 e) に至る。

均衡経路における均衡解の変遷の様子を図-5 c) に示す。これより、τ の変化による人口移動は、同一の軌道に含まれる都市ごとに進展することが分かる。例えば、経路 1 に関して、状態 a は図-6 a) に示す 3 つの軌道に対応した成分の合成と捉えられる。状態 a から τ が低下することにより、D<sub>4</sub>-Type 1M-P<sub>8</sub> の人口が分散し、状態 c に至る。そして、状態 c から τ が低下することにより、D<sub>4</sub>-Type 2-P<sub>13</sub> の人口が分散し、幾何学的安定パターンである状態 e に至る。ただし、D<sub>4</sub>-Type 2-P<sub>13</sub> の人口は



a) 状態 a の考察



b) D<sub>4</sub>-Type 2-*P*<sub>13</sub> の考察

図-6 軌道に着目した考察

一挙に分散せず、 $C_4$ -Type 2- $P_{13}$  の人口のみが分散し、状態 d を経て状態 e に至っている。 $D_4$ -Type 2- $P_{13}$  に対応した成分は、図-6 b) に示すように、2つの軌道に対応した成分の合成と捉えられる。状態 d を経ているのは、状態 c から  $\tau$  が低下した瞬間に、 $C_4$ -Type 2- $P_{13}$  の人口が分散する方向への分岐を生じるためである。なお、状態 d においては、状態 a~c において保持されてきた  $D_4$  に関する不変性を失い、その部分群である  $C_4$  に関する不変性を持つことになる。

経路 2 に関しても同様に、人口移動は同一の軌道に含まれる都市ごとに進展している。集積・分散の結果としてたどり着く状態 k は幾何学的安定パターンであり、状態 k から変遷しうる状態 e および l も幾何学的安定パターンである。

軌道に沿って人口集積・分散が進展したのち幾何学的安定パターンに至るという上記の性質は、正方形格子状経済の対称性に起因するものと考えられ、 $\tau$  の変化に伴う人口集積・分散のメカニズムに関する一般的な知見だといえる。ただし、どの軌道に沿って集積・分散が進展していくかは、 $\tau$  が高い区間においてどのような空間分布であったかに依存している。

以上の解析結果・考察に基づけば、正方形格子状経済における集積・分散の進展は、軌道に着目することによって把握可能である。そして、集積・分散の結果としてたどり着く空間分布は、幾何学的安定パターンによって把握可能である。

ここで、図-5 に示した均衡経路においては、非自明解が卓越している部分もある。しかし、非自明解に関しても、 $\tau$  が高い区間では空間的にある程度分散したパターンが安定化し、 $\tau$  が低い区間では空間的に集中したパターンが安定化するという、幾何学的安定パターンと同様の傾向が見られる。即ち、幾何学的安定パター

ンにより、均衡経路の概況は把握できている。また、 $\tau$  の値に応じて複雑に変化する非自明解を詳細に追跡して安定性を調べるよりも、網羅的に自明解の安定性を調べる方が効率的であり、かつ得られる情報量も多いといえる。

なお、図-6 に示した具体例のように、非自明解は軌道に対応した成分の合成として表せる。これは、非自明解が、自明解の線形和として表せることを意味する。また、 $\tau$  の変化に伴う非自明解の変化は、自明解の線形和の重みの変化によって表すことができる。即ち、自明解は非自明解の基底を与えるものと捉えられる。

## 5. おわりに

本研究では、集積経済モデルを用いた人口集積分析における、自明解という新しい視点を提案した。そして、試行錯誤的な数値計算を用いて均衡解を発見していく従来のアプローチに比べ、合理的・体系的にモデルの挙動が把握できるようになることを示した。本研究で行ったこれらの議論は、モデルの子細に依存していないため、汎用性のある一般論となる。即ち、群によって記述される対称性を持つ経済空間でさえあれば、本研究と同様の理論展開により、自明解および幾何学的安定パターンを特定可能である。

今後の課題として、周期境界を与えた無限格子による格子状経済において、自明解および幾何学的安定パターンを特定する必要がある。また、均衡解の安定性はモデルのバリエーションや初期条件の値に依存するため、それらが変化したとき、幾何学的安定パターンにどのように影響するかについても分析する必要がある。これらは正方形格子のみならず、正三角形格子に関しても未解決であるため、重要な研究課題である。



## 付録 I モデルの詳細

本研究で取り上げる Forslid and Ottaviano モデルの詳細を示す。なお、短期均衡における諸々の関係式の導出については、Ikeda et al.<sup>17)</sup> を参照されたい。

### (1) 基本設定

#### a) 労働者

労働者は、skilled worker と unskilled worker に分類される。skilled worker は、居住する都市を自由に選択する移動主体であり、skilled worker の総人口は 1 とする。なお、本文中で単に「人口」と述べた場合には、「skilled worker の人口」を指している。unskilled worker は、自らが居住する都市を選択できず、各都市に一律に分布しており、各都市における unskilled worker の人口は 1 とする。

#### b) 都市経済システム

離散的な  $K$  個の都市からなる都市経済システムを考える。財の生産部門には、農業部門と工業部門が存在する。農業部門は、収穫一定の技術により、unskilled worker の労働を生産要素として 1 種類の同質な財を生産する、完全競争的な部門である。工業部門は、収穫逓増の技術により、skilled worker と unskilled worker の労働を生産要素として差別化された財を生産する、独占競争的な部門である。

#### c) 輸送費用

ある都市で生産された財は他の都市へと輸送でき、どの都市においても消費できる。農業財には輸送費用がかからない。一方、工業財には氷塊型の輸送費用がかかり、1 単位の工業財を都市  $i$  から  $j$  に輸送するとき、 $1/\tau_{ij}$  単位だけが到達する。 $\tau_{ij}$  は以下のように定義される：

$$\tau_{ij} = \exp(\tau t_{ij}) \quad (\text{I.1})$$

ここで、 $\tau$  は輸送費用パラメータ（モデルの構造パラメータ）、 $t_{ij}$  は都市  $ij$  間の最短経路距離である。

### (2) 短期均衡

skilled worker が都市間を移動しない短期間での均衡状態を考え、これを短期均衡と呼ぶ。短期均衡における都市  $i$  の価格指数  $\rho_i$  は、以下のよう与えられる：

$$\rho_i = \frac{\sigma\beta}{\sigma-1} \left( \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^K \lambda_j d_{ji} \right)^{1/(1-\sigma)} \quad (\text{I.2})$$

ここで、 $\sigma (> 1)$  は代替の弾力性であり、 $\alpha$  および  $\beta$  は工業財の生産関数のパラメータである。また、 $d_{ij}$  は都市  $ij$  間の交易条件を表す指標であり、

$$d_{ji} = \tau_{ji}^{1-\sigma} \quad (\text{I.3})$$

である。

都市  $i$  の均衡賃金  $w_i$  は、以下の関係式によって与えられる：

$$w_i = \frac{\mu}{\sigma} \sum_{j=1}^K \frac{d_{ij}}{\Delta_j} (w_j \lambda_j + 1) \quad (\text{I.4})$$

ここで、 $\mu$  は消費者の工業財への出資割合である。また、 $\Delta_i$  は都市  $i$  の工業財市場の規模を表す指標であり、

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^K d_{ki} \lambda_k \quad (\text{I.5})$$

である。

都市  $i$  の間接効用関数  $v_i$  は、以下のように与えられる：

$$v_i = \frac{\mu}{\sigma-1} \ln[\Delta_i] + \ln[w_i] \quad (\text{I.6})$$

この間接効用関数 (I.6) を用いることにより、skilled worker の都市間移動を考慮した均衡条件 (1) が定式化される。ただし、ここでは分析に影響を及ぼさない定数項を省略した。

## 付録 II 端点解の安定性

支配方程式 (4) および Jacobi 行列 (5) は、一般性を失うことなく、

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} F_+(\lambda_+, \lambda_0, \tau) \\ F_0(\lambda_+, \lambda_0, \tau) \end{bmatrix}, \quad \hat{J} = \begin{bmatrix} J_+ & J_{+0} \\ O & J_0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

のように書き換えられる。ここで、

$$J_+ = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \left\{ \frac{\partial(v_i - \bar{v})}{\partial \lambda_j} \mid i, j = 1, \dots, m \right\} \quad (\text{II.2})$$

$$J_{+0} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \times \left\{ \frac{\partial(v_i - \bar{v})}{\partial \lambda_j} \mid i = 1, \dots, m; j = m+1, \dots, K \right\} \quad (\text{II.3})$$

$$J_0 = \text{diag}(v_{m+1} - \bar{v}, \dots, v_K - \bar{v}) \quad (\text{II.4})$$

である。このとき、端点解が安定となるための条件は、 $\hat{J}$  の全ての固有値が負となることであり、それは以下に示す 2 つの条件を満たすことと同値である：

$$\begin{cases} \lambda_+ \text{ の安定性条件: } J_+ \text{ の全ての固有値が負} \\ \lambda_0 \text{ の存続性条件: } J_0 \text{ の全ての対角成分が負} \end{cases}$$

端点解の安定性は、 $\hat{J}$  の特異点において変化する。特異点は、 $J_+$  が特異行列となる break point と、 $J_0$  が特異行列となる non-break point に分類できる<sup>8</sup>。break point において、 $\lambda_+$  の安定性条件が満たされなくなることにより、対称性を喪失した分岐解が発生する。

<sup>8</sup> 別種の特異点として、 $\tau$  の極大・極小点も存在するが、本論文の議論においては重要とならない。

付録 III 表現行列および同変性に関する補足

(1)  $D_4$  の表現行列

Ikeda et al.<sup>17)</sup> により, 周期的な正方形格子状経済の対称性を記述する群の表現行列が具体的に示されている. 本研究で取り上げる非周期的な正方形格子状経済においても, 同様の理論展開により,  $D_4$  の表現行列  $T(r)$  および  $T(s)$  の具体形を記述可能である. また,  $T(g)$  ( $g \in D_4$ ) は,

$$T(r^j) = \{T(r)\}^j, T(sr^j) = T(s)\{T(r)\}^j \quad (\text{III.1})$$

によって与えられる. ここで,  $j = 0, 1, \dots, 3$  である.

(2) 同変性 (11) の証明

都市を  $P = \{1, \dots, K\}$  という集合で表す. このとき,  $D_4$  の変換作用は,  $P = \{1, \dots, K\}$  の置換に対応する. いま, ある変換作用  $g \in D_4$  により,  $i \in P$  と  $j \in P$  が置換されるとする. このとき, 間接効用関数 (I.6) の形状から,

$$v_i(T(g)\lambda, \tau) = v_j(\lambda, \tau) \quad (\text{III.2})$$

$$\bar{v}(T(g)\lambda, \tau) = \bar{v}(\lambda, \tau) \quad (\text{III.3})$$

を得る. これより,

$$F_i(T(g)\lambda, \tau) = (v_j(\lambda, \tau) - \bar{v}(\lambda, \tau))\lambda_j = F_j(\lambda, \tau) \quad (\text{III.4})$$

が得られ, この関係式は同変性 (11) を示している.

付録 IV 命題 1 の証明

$\lambda_+$  の成分は,

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 1/m \quad (\text{IV.1})$$

である. 表現行列  $T_+(g)$  ( $g \in G'$ ) によって,  $\lambda_+$  の任意の成分どうしが置換できることから,

$$v_1 = \dots = v_m \quad (\text{IV.2})$$

を得る. これより,

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = v_i \quad (\text{IV.3})$$

が得られ,

$$v_i - \bar{v} = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (\text{IV.4})$$

を得る. 従って,

$$\mathbf{F}_+(\frac{1}{m}\mathbf{1}, \mathbf{0}, \tau) = \mathbf{0} \quad (\text{IV.5})$$

を得る. また,  $\lambda_0$  の成分は

$$\lambda_j = 0 \quad (i = m + 1, \dots, n) \quad (\text{IV.6})$$

である. 従って,

$$\mathbf{F}_0(\frac{1}{m}\mathbf{1}, \mathbf{0}, \tau) = \mathbf{0} \quad (\text{IV.7})$$

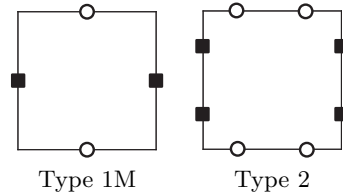


図-7  $D_2^2$  に関する軌道分解

を得る. (IV.5) および (IV.7) より,

$$\hat{\mathbf{F}}(\frac{1}{m}\mathbf{1}, \mathbf{0}, \tau) = \mathbf{0} \quad (\text{IV.8})$$

を得る. 従って,  $(\lambda_+, \lambda_0, \tau) = (\frac{1}{m}\mathbf{1}, \mathbf{0}, \tau)$  は支配方程式 (4) を満足する自明解である.

付録 V 命題 2 の証明

軌道分解の定義から, 軌道  $P_l$  に関して, 「 $G'$  の変換作用により,  $P_l$  に含まれる任意の 2 都市を互いに置換可能である」という条件が満たされる. これは, 命題 2 で想定した端点解に関して, 「 $G'$  の表現行列  $T_+(g)$  ( $g \in G'$ ) により,  $P_l$  に含まれる任意の 2 都市に対応した  $\lambda_+$  の 2 成分を互いに置換可能である」という条件が満たされることと同値である. また, 人口が  $m$  個の都市に均等に分布していることから,  $G'$  に関する不変性

$$T_+(g)\lambda_+ = \lambda_+, \quad g \in G' \quad (\text{V.1})$$

が満たされる. 従って, 命題 1 における 2 つの条件が満たされることから, 命題 2 で想定した端点解は自明解となる.

付録 VI  $D_4$  の部分群に関する軌道分解

$D_4$  の部分群は, 具体的には以下の 9 種類である:

$$D_2^1 = \{e, r^2, s, sr^2\} \quad (\text{VI.1})$$

$$D_2^2 = \{e, r^2, sr, sr^3\} \quad (\text{VI.2})$$

$$D_1^1 = \{e, s\} \quad (\text{VI.3})$$

$$D_1^2 = \{e, sr\} \quad (\text{VI.4})$$

$$D_1^3 = \{e, sr^2\} \quad (\text{VI.5})$$

$$D_1^4 = \{e, sr^3\} \quad (\text{VI.6})$$

$$C_4 = \{e, r, r^2, r^3\} \quad (\text{VI.7})$$

$$C_2 = \{e, r^2\} \quad (\text{VI.8})$$

$$C_1 = \{e\} \quad (\text{VI.9})$$

これらの部分群に関する軌道分解を図-7 ~ 図-15 に示す. ここで, 図中における各タイプの正方形は,  $D_4$  に関する軌道分解 (図-2 参照) における各タイプの正方形に対応している.  $D_4$  に関する軌道分解において同一の軌道に属していた都市が, 各タイプの正方形におい

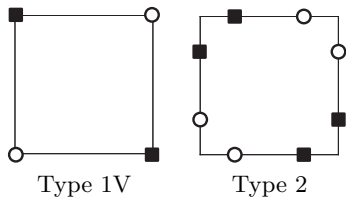


図-8  $D_2^2$  に関する軌道分解

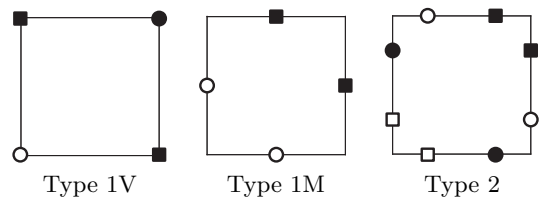


図-12  $D_1^4$  に関する軌道分解

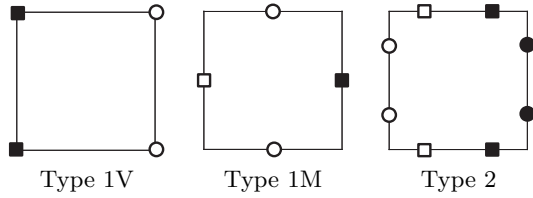


図-9  $D_1^1$  に関する軌道分解

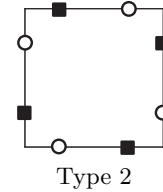


図-13  $C_4$  に関する軌道分解

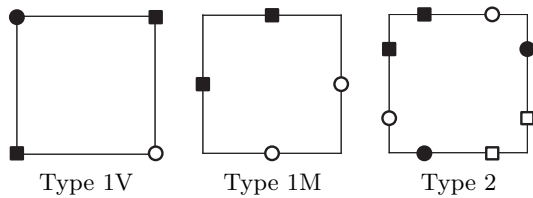


図-10  $D_1^2$  に関する軌道分解

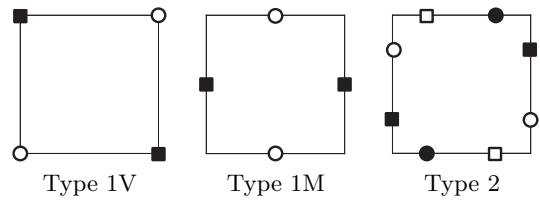


図-14  $C_2$  に関する軌道分解

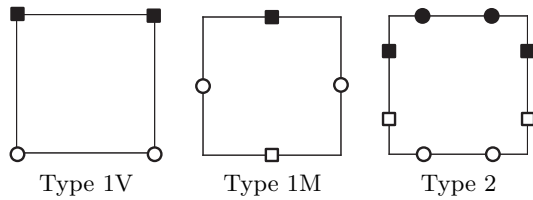


図-11  $D_1^3$  に関する軌道分解

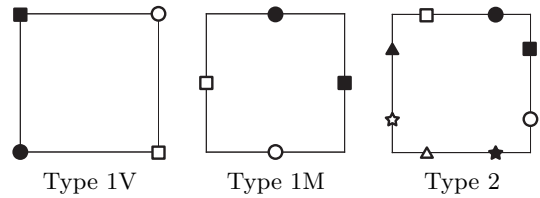


図-15  $C_1$  に関する軌道分解

て同一のマーカーで表されている都市ごとに、別の軌道へと分解される。

例えば  $D_2^2$  に関する軌道分解（図-7 参照）では、Type 1V の軌道は変化せず、Type 1M および Type 2 の軌道が 2 つに増加し、軌道の総数は 25 となる。また、例えば  $C_1$  に関する軌道分解（図-15 参照）では、全ての都市が異なる軌道に分解され、軌道の総数は 81 となる。なお、変化しなかったタイプについては、図を省略している。また、Type 0 の軌道 ( $P_1$ ) については、何れの部分群に関する軌道分解においても変化していない。

参考文献

1) Forslid, R. and Ottaviano, G. I. P. : An analytically solvable core-periphery model, *Journal of Economic Geography*, Vol.3, pp.229-340, 2003.

2) Fujita, M., Krugman, P. and Venables, A. J. : *The Spatial Economy: Cities, Regions and International Trade*, MIT Press, 1999.  
 3) Baldwin, R. E., Forslid, R., Martin, P., Ottaviano, G. I. P. and Robert-Nicoud, F. : *Economic Geography and Public Policy*, Princeton University Press, 2003.  
 4) Combes, P.-P., Mayer, T. and Thisse, J.-F. : *Economic Geography: The integration of Regions and Nations*, Princeton University Press, 2008.  
 5) Fujita, M. and Thisse, J.-F. : *Economics of agglomeration: Cities, Industrial Location, and Globalization*, Cambridge University Press, 2013.  
 6) 佐藤泰裕, 田淵隆俊, 山本和博 : 空間経済学, 有斐閣, 2011.

- 7) 曾道智, 高塚創 : 空間経済学, 東洋経済新聞社, 2016.
- 8) Krugman, P. : *The Self-Organizing Economy*, Blackwell, 1996.
- 9) Christaller, W. : *Die zentralen Orte in Süddeutschland*, Gustav Fischer, Jena, 1933. English translation: *Central Places in Southern Germany*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- 10) Lösch, A. : *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Gustav Fischer, Jena, 1940. English translation: *The Economics of Location*, Yale University Press, New Haven, 1954.
- 11) 久武昌人, 山崎清 : 独占的競争等を取り入れた多地域 CGE モデルの構築, *RIETI Discussion Paper Series*, No.06-J-046, 2006.
- 12) 佐藤徹治, 樋野誠一, 稲垣雅一 : 産業連関を考慮した多地域計量経済モデルと NEG 型応用一般均衡モデルの実証比較, *土木計画学研究・論文集*, Vol.25, No.1, pp. 59–66, 2008.
- 13) 石倉智樹 : 人口減少に伴う都市の縮退と集積に関する基礎的定量分析, *都市計画学論文集*, Vol.47, No.7, pp. 68–73, 2012.
- 14) 高山雄貴, 赤松隆, 石倉智樹 : 新経済地理学に基づく空間応用一般均衡モデルの開発, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.70, No.4, pp. 245–258, 2014.
- 15) 高山雄貴, 赤松隆, 石倉智樹 : 生産要素の地域間移動・集積の経済を考慮した空間応用一般均衡モデルの開発, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.72, No.2, pp. 211–230, 2016.
- 16) 高山雄貴, 梶大介, 服部佑哉, 今川奈保, 石倉智樹 : 集積の経済と労働者の地域間移動を考慮した空間応用一般均衡分析, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.74, No.1, pp. 82–100, 2018.
- 17) Ikeda, K., Onda, M., Takayama, Y. : Spatial period doubling, invariant pattern, and break point in economic agglomeration in two dimensions, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol.92, pp.129–152, 2018.
- 18) 大澤実, 赤松隆, 高山雄貴 : Harris & Wilson (1978) モデル再考 : 集積の経済を考慮した商業立地モデルの分岐解析, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.71, No.3, pp. 141–155, 2015.
- 19) 大澤実, 赤松隆 : 集積経済理論の実証におけるモデル構造選択の課題, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.73, No.1, pp. 1–15, 2017.
- 20) Akamatsu, T., Mori, T., Osawa, M., Takayama, Y. : Spatial scale of agglomeration and dispersion: Theoretical foundations and empirical implications, *MPRA Paper*, University Library of Munich, Germany, pp.1–53, 2018.
- 21) Ikeda, K., Murota, K. and Akamatsu, T. : Self-organization of Lösch's hexagons in economic agglomeration for core-periphery models, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.22, No.8, pp.1230026-1–1230026-29, 2012.
- 22) Ikeda, K., Murota, K., Akamatsu, T., Kono, T. and Takayama Y. : Self-organization of hexagonal agglomeration patterns in new economic geography models, *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol.99, pp.32-52, 2014.
- 23) Ikeda, K., Murota, K. and Takayama, Y. : Stable economic agglomeration patterns in two dimensions: beyond the scope of central place theory, *Journal of Regional Science*, Vol.57, pp.132–172, 2017.
- 24) Ikeda, K., Akamatsu, T. and Kono, T. : Spatial period-doubling agglomeration of a core-periphery model with a system of cities, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol.36(5), pp.754–778, 2012.
- 25) Akamatsu, T., Takayama, Y. and Ikeda, K. : Spatial discounting, Fourier, and racetrack economy: A recipe for the analysis of spatial agglomeration models, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol.36(11), pp.1729–1759, 2012.
- 26) Osawa, M., Akamatsu, T., and Takayama, Y. : Harris and Wilson (1978) Model Revisited: The spatial period-doubling cascade in an urban retail model, *Journal of Regional Science*, Vol.57(3), pp.442–466, 2017.
- 27) Tabuchi, T. and Thisse, J.-F. : A new economic geography model of central places, *Journal of Urban Economics*, Vol.69, pp.240–252, 2011.
- 28) Sandholm, W. H. : *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, 2010.
- 29) 藤井文夫, 大崎純, 池田清宏 : 構造と材料の分岐力学, 計算工学シリーズ 3, コロナ社, 2005.
- 30) Ikeda, K. and Murota, K. : *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials*, Second Edition, Springer-Verlag, Tokyo, 2010.

(2018. 7. 31 受付)

## STUDY OF GEOMETRICALLY STABLE PATTERNS ON A SQUARE LATTICE ECONOMY

Yosuke KOGURE, Mikiyoshi ONDA, Minoru OSAWA, Yuki TAKAYAMA and  
Kiyohiro IKEDA

In the analysis of many-region spatial agglomeration models, it is practically impossible to find all stable equilibria because the governing equations exhibit complex bifurcation behaviour in line with changes in the level of transport cost. In this paper, a systematic method for finding “trivial solutions,” a special class of equilibria, is introduced. Trivial solutions satisfy the governing equation for any values of the transport cost parameter while retaining their geographical patterns. Trivial solutions can be systematically computed and classified by analysing the group that expresses the symmetry of the governing equations. As a specific example, the trivial solutions on a square lattice economy with boundary is explicitly given. Stability properties of the trivial solutions are studied through numerical experiments employing Forslid and Ottaviano (2003)'s model.