二次元空間 Fujita-Ogawa モデルの確率安定性解析

秋本 克哉[1]・赤松 隆[2]

[1]学生会員　東北大学　大学院情報科学研究科人間社会情報科学専攻（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408）
E-mail: katsuya.akimoto.q2@dc.tohoku.ac.jp
[2]正会員　東北大学教授　大学院情報科学研究科人間社会情報科学専攻（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408）
E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

Fujita and Ogawa(1982) モデルは，複数都心の創発を初めて示した都心形成モデルである．安定解として創発する均衡立地パターンが一次元空間では明らかにされたが，二次元空間では明らかになっていない．本研究では，確率安定性の概念を用いて安定な均衡立地パターンを明らかにする．複数都心パターンが安定解として創発することを明らかにした．

Key Words: 集積経済モデル，都心形成，複数均衡，確率安定性，二次元空間

1. はじめに

多くの大都市では，複数の副都心が形成される．この現象は多くの都市で見られる一般的なものにも関わらず，その形成メカニズムを経済学的な論理と整合的に説明することは容易ではない．この難題にチャレンジした理論研究として，代表的なものが Fujita and Ogawa[1)] モデル (以下 FO モデル) である．このモデルでは，2 種類の立地主体 (企業と消費者) が土地・労働市場で競合することによって，複数都心が形成されると説明している．しかし，Fujita and Ogawa[1)] や Berliant and Wang[2)] などの既存研究は，ありうる複数の均衡解を特定しただけでありその安定性については議論していない．最近の研究[3)4)] によって安定解として創発する均衡立地パターンが一次元空間では明らかにされたが，二次元空間では明らかになっていない[1]．

本研究の目的は，二次元空間 FO モデルの安定な均衡立地パターンを明らかにすることである．複数の均衡解から安定な均衡解を選択するために，確率安定性の概念を採用する．確率安定性の概念を用いれば，大域的安定な均衡解を特定することができる．確率安定性の厳密な解析は一般には適用が容易ではない．しかし，利得関数のポテンシャルを定義できるモデルでは，「ポテンシャル最大点と確率安定解は一致する」 (Sandholm[7)]) という定理を利用した解析が可能となる．本研究では，FO モデルがポテンシャルを定義可能であることを活用し，二次元空間で FO モデルの確率安定解を明らかにした．

2. Fujita - Ogawa モデル

(1) 基本設定

K 個の離散的な立地点集合 $\mathcal{K} \equiv \{1, ..., K\}$ から成る，二次元の格子状空間をもつ都市を考える[2]．地点 $i, j \in \mathcal{K}$ 間のユークリッド距離を T_{ij} とする．この都市の総土地面積を S とし，各地点の土地面積を $\bar{S} \equiv S/K$ に固定されている．都市には，消費者と企業が存在し，それぞれの総数を N, M とする．企業は自らの利潤を最大化するように立地点を選択し，消費者は自らの効用を最大化するように居住地と勤務地を選択する．立地主体の異質性は考慮せず，それぞれ同質的な行動をとるものとする．また，企業と消費者の間には雇用関係が存在する．

(2) 消費者行動

地点 i に居住するの消費者は，地点 j に立地する企業へ通勤する．消費者は，地代と通勤費用を把握しており，勤務先である地点 j の企業から賃金 W_j を得て，自らの効用が最大になるように，居住地および合成財の消費量 z を選択する．消費者の直接効用は，$U(s = S_h, z)$ とかける．ここで，消費者一人あたりの消費土地面積 s は一定値 $S_h > 0$ に固定する．合成財は標準化された一定の価格 1 で都市の外部から移入される．消費者の予

[1] 二次元空間 FO モデルを扱った既存研究として Ogawa and Fujita[5)], Lucas and Rossi-Hansberg[6)] などがあるが，実質的に一次元空間の均衡立地パターンのみ考慮されており，解の安定性については全く議論されていない．

[2] 本稿では，周期境界をもつ正方形格子状の二次元空間を想定し，確率安定性解析を行う．

算制約は，

$$W_j - tT_{ij} = S_h R_i + z \tag{1}$$

である．ここで，R_i は地点 i の地代，$t > 0$ は通勤費用パラメータを表す．

消費者が居住地 i と勤務地 j を選択する行動は間接効用最大化の形で，以下のように表現できる：

$$\max_{i,j} . \ z_{i,j} \tag{2}$$

$$\text{where } z_{ij} = \arg\max_{z} \ U(s = S_h, z)$$

$$= W_j - tT_{ij} - S_h R_i \tag{3}$$

すなわち，まず，各居住地で合成財の最適消費量を決定し，その結果決まる間接効用が最大の居住地 i と勤務地 j を選択する．この選択行動によって，i から j へ通勤する消費者数 n_{ij} が決定する．

(3) 企業行動

企業は土地と労働を生産要素として財を生産する．企業の投入する土地面積 S_f と労働投入量 L は一定とする．財の産出量 A_i は他企業とのコミュニケーション (交流) により得られる便益の大きさで表される．企業は利潤 Π_i を最大化するように立地点 i を選択する：

$$\max_{i} . \ \Pi_i(\boldsymbol{m}) = A_i(\boldsymbol{m}) - S_f R_i - LW_i \tag{4}$$

ここで，S_f, L はそれぞれ固定的に必要な土地面積（定数）と雇用者数（定数）であり，$\boldsymbol{m} \equiv [m_i]$ は各居住地に立地する企業数である．

企業間交流便益は，都市の企業分布 $\boldsymbol{m}$ に依存する：

$$A_i(\boldsymbol{m}) = \sum_j d_{ij} m_j \tag{5}$$

ここで，d_{ij} は距離減衰効果であり，企業間交通費用パラメータ $\tau > 0$ を用いて次のように表す：

$$d_{ij} = \exp(-\tau T_{ij}) \tag{6}$$

すなわち，多数の企業が近接して立地するほど，企業はより大きな便益を得ることができる．

(4) 均衡条件

FO モデルの均衡状態は，以下の条件が同時に満たされた状態である．

a) 空間均衡条件

空間均衡条件とは各経済主体の立地選択に関する無裁定条件である．まず，消費者が立地選択に関して均衡状態にあるならば，どの消費者も立地点変更の動機を持たない．この条件は，以下の式で表現される：

$$\begin{cases} z^* = W_j - tT_{ij} - S_h R_i & \text{if } n_{ij} > 0 \\ z^* \geq W_j - tT_{ij} - S_h R_i & \text{if } n_{ij} = 0 \end{cases} \quad \forall i, j \in \mathcal{K} \tag{7}$$

ここで，z^* は内生的に決定する均衡効用水準である．

消費者の無裁定条件と同様の関係式が，企業の利潤関数 Π^* についても成り立つ．すなわち，企業が立地選択に関して均衡状態にあるならば，どの企業も立地点変更の動機を持たない：

$$\begin{cases} \Pi^* = A_i(\boldsymbol{m}) - S_f R_i - W_i L & \text{if } m_i > 0 \\ \Pi^* \geq A_i(\boldsymbol{m}) - S_f R_i - W_i L & \text{if } m_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{8}$$

ここで，Π^* は内生的に決定する均衡利潤を表す．

b) 市場均衡条件

土地市場は，正の地代がついていれば供給面積と需要面積が一致する：

$$\begin{cases} \bar{S} = S_h \sum_j n_{ij} + S_f m_i & \text{if } R_i > 0 \\ \bar{S} \geq S_h \sum_j n_{ij} + S_f m_i & \text{if } R_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{9}$$

この土地市場の需給均衡条件から均衡地代 R_i が内生的に決定する．

労働市場は，正の賃金がついていれば，企業の求める労働者数と消費者数が一致する：

$$\begin{cases} \sum_i n_{ij} = Lm_j & \text{if } W_j > 0 \\ \sum_i n_{ij} \geq Lm_j & \text{if } W_j = 0 \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{K} \tag{10}$$

労働市場の均衡条件から均衡賃金 W_j が内生的に決定する．

c) 立地主体数の保存則

FO モデルでは閉じた都市を想定しているため，各経済主体数について以下の保存条件が成り立つ：

$$\sum_i m_i = M \tag{11}$$

$$\sum_i \sum_j n_{ij} = N \tag{12}$$

3. ポテンシャル・ゲームへの帰着

本章では， FO モデルはポテンシャル構築可能であるを示し，ポテンシャルゲームとして解釈可能であることを示す．

(1) 等価な最適化問題

FO モデルでは，利潤関数のベクトル場のヤコビ行列が対称となるので，以下の命題が得られる．

命題 1 FO モデルの空間均衡状態は，企業分布 $\boldsymbol{m} = [m_i]$ と消費者分布 $\boldsymbol{n} = [n_{ij}]$ の二種類の変数を持つポテンシャル最大化問題の解と一致する：

$$\max_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}} . \ Z(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \equiv Z^F(\boldsymbol{m}) - Z^H(\boldsymbol{n}) \tag{13}$$

$$\text{s.t.} \ \ \boldsymbol{m} \in \mathcal{M} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{n} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{m}) \tag{15}$$

ここで，

$$Z^F(\boldsymbol{m}) = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathcal{K}}\sum_{j\in\mathcal{K}} d_{ij} m_i m_j \tag{16}$$

$$Z^H(\boldsymbol{n}) = t\sum_{i\in\mathcal{K}}\sum_{j\in\mathcal{K}} T_{ij} n_{ij} \tag{17}$$

$$\mathcal{M} = \left\{\boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{0} \,\middle|\, \textstyle\sum_{i\in\mathcal{K}} m_i = M \right\} \tag{18}$$

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{m}) = \left\{\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0} \,\middle|\, \begin{array}{ll} \bar{S} \geq S_h \sum_{j\in\mathcal{K}} n_{ij} + S_f m_i & \forall i \\ \sum_{i\in\mathcal{K}} n_{ij} \geq L m_j & \forall j \\ \sum_{i\in\mathcal{K}}\sum_{j\in\mathcal{K}} n_{ij} = N & \end{array}\right\} \tag{19}$$

である．

(2) 長期・短期の問題への分解

式 (13) ～ (15) の最適化問題に Benders decomposition を適用する．すなわち，本問題は 2 つの最適化問題から成り立っていると解釈でき，短期・長期の問題へと分解が可能である．短期では，企業分布 $\boldsymbol{m}$ を与件とし，消費者のみが居住地・勤務地選択を行う．短期の最適化問題は，

$$[\mathbf{P}]\ \min_{\boldsymbol{n}}.\ Z^H(\boldsymbol{n}) \tag{20}$$

$$\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{n} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{m}) \tag{21}$$

である．[**P**] の双対問題は以下のように与えられる：

$$[\mathbf{D}]\ \max_{z^*,\boldsymbol{R},\boldsymbol{W}}.\ Z^{H*}(z^*, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{W}|\boldsymbol{m})$$

$$\equiv z^* N + \sum_{i\in\mathcal{K}} (R_i S_h + W_i L) m_i - \bar{S}\sum_{i\in\mathcal{K}} R_i \tag{22}$$

$$\text{s.t.}\ \ z^* \geq W_j - tT_{ij} - S_h R_i \quad \forall i, j \in \mathcal{K} \tag{23}$$

$$R_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{24}$$

$$W_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{K} \tag{25}$$

[**P**] と [**D**] の最適値関数は与件のパラメータ $\boldsymbol{m}$ の関数であり，それぞれ $\hat{Z}^H(\boldsymbol{m}), \hat{Z}^{H*}(\boldsymbol{m})$ とする．強双対定理より，$\hat{Z}^H(\boldsymbol{m}) = \hat{Z}^{H*}(\boldsymbol{m})$ が成立する．

次に，長期の最適化問題を考える．長期では企業が立地点を選択することができる．短期の最適値関数を用いて，長期の問題は次のように定式化できる：

$$\max_{\boldsymbol{m}}.\ \hat{Z}^F(\boldsymbol{m}) \equiv Z^F(\boldsymbol{m}) - \hat{Z}^{H*}(\boldsymbol{m}) \tag{26}$$

$$\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{m} \in \mathcal{M} \tag{27}$$

以上より，式 (13) ～ (15) の最適化問題は企業分布 $\boldsymbol{m}$ のみを変数とする最適化問題に帰着させることができる．ここで，

$$\frac{\partial \hat{Z}^F(\boldsymbol{m})}{\partial m_i} = \Pi_i, \ \ i \in \mathcal{K} \tag{28}$$

となるので，$\hat{Z}^F(\boldsymbol{m})$ は利潤関数 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{m})$ のポテンシャル関数である．したがって，FO モデルはポテンシャル関数 $\hat{Z}^F(\boldsymbol{m})$ を持つポテンシャルゲームである．

4. ポテンシャル関数と確率安定性

FO モデルでは均衡解が複数存在しうる．そのため，均衡解のうちどれが最も実現しやすいか選択する必要がある．本研究では大域的安定となる解を選択するために確率安定性概念を採用する．

(1) 確率的進化ダイナミクス

確率安定性を定義するために，以下に述べる確率論的進化ダイナミクスを考える．まず，状態空間を離散化する．すなわち，エージェント数 N を十分大きい整数とする．このとき集団状態は，χ の離散的なメッシュ上に定義される：

$$\chi^N \equiv \{\boldsymbol{x} \in (1/N)\mathbb{Z}^n_+ | \sum_{i\in\mathcal{K}} x_i = 1\} \subset \chi \tag{29}$$

ここで，$\mathbb{Z}^n_+$ は n 次元非負整数の集合を表す．

ある時刻 t で 1 人のエージェントがランダムに選ばれ戦略変更の機会が与えられる．機会を得たエージェントは，利得を最大化するように，その時刻において戦略を変更する．エージェントは戦略変更に際して，基本的には合理的な選択 (i.e., 最適応答) をするが，低い確率で最適応答ではない誤った戦略をとるものとする．

すると，状態の進化過程は χ^N を状態空間としたマルコフ連鎖として定義される．戦略 i を選択するエージェントが戦略 j に変更する確率 ρ_{ij} を利得 $V_j(\boldsymbol{x})$ とノイズパラメータ η の logit 型の関数で与える：

$$\rho_{ij} = \frac{\exp(\eta^{-1} V_j(\boldsymbol{x}))}{\sum_j \exp(\eta^{-1} V_j(\boldsymbol{x}))} \tag{30}$$

この選択確率を用いて，集団状態の確率的ダイナミクスはマルコフ連鎖で与えられる．時刻 t にある集団状態 $\boldsymbol{x}$ であるとき，1 人のエージェントが戦略変更を行い，時刻 $t+1$ で集団状態が $\boldsymbol{y}$ に遷移する確率 $p_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ を以下のように定義する：

$$p_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \begin{cases} \rho_{ij} & \text{if } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_i \\ 1 - \sum_{j\neq i} \rho_{ij} & \text{if } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{31}$$

ここで，$\boldsymbol{e}_i$ は i 番目の要素が 1，他の要素が 0 となるような標準基底ベクトルである．このマルコフ連鎖はエルゴード的であり，定常分布が一意に存在する．

確率的進化ダイナミクスを用いた離散エージェントの集団ゲームを有限集団ゲームと呼ぼう．有限集団ゲームはノイズレベル η とエージェント数 N という 2 つのパラメータによって特徴づけられる．ノイズレベル η が小さいほどエージェントが誤った選択をする確率は低く，$\eta \to \infty$ であればエージェントは完全にランダムな選択をするが，$\eta \to 0$ であれば必ず最適な選択する．定常分布 $\boldsymbol{\pi}^{\eta,N}$ はパラメータ η, N に依存する χ^N の要素数次元の確率ベクトルである．

(2) 確率安定性の定義

確率安定状態は，エージェントが連続的かつエージェントの行動が確定論的とした極限における定常分布 $\boldsymbol{\pi}^{\eta,N}$ の挙動によって定義される．

定義 1 *(確率安定性)* パラメータ (η, N) を持つ有限集団ゲームを考える．状態空間 χ^N の定常分布を $\pi^{\eta,N}$ とする．状態 $x \in \chi$ は x を含む任意の開集合 $O \subseteq \chi$ に対して以下の式を満たすとき確率安定である：

$$\lim_{\eta\to 0}\lim_{N\to\infty} \pi^{\eta,N}(O) > 0 \tag{32}$$

ここで，$\pi^{\eta,N}(O)$ は $\boldsymbol{\pi}^{\eta,N}$ で与えられる定常分布のうち集合 $O \cap \chi$ の定常確率である．

上記の定義には 2 つの極限が含まれている．まず，$\eta \to 0$ はエージェント行動が確定論的として極限をとり，エージェントがより合理的な行動をとることを表している．その結果，利得の低い状態の生起確率は小さくなる．後者は，エージェントが連続的であるとして極限をとり，離散化された集団状態 χ がよりきめ細かいメッシュとして表される．FO モデルをはじめとした集積経済モデルでは，立地主体を連続的なエージェントとして扱っており，確率安定性解析を行うためには，エージェントの連続的極限をとる必要がある．

(3) 確率安定状態とポテンシャル関数

一般的な集団ゲームでは，確率安定状態の特定は困難である．なぜなら，起こりうるすべての状態を列挙し，その定常確率を求める必要があるためである．しかし，ポテンシャルゲームであれば，Sandholm[7)]，Wallace and Young [8)] に示されている次の定理を利用した解析が可能である．

定理 1 *(確率安定性とポテンシャル関数)* 集団ゲーム $\mathcal{G}$ をポテンシャル関数 Z を持つポテンシャルゲームとする．状態 $\boldsymbol{x} \in \chi$ がポテンシャル関数 Z を大域的に最大化するならば，状態 $\boldsymbol{x}$ は確率安定である．

(31) で定義した logit dynamics では，状態 $\boldsymbol{x}$ の定常確率は以下のように表すことができる：

$$\pi_{\boldsymbol{x}}^{\eta,N} = \frac{\exp[\eta^{-1}Z(\boldsymbol{x})]}{\sum_{\boldsymbol{y}\in\chi^N}\exp[\eta^{-1}Z(\boldsymbol{x})]},\ \ \forall \boldsymbol{x} \in \chi^N \tag{33}$$

$\eta \to 0$ とすると，ポテンシャル関数を大域的に最大化する状態の定常確率が 1 に近づく．上式より，

$$\frac{\pi_{\boldsymbol{x}}^{\eta,N}}{\pi_{\boldsymbol{y}}^{\eta,N}} = \exp[\eta^{-1}(Z(\boldsymbol{x}) - Z(\boldsymbol{y}))] \tag{34}$$

を得る．すなわち，$Z(\boldsymbol{x}) < Z(\boldsymbol{y})$ ならば，$\pi_{\boldsymbol{x}}^{\eta,N} < \pi_{\boldsymbol{y}}^{\eta,N}$ である．特に，状態 $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{y} \in \arg\max_{\boldsymbol{z}\in\chi^N} Z(\boldsymbol{z})$ とすると，$\{\boldsymbol{x} \in \chi^N | \boldsymbol{x} \notin \arg\max_{\boldsymbol{z}\in\chi^N} Z(\boldsymbol{z})\}$ となる状態 $\boldsymbol{x}$ に対して $\eta \to 0$ ならば，$\pi_{\boldsymbol{x}}^{\eta,N} \to 0$ である．従って，定常確率が正となる状態はポテンシャル関数を最大化する状態でなければならない．

5. 確率安定解の特定方法

FO モデルは，3. で述べたように，ポテンシャルゲームの性質を持つ．したがって，均衡解の候補を列挙し，均衡解のうちポテンシャル関数値を最大化するものを選択することで，確率安定解の特定が可能である．

(1) 確率安定解特定アルゴリズム

定理 1 より，ポテンシャル関数値を最大化する解が確率安定解である．次のようなアルゴリズムで，特定のパラメータ (L, t, τ) で確率安定解を特定できる．

確率安定解特定アルゴリズム

Step 1 均衡立地パターン $\boldsymbol{m}^{(p)}(p \in \mathcal{P})$ を列挙する．ここで，$\mathcal{P} \equiv \{1, ..., P\}$ は均衡解の集合である．

Step 2 式 (20),(21) の最適化問題 (Hitchcock 型最適輸送問題) を解き，均衡通勤パターン $\boldsymbol{n}^{(p)}(p \in \mathcal{P})$ を求める．ポテンシャル $Z(\boldsymbol{m}^{(p)}, \boldsymbol{n}^{(p)})(p \in \mathcal{P})$ を計算し，記憶させる．

Step 3 ポテンシャルが最大の均衡解：$\arg\max_{\boldsymbol{m}^{(p)},\boldsymbol{n}^{(p)}} .Z(\boldsymbol{m}^{(p)}, \boldsymbol{n}^{(p)})$ を確率安定解として記憶させる．

(2) 均衡解の列挙

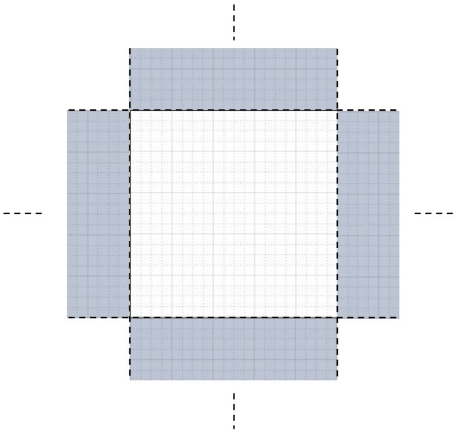
本稿では，図 1 のような正方形格子状の空間を想定する．各地点の不均質性を排除してモデル自体がもつ本質的特性を把握するために，二次元空間の境界条件として周期境界条件を使用する．さらに，周期境界をもつ二次元空間では，均衡解を列挙しやすいという利点もある．この空間設定で，自明解 (モデルのパラメータの値に依存することなく空間分布パターンを保持する解) を均衡解として与える．c) 完全混合パターンと次の二つの条件を満たす均衡解のみ自明解であることが確認できる[3]：

- 任意の業務区域に対して，隣接する全ての業務区域との間で最短距離をとる．
- 全ての業務区域の面積は等しい．

この二つの条件を満たす均衡解は，a) 極パターンと b) ストライプパターンの二種類である[4]．

[3] Ikeda et al.[10)] は，周期境界条件を仮定した空間設定で，NEG モデルで自明解のみ局所的安定な均衡解として創発することを示している．

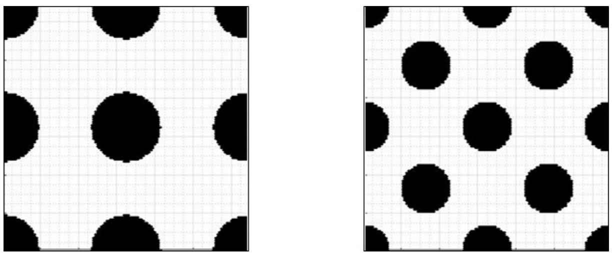
[4] 清水・長江[9)] は，様々な初期立地パターンを与えて式 (13) ～ (15) の最適化問題を解き，上記の 3 タイプの自明解のみ局所的安定な均衡解として得られることを確認している．



図–1 周期境界をもつ正方形格子状の二次元空間

a) 極パターン

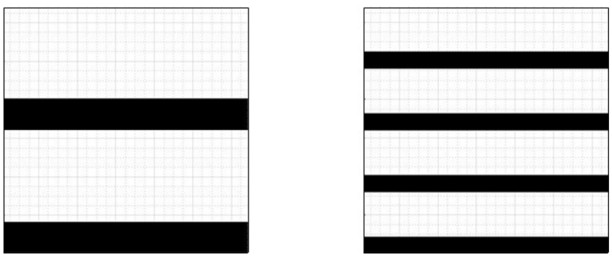
まず，極パターンを考える．本稿では，図 2 のような，極状の業務区域 (黒) と居住区域 (白) の境界が真円である立地パターンを想定する．図 2 の黒い地点で $m_i = \bar{S}/S_f$，白い地点で $m_i = 0$ である．



図–2 左図：極パターン (極数：4)，右図：極パターン (極数：8)

b) ストライプパターン

次に，ストライプパターンを考える．図 3 のように，等間隔に同じ面積のストライプ状の業務区域 (黒) が並ぶ．また，a) と同様に，図の黒い地点で $m_i = \bar{S}/S_f$，白い地点で $m_i = 0$ である．



図–3 左図：ストライプパターン (本数：2)，右図：ストライプパターン (本数：4)

c) 完全混合パターン

最後に，完全混合パターンを考える．この立地パターンは，任意の地点で企業数が等しい：

$$m_i = \frac{M}{K}, \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{35}$$

6. 数値実験結果

本章では，数値計算によって，交通技術水準に関する 2 つのパラメータ (τ, t) の組み合わせに対して，大域的安定となる均衡解を調べる．(2) で a) 労働投入量 L が大きい場合 ($L = 3.0$) と b) 労働投入量 L が小さい場合 ($L = 1.0$) の計算結果を示す．

(1) 実験条件

本稿では，次のパラメータを与えて，数値実験を行った．

- 総土地面積：$S = 200$
- 立地主体の消費土地面積：$S_f = 1, S_h = 1$
- 地点数：$K = 128 \times 128$
- 労働投入量：$L = 1.0, 3.0$
- 通勤費用パラメータ：$t = 0.001 \times t_n$ ($t_n \in \{1, ..., 1000\}$)
- 企業間交流費用パラメータ：$\tau = 0.005 \times \tau_n$ ($\tau_n \in \{1, ..., 600\}$)
- 極パターンの極数：$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 2 \times 1^2,\ 2 \times 2^2$
- ストライプパターンの本数：$1, 2, 3, 4$

(2) 実験結果

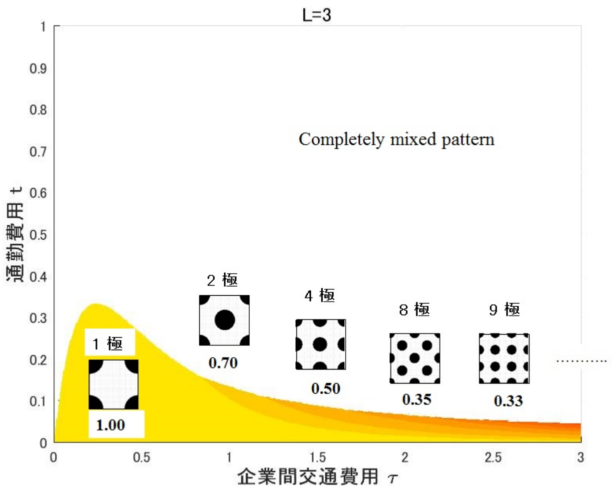
a) 労働投入量 L が大きい場合

労働投入量 L が大きい場合 ($L = 3.0$) に各均衡パターンが大域的安定となる領域を図 4 の (τ, t) 平面上に示す．まず，t 軸方向に注目する．通勤費用が高い状態では，完全統合パターンが安定である．通勤費用が減少すると，企業と消費者は分離して，極パターンが安定になる．$L = 3.0$ の場合には，ストライプパターンは安定にならない．

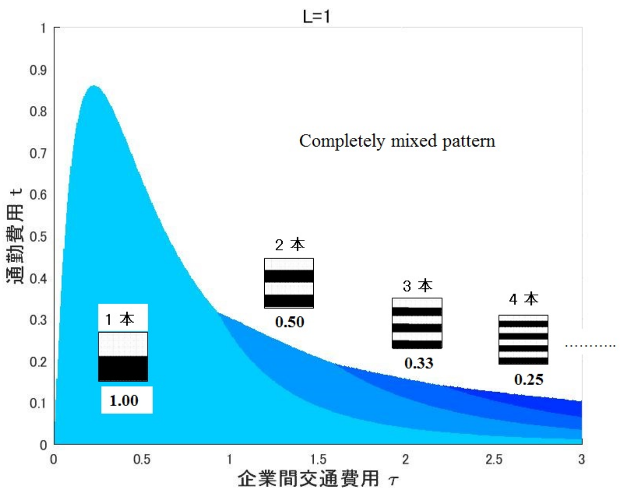
次に，企業集積が生じる t の領域 (e.g., $t = 0.1$) で，τ の減少に伴い集積が生じ，極数を減らしながら 1 極分布パターンへと向かう．さらに τ を減少させると，集積が崩壊する"再分散現象"が生じ，1 極分布パターンから完全統合パターンへと進展する．一方で，任意の多極パターンから τ を増加させると，極数が増えた立地パターンが出現する．すなわち，企業は分散して立地するようになる．τ を増加させ続ければ，無限に極数が増加していくと予想される．そのような無限に極を持つパターンは，消費者の通勤距離が極めて短くなりゼロに近づくので，完全統合パターンと近似的に等しい立地パターンであると考えられる．

b) 労働投入量 L が小さい場合

労働投入量 L が小さい場合 ($L = 1.0$) に FO モデルの確率安定性解析の結果を図 5 に示す．$L = 3.0$ の場合との最大の相違点は，通勤費用が減少すると極パターンの代わりにストライプパターンが安定になることである．これは，L が小さくなると総企業数 M が大きくなり，極パターンで通勤距離が大きくなったためと考えられる．また，$L = 3.0$ の場合と同様に，τ の減少に伴い，ストライプの本数を減らしながら 1 本線分布パターンへと向かう．さらに，τ を減少させると，集積が崩壊する"再分散現象"が生じる．



図–4 $L = 3.0$ の場合の大域的安定解
(下の数値は極の間隔 (× 空間の一辺長) を表す)



図–5 $L = 1.0$ の場合の大域的安定解
(下の数値はストライプの間隔 (× 空間の一辺長) を表す)

7. おわりに

本研究では， FO モデルがポテンシャルゲームとして解釈可能であることを示し，周期境界をもつ二次元空間で均衡解の安定性解析を行い，複数都心パターンが安定解として創発することを示した．さらに，労働投入量の減少に伴って，極パターンからストライプパターンに安定解が切り替わることを示した．

本稿では自明解のみ想定しており，均衡解を網羅的に列挙したとはいえない．ただし，定性的にはモデルの集積挙動を明らかにしたと考えられる．

本研究では，周期境界をもつ二次元空間を想定した．有限境界をもつ二次元空間での FO モデルの解析は今後の研究課題である．

謝辞：本研究は，日本学術振興会・科学研究費補助金・基盤研究 (A)(課題番号 :17H00987) の助成を受けた研究の一部です．ここに記し，感謝を表します．

参考文献

1) Fujita, M., Ogawa, H. : Multiple equilibria and structural transition of non-monocentric urban configurations, *R*egional science and urban economics, vol. 12, No.2 , pp. 161-196, 1982.
2) Marcus Berliant and Ping Wang. Urban growth and subcenter formation: A trolley ride from the staples center to disneyland and the rose bowl. Journal of Urban Economics, Vol. 63, No. 2, pp. 679-693, 2008.
3) Osawa, M.,Akamatsu, T. Stochastically stable equilibria of the Fujita and Ogawa (1982) model. 第 30 回応用地域学会研究発表大会, 2016.
4) 山口修平 , 赤松隆 . 複数都心形成モデルの確率安定性解析 - 線分都市 vs. 円周都市 -. 第 56 回土木計画学研究会・講演集 , 2018.
5) Hiroshi Ogawa and Masahisa Fujita. Nonmonocentric urban configurations in a two-dimensional space. Environment and planning A, Vol. 21, No. 3, pp. 363-374, 1989.
6) Robert E Lucas and Esteban Rossi-Hansberg. On the internal structure of cities. Econometrica, Vol. 70, No. 4, pp. 1445-1476, 2002.
7) William H Sandholm. Population games and evolutionary dynamics. MIT press, 2010.
8) Chris Wallace and Peyton Young. Stochastic evolutionary game dynamics:handbook. 2013.
9) 清水廉 , 長江剛志 . 二次元空間 Fujita-Ogawa モデルの効率的解法 . ワーキングペーパー, 2018.
10) Ikeda, Kiyohiro and Onda, Mikihisa and Takayama, Yuki . Spatial period doubling, invariant pattern, and break point in economic agglomeration in two dimensions, Journal of Economic Dynamics and Control ,2018.

(2018. 7. 31 受付)

STOCHASTIC STABILITY ANALYSIS OF FUJITA - OGAWA MODEL IN A TWO-DIMENSIONAL SPACE

Katsuya AKIMOTO and Takashi AKAMATSU