土地と労働の需給均衡を内生化した空間経済モデルのポテンシャルゲーム表現

山口 修平 [1]・赤松 隆 [2]

[1]学生会員　東北大学大学院　情報科学研究科人間社会情報科学専攻（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: shuhei.yamaguchi.p7@dc.tohoku.ac.jp
[2]正会員　東北大学大学院教授　情報科学研究科人間社会情報科学専攻（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究では，Fujita and Ogawa(1982) モデルをより一般化した集積経済モデルがポテンシャル・ゲームの形式に帰着できることを明らかにする．集積経済モデルを分析した既往研究によって，安定的に創発する均衡立地パターンの規則性が明らかにされている．しかし，市場均衡条件を特殊化したケースでの解析であるため，得られた知見が一般性をもつことは保証できない．既往研究で示された都心形成メカニズムが頑健性を有することを明らかにするためには，より一般化された市場均衡条件をもつモデルにおいて均衡解の安定性解析が必要であり，モデルがポテンシャル・ゲームであれば，確率安定性解析が実行可能である．

Key Words: *agglomeration economy, location equilibrium, potential game, bi-level optimization*

1.　はじめに

人口や経済活動の空間的分布は社会基盤の経済効果に多大な影響を与えるため，長期的な政策評価のためには，経済集積がどこに・どの程度生じるかを予測することが重要である．そのためには，経済活動の集積・分散現象を説明する理論的基盤の蓄積が必要であり，経済学的な論理と整合的に都心形成メカニズムを解明することは重要な課題である．

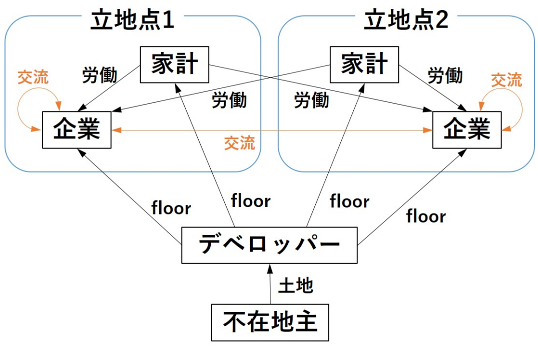
都心形成メカニズムを示した理論として，都市経済学分野の Fujita and Ogawa[1) モデル (以下，FO モデル) を代表とした一連の研究 (e.g., Ogawa and Fujita[2), Fujita[3), Lucas and Rossi-Hansberg[4), Berliant et al.[5), Berliant and Wang[6)) が挙げられる．これらのモデルでは，企業と家計という 2 種類の立地主体の相互作用によって，都心が形成されると説明している．しかし，いずれの研究でも均衡解の安定性については議論されていなかった．

近年，Osawa and Akamatsu[7)，山口・赤松[8) が FO モデルの安定均衡解として創発する都心形成パターンには交通費用に依存した規則性が存在することを明らかにした．しかし，FO モデルで示された都心形成メカニズムは必ずしも一般性のあるものであるとは保証できない．なぜなら，FO モデルは都市の土地供給量や立地主体の土地需要，労働需要・供給が固定されているという特殊なモデルであるためである．

集積経済モデルは一般に複数均衡を持つため，均衡選択を行う必要がある．既往研究[7),8) では大域的安定解を選択するため確率安定性概念を採用している．確率安定性解析は一般には適用困難であるが，ポテンシャル・ゲームであれば「ポテンシャル最大点と確率安定解は一致する」(Sandholm[9)) という定理を利用した解析が可能である．しかし，FO モデルをより一般化した集積経済モデルがポテンシャル・ゲームとなるか否かは明らかにされていない．既往研究で示された都心形成メカニズムが頑健性を有することを明らかにするためには，より一般化したモデルがポテンシャル・ゲームであることを示し，均衡解の安定性解析を通して安定均衡立地パターンの性質を明らかにすることが必要である．

本研究では，FO モデルをより一般化した集積経済モデルがポテンシャル・ゲームの形式に帰着できることを明らかにする．具体的には，FO モデルの土地需要・供給，労働需要・供給を内生変数とした立地均衡モデルを定式化する．そこで，モデルが立地主体の立地が均衡する長期均衡と，財の需要と供給が均衡する短期均衡に分解可能であることを示す．そして，短期均衡には等価最適化問題が存在することを示し，その最適値関数がモデル全体のポテンシャル関数となることを明らかにする．

本稿の構成は以下のとおりである．まず，第 2 章でモデルを構築し均衡条件を示す．第 3 章ではポテンシャル・ゲームの定義とその性質について述べる．第 4 章ではモデルが短期・長期の問題へと分解可能であるこ



図–1　経済主体間の関係

とを示した上で，長期均衡がポテンシャル・ゲームであることを示す．第 5 章では，応用例として，既によく知られた立地均衡モデルがポテンシャル・ゲームであることを示す．最後に，第 6 章で結論と今後の展望を述べる．

2.　モデル

(1)　基本設定

離散的な K 箇所の立地点が存在する空間を考え，立地点の集合を $\mathcal{K} \equiv \{1, \cdots, K\}$ とする．立地主体は総数 N の家計と総数 M の企業である．企業と家計の間には雇用関係が存在する．また，各立地点で家計と企業に対して floor space を供給するデベロッパーが存在する．地点数が 2 であるとき ($K = 2$)，これらの経済主体間の関係の概略を**図–1** に示す．本研究では，立地主体の異質性は考慮せず，それぞれ同質的な行動をとるものとする．

(2)　経済主体の行動モデル

a)　家計

地点 i に居住し，地点 j で勤務する家計数を n_{ij}，家計分布 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}_{+}^{K^2}$ を n_{ij} に対応した列ベクトルとする．家計は地点 j の企業から賃金 W_j を得て，地点 i, j 間の通勤費用 T_{ij} と地点 i の floor 地代 R_i を支払う．また，家計は合成財消費量 z_{ij}，floor space 消費量 S_{ij}^H，余暇時間 L_{ij}^H に応じた効用を得る．本研究では，合成財価格を 1 に基準化し，家計の直接効用関数は以下に示す準線形効用関数で表されるとする：

$$u(S_{ij}^H, L_{ij}^H, z_{ij}) = z_{ij} + f(S_{ij}^H, L_{ij}^H) \tag{1}$$

家計の財消費に関する効用最大化行動は次のように表される：

$$v_{ij}(R_i, W_j) \equiv \max_{S_{ij}^H, L_{ij}^H, z_{ij}} \quad u(S_{ij}^H, L_{ij}^H, z) \tag{2}$$

$$\text{s.t.} \quad W_j(E - L_{ij}^H) = z_{ij} + R_i S_{ij}^H + T_{ij} \tag{3}$$

予算制約式 (3) の左辺は家計の収入を表しており，余暇の初期保有量 E から余暇 L_{ij}^H を引いた時間を労働に充てているものとする．この問題の解は価格変数 R_i, W_j の関数であり，居住地 i，勤務地 j の家計 1 単位あたりの floor space 需要関数及び労働供給関数となる．また，$v_{ij}(R_i, W_j)$ は家計の間接効用関数である．間接効用関数と需要関数の関係は Roy の恒等式より，以下のように表される (導出を付録 **I** に示す)：

$$-S^H(R_i, W_j) = \frac{\partial v(R_i, W_j)}{\partial R_i} \quad \forall i, j \tag{4}$$

$$E - L^H(R_i, W_j) = \frac{\partial v(R_i, W_j)}{\partial W_j} \quad \forall i, j \tag{5}$$

さらに家計が居住地 i と勤務地 j を選択する行動は次の最適化問題と等価である：

$$\max_{i,j} v_{ij}(R_i, W_j) \tag{6}$$

家計の行動は以上のような 2 段階最適化問題となっている．すなわち，家計はまず各居住地・勤務地のペアで最適な財の消費量を決定し，その結果決まる効用が最大となる居住地・勤務地のペアを選択する．

b)　企業

企業は floor space と労働を生産要素として価格一定の財を生産する．さらに，企業には正の立地外部性があり，空間上の他企業とのコミュニケーション (交流) によって便益 $A_i(\boldsymbol{m})$ を得る．ここで，$\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}_{+}^{K}$ は地点 i に立地する企業数 m_i を i 番目要素にもつ列ベクトルである．

企業の生産要素の投入量に関する利潤最大化行動は以下の問題によって表現される：

$$\pi_i = \max_{S_i^F, L_i^F} \{A_i(\boldsymbol{m}) + g(S_i^F, L_i^F) - R_i S_i^F - W_i L_i^F\} \tag{7}$$

ただし，S_i^F は立地点 i の企業の土地投入量，L_i^F は立地点 i の企業の労働投入量，$g(S_i^F, L_i^F)$ は企業の生産関数であり，産出物の価格は 1 に固定している．また，A_i は企業同士のコミュニケーションによって得られる便益であり，以下のように定義される：

$$A_i(\boldsymbol{m}) = \sum_j D_{ij} \cdot m_j \quad \forall i \tag{8}$$

ここで，D_{ij} は地点 i, j 間の距離減衰効果[1]である．

以降の解析で用いるため，企業間交流便益の逆関数を定義しておこう．式 (8) より A_i は $\boldsymbol{m}$ と 1 対 1 対応の定義がなされている．$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_{+}^{K}$ を A_i に対応する列ベ

[1] 例えば，指数型の距離減衰効果を仮定すると，i, j 間の距離 d_{ij} と企業間交通費用パラメータ $\tau > 0$ を用いて次のように表される：

$$D_{ij} = \exp(-\tau d_{ij}) \tag{9}$$

すなわち，多数の企業が近接して立地するほど，企業はより大きな便益を得ることができる．

クトル，D_{ij} を (i,j) 成分にもつ行列を $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}_+^{K\times K}$ とすると，企業間交流便益 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{m}$ の逆関数は，

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A} \quad \Leftrightarrow \quad m_i = \sum_j D_{ij}^{-1} A_j \quad \forall i \tag{10}$$

と表される．ただし，D_{ij}^{-1} は行列 $\boldsymbol{D}$ の逆行列 $\boldsymbol{D}^{-1}$ の (i,j) 成分である．

式 (7) の問題の解は価格変数 R_i, W_i と企業間交流便益 $A_i(\boldsymbol{m})$ の関数である．いま $\boldsymbol{m}$ を与件とすると，地点 i の 1 企業当たりの floor space・労働の需要関数は Hotelling の補題より，以下のように与えられる：

$$S^F(R_i, W_i) = -\frac{\partial \pi(R_i, W_i)}{\partial R_i} \tag{11}$$

$$L^F(R_i, W_i) = -\frac{\partial \pi(R_i, W_i)}{\partial W_i} \tag{12}$$

さらに，企業は以下の利潤最大化行動により立地点 i を選択する：

$$\max_i \pi_i(R_i, W_i, A_i(\boldsymbol{m})) \tag{13}$$

企業の行動も家計の行動と同様に 2 段階最適化問題となっている．すなわち，企業はまず各立地点で最適な財の投入量を決定し，その結果決まる利潤が最大となる立地点を選択する．

c) デベロッパー

デベロッパーは各立地点で不在地主から借りた単位面積の土地を開発し，完全競争のもとで floor space を家計と企業に供給する．デベロッパーは利潤 π^d を最大化するように立地点 i の floor space 供給量 S_i を決定する．Hotelling の補題より，floor space 供給関数：

$$S_i = Q(R_i) = \frac{\partial \pi_d(R_i)}{\partial R_i} \quad \forall i \tag{14}$$

を得る．逆需要関数を

$$R_i = Q^{-1}(S_i) \quad \forall i \tag{15}$$

と定義する．

(3) 均衡条件

本モデルの均衡状態は，以下の条件が同時に満たされた状態である．

a) 空間均衡条件

企業が立地選択に関して均衡状態であるならば，どの企業も立地点を変更する動機を持たない：

$$\begin{cases} \pi^* - \pi_i = 0 & \text{if } m_i > 0 \\ \pi^* - \pi_i \geq 0 & \text{if } m_i = 0 \end{cases} \quad \forall i, j \in \mathcal{K} \tag{16}$$

消費者が立地選択に関して均衡状態であるならば，どの消費者も居住地・勤務地を変更する動機を持たない：

$$\begin{cases} v^* - v_{ij} = 0 & \text{if } n_{ij} > 0 \\ v^* - v_{ij} \geq 0 & \text{if } n_{ij} = 0 \end{cases} \quad \forall i, j \in \mathcal{K} \tag{17}$$

ただし，π^*, v^* は内生的に決定する均衡利潤，均衡効用である．

b) 市場均衡条件

Floor space 市場は，正の地代がついていれば，需要と供給が一致する．

$$\begin{cases} Q(R_i) = \sum_{j\in\mathcal{K}} S^H(R_i, W_j)\cdot n_{ij} + S^F(R_i, W_i)\cdot m_i \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } R_i > 0 \\ Q(R_i) \geq \sum_{j\in\mathcal{K}} S^H(R_i, W_j)\cdot n_{ij} + S^F(R_i, W_i)\cdot m_i \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } R_i = 0 \end{cases}$$
$$\forall i \in \mathcal{K} \tag{18}$$

労働市場は，正の賃金がついていれば，需要と供給が一致する．

$$\begin{cases} \sum_{i\in\mathcal{K}} (E - L^H(R_i, W_j))\cdot n_{ij} = L^F(R_j, W_j)\cdot m_j \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } W_j > 0 \\ \sum_{i\in\mathcal{K}} (E - L^H(R_i, W_j))\cdot n_{ij} \geq L^F(R_j, W_j)\cdot m_j \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } W_j = 0 \end{cases}$$
$$\forall j \in \mathcal{K} \tag{19}$$

Floor space・労働市場の需給均衡条件から均衡地代 R_i，均衡賃金 W_j が内生的に決定する．

c) 立地主体の保存則

本モデルでは閉じた都市を想定する．つまり，他都市からの企業・家計の流入・流出はないものとする．各経済主体数について以下の保存条件が成り立つ：

$$\sum_{i\in\mathcal{K}} m_i = M \tag{20}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{K}}\sum_{j\in\mathcal{K}} n_{ij} = N \tag{21}$$

3. ポテンシャル・ゲーム

ポテンシャル・ゲームとは利得関数のベクトル場にポテンシャルが存在する集団ゲームであり，非常に有用な性質を持つ．本研究で扱うような立地均衡モデルは一般に集団ゲームとして解釈可能である．具体的には，立地主体である企業や家計は集団ゲームのエージェント，利潤関数や効用関数が利得関数に対応する．さらに，ポテンシャル・ゲームであれば，Sandholm[9] に示されている確率安定性の理論に基づいて，均衡解の安定性解析を行うことができる．

(1) 集団ゲームの定義

集団ゲームとは，有限かつ非常に多数のエージェント集団の集合と有限の戦略集合で構成されるゲームである．各エージェントは集団ごとに共通の戦略集合と利得関数をもち，自らの利得を最大化するように行動する．集団の集合を $\mathcal{P} = \{1, 2, ..., p\}$，集団 p のエージェントの純粋戦略集合を $\mathcal{S}^p = \{1, 2, ..., n^p\}$ とする．全

集団の純戦略の総数を $\sum_{p\in\mathcal{P}} n^p = n$ とする．各エージェントは純粋戦略をとるとし，起こりうる集団状態の集合は $\mathcal{X} \equiv \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ | \sum_{i\in\mathcal{S}^p} x^p_i = x^p\}$ である．ここに，$x^p_i \in \mathbb{R}_+$ は集団 p で戦略 $i \in \mathcal{S}^p$ をとるエージェント数であり，集団状態 $\boldsymbol{x}$ は x^p_i に対応する列ベクトル，$x^p \in \mathbb{R}_+$ は集団 p のエージェント数である．さらに，集団状態 $\boldsymbol{x}$ のときに戦略 $i \in \mathcal{S}^p$ をとる集団 p のエージェントの利得関数を $F^p_i(\boldsymbol{x})$ とする．各戦略の利得関数を要素に持つベクトル値関数を $\boldsymbol{F}:\ \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ と定義する．集団の集合，戦略集合，実行可能な集団状態，利得関数の 4 つの要素で集団ゲーム $\mathcal{G}$ は定義され，$\mathcal{G} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{S}, \mathcal{X}, \boldsymbol{F})$ と表す．

集団ゲームのナッシュ均衡は以下のように定義される．

定義 1 集団ゲーム $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{S}, \mathcal{X}, \boldsymbol{F})$ の状態 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ がナッシュ均衡となるのは，以下の変分不等式を満たすときである：

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad \forall y \in \mathcal{X} \tag{22}$$

(2) ポテンシャル・ゲームの定義と性質

ポテンシャル・ゲームとは，ポテンシャル関数を持つ集団ゲームである．

定義 2 ポテンシャル・ゲームとは，以下の等式を満たすポテンシャル関数 $Z:\ \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ が存在する集団ゲーム $\mathcal{G}$ である：

$$\frac{\partial Z(\boldsymbol{x})}{\partial x^p_i} = F^p_i(\boldsymbol{x}) \quad \forall i \in \mathcal{S}^p,\ p \in \mathcal{P} \tag{23}$$

すなわち，ポテンシャル・ゲームとは利得関数のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ のスカラーポテンシャル Z が存在するゲームである．Sandholm[10] によると，ポテンシャル・ゲームは以下の性質を持つ：

定理 1 集団ゲーム $\mathcal{G}$ をポテンシャル関数 Z を持つポテンシャル・ゲームとする．ナッシュ均衡の集合は，最大化問題 $\max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} Z(\boldsymbol{x})$ の Karush-Kuhu-Tucker 条件を満たす状態の集合と一致する．

4. ポテンシャル・ゲームとしての表現

本モデルの均衡問題は短期・長期の問題から構成されていると考えることができる．短期では企業･家計の立地パターンを与件として，財価格および財の需要量･供給量が決定する．長期では，各財の価格･数量を与件として，企業と家計が立地を選択する．本章では，**(1)** で短期均衡の等価最適化問題が構築可能であることを示す．さらに短期均衡の最適値関数を用いて，**(2)** で長期均衡がポテンシャル・ゲームとして解釈可能であることを示す．

(1) 短期均衡

短期では企業分布 $\boldsymbol{m}$，家計分布 $\boldsymbol{n}$ を与件として，市場均衡条件から財価格 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{W}$ および財の需要量･供給量 $\boldsymbol{X}$ が決定する．ここに $\boldsymbol{X} \equiv [\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}^F, \boldsymbol{L}^F, \boldsymbol{S}^H, \boldsymbol{L}^H]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3K+2K^2}$ であり，$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}^F, \boldsymbol{L}^F \in \mathbb{R}^K$ は各々 S_i, S^F_i, L^F に対応した列ベクトル，$\boldsymbol{S}^H, \boldsymbol{L}^H \in \mathbb{R}^{K^2}$ は各々 S^H_{ij}, L^H_{ij} に対応した列ベクトルである．また，$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^K$ は各々 R_i, W_i に対応した列ベクトルである．ここで，短期均衡を次のように定義しよう．

定義 3 短期均衡とは $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ を与件として式 (18),(19) を満たす $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{W})$ である．

本モデルでは短期均衡の等価最適化問題を構築可能である．まず，数量変数 $\boldsymbol{X}$ を未知変数とした問題を以下の補題に示す．

補題 1 短期均衡では $\boldsymbol{X}$ は以下の最適化問題の解として与えられる：

$$\textbf{[ME-P]} \qquad \max_{\boldsymbol{X}\geq\boldsymbol{0}} Z^P(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$$

$$\text{s.t.}\ \ S_i - \sum_j S^H_{ij} n_{ij} - S^F_i \cdot m_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{24}$$

$$\sum_i (E - L^H_{ij}) n_{ij} - L^F_j \cdot m_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{K} \tag{25}$$

where

$$\begin{aligned} & Z^P(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \\ =& \sum_i g(S^F_i, L^F_i) \cdot m_i + \sum_j \sum_i m_i D_{ij} m_j \\ & + \sum_i \sum_j f(S^H_{ij}, L^H_{ij}) \cdot n_{ij} - \sum_i \sum_j T_{ij} \cdot n_{ij} \\ & - \sum_i \int_0^{S_i} Q^{-1}(\omega) \mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{26}$$

目的関数の第 1,3,5 項によって社会的余剰の総和が表現され，**[ME-P]** はその最大化問題となっている．なお，第 2,4 項は $\boldsymbol{X}$ とは無関係の定数項であり，それぞれ企業間交流便益の総和，家計の通勤費用の総和を表している．短期均衡のみを考えるのであれば冗長な表現であるが，これは長期均衡の問題と対応付ける際に役立つ．そして，この問題のラグランジュ乗数として各立地点の地代 $\boldsymbol{R}$，賃金 $\boldsymbol{W}$ が決定する．また，**[ME-P]** は線形の制約条件のみであり，実行可能領域は凸集合である．

次に，価格変数 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{W}$ を未知変数とした **[ME-P]** の双対問題を考える．

補題 2 短期均衡では $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{W}$ は以下の最適化問題の解と

して与えられる：

$$\text{[ME-D]}\quad \min_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{W}\geq\boldsymbol{0}} Z^D(\boldsymbol{R},\boldsymbol{W}|\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) = \sum_i \int_{\underline{R_i}}^{R_i} Q(\omega)\mathrm{d}\omega + \sum_i \pi_i(R_i,W_i,A_i)\cdot m_i + \sum_i\sum_j v_{ij}(R_i,W_j)\cdot n_{ij} \tag{27}$$

ここに，$\underline{R_i}$ は floor 供給がゼロとなるような最低地代を表している．目的関数の第 1 項はデベロッパーの生産者余剰，第 2,3 項は企業・家計の利潤・効用の総和を表している．均衡がこれらを最小化するということは，一見不自然に思われる．しかし，均衡価格以外のすべての $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{W})$ の下では需要と供給が等しくないので，均衡以外の状態で (実行可能性を無視した場合に) 得ることができる効用・利潤は，均衡時に得られる効用・利潤よりも大きくなるはずである．

[ME-P] と **[ME-D]** は双対の関係にあるので，強双対定理より，両者の最適値は一致する：

$$Z^*(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) \equiv Z^D(\boldsymbol{R}^*,\boldsymbol{W}^*|\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) = Z^P(\boldsymbol{X}^*|\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) \tag{28}$$

ここで，上付き記号*はその変数が最適値を与える最適解であることを表している．**[ME-P]** と **[ME-D]** の解 $\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{R}^*,\boldsymbol{W}^*$ は $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ の関数として与えられる．よって，短期均衡の最適値関数 $Z^*(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$ は $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ の関数である．ただし，最適値関数は一般には closed form で求めることはできない．

(2) 長期均衡

長期均衡では，短期均衡で決定した $(\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{R}^*,\boldsymbol{W}^*)$ を与件として，企業と家計が立地選択を行う．$(\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{R}^*,\boldsymbol{W}^*)$ は $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ の関数として与えられるため，利潤関数及び効用関数は以下のように $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ の関数として表現できる：

$$\pi_i(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) = \pi_i(R_i^*(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}),W_i^*(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}),A_i(\boldsymbol{m})) \tag{29}$$

$$v_{ij}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) = v_{ij}(R_i^*(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}),W_j^*(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})) \tag{30}$$

長期均衡を以下のように定義する．

定義 4 長期均衡とは式 (16),(17),(20),(21),(29),(30) を満たす $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$ である．

長期均衡の問題を考えるうえで，前節で示した最適値関数を有効に利用することができる．なぜなら，包絡線定理より，最適値関数は以下の補題に示す性質を有するためである．

補題 3 短期均衡の最適値関数 $Z^*(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$ は利潤関数のベクトル場 $\boldsymbol{\pi}$，効用関数のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルである：

$$\frac{\partial Z^*(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})}{\partial m_i} = \pi_i(R_i^*,W_i^*,A_i(\boldsymbol{m})) \quad \forall i\in\mathcal{K} \tag{31}$$

$$\frac{\partial Z^*(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})}{\partial n_{ij}} = v_{ij}(R_i^*,W_j^*) \quad \forall i,j\in\mathcal{K} \tag{32}$$

$Z^*(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$ が立地主体の利得関数 (i.e., 利潤関数，効用関数) のポテンシャル関数であることから，以下の命題を得る．

命題 1 本モデルはポテンシャル関数 $Z^*(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$ を持つポテンシャル・ゲームである．モデルの空間均衡状態はポテンシャル最大化問題の解と一致する：

$$\text{[SE-P]}\quad \max_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\geq\boldsymbol{0}} Z^*(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) \tag{33}$$

$$\text{s.t.}\quad \text{式 (20),(21)}$$

この問題は **[ME-P]**，**[ME-D]** の目的関数を明示的に用いて，以下のように表すことも可能である：

$$\max_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\geq\boldsymbol{0}} \{\max_{\boldsymbol{X}\geq\boldsymbol{0}} Z^P(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})\} \tag{34}$$

$$= \max_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\geq\boldsymbol{0}} \{\min_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{W}\geq\boldsymbol{0}} Z^D(\boldsymbol{R},\boldsymbol{W}|\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})\} \tag{35}$$

$$\text{s.t.}\quad \text{式 (20),(21)}$$

[SE-P] の目的関数は一般に closed form で得られるとは限らない．しかし，次章で示すように，より特殊なケースのモデルでは関数形を特定可能である．

さらに，**[SE-P]** の双対問題は次のように得られる．

系 1 空間均衡条件は価格変数を未知変数とした，以下の最適化問題と等価である：

$$\text{[SE-D]}\quad \min_{s\pi^*,v^*,\boldsymbol{R},\boldsymbol{W},\boldsymbol{A}\geq\boldsymbol{0}} Z(\pi^*,v^*,\boldsymbol{R},\boldsymbol{W},\boldsymbol{A}) = M\pi^* + Nv^* + \sum_i \int_{\underline{R_i}}^{R_i} S(\omega)\mathrm{d}\omega - \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{K}}\sum_{i\in\mathcal{K}} A_i D_{ij}^{-1} A_j \tag{36}$$

$$\text{s.t.}\quad \pi^* - \pi_i(R_i,W_j,A_i) \geq 0 \quad \forall i\in\mathcal{K} \tag{37}$$

$$v^* - v_{ij}(R_i,W_j) \geq 0 \quad \forall i,j\in\mathcal{K} \tag{38}$$

目的関数の第 1,2 項は家計・企業の効用・利潤の総和を表し，第 3 項はデベロッパーの floor 地代総収入を表している．双対問題では A_i を明示的な未知変数として扱う．第 4 項は主問題の企業間交流便益の総和の項と双対関係にある項である．

[SE-D] では均衡立地パターン $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ が明示的に現れていないが，制約式 (66),(67) のラグランジュ乗数として m_i, n_{ij} が決定する．

5. 簡単なモデルでの応用例

第 4 章までで示したモデルは，経済主体の行動を限定したり，生産関数・効用関数等を特定化したりすれば，短期均衡の問題を解いた結果，1 段階の最適化問題へ帰着させることが可能である．本章では，そのような具体例として，既によく知られた立地均衡モデルでの応用例を示す．**(1)** では家計のみが立地選択を行う Alonso[11] モデル，**(2)** では企業と家計が立地選択を行う Fujita and Ogawa[1] モデルがポテンシャル・ゲームであることを示す．

(1) Alonso モデル

唯一の都心 (CBD) と K 個の離散的な立地点からなる都市を考える．企業は立地選択を行わず，全企業が CBD に立地するものとする．家計は立地点と floor 消費量を選択できるものとし，労働供給は一定とする．また，各立地点の floor 供給面積 S_i は地代によらず一定であるとする．

a) 家計の行動

地点 i に居住する家計数を n_i，家計分布 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}_+^K$ を n_i に対応した列ベクトルとする．家計は企業から賃金 W(定数) を得て，CBD までの通勤費用 T_i と地点 i の地代 R_i を支払う．また，家計は合成財消費量 z_i，floor 消費量 S_i^H に応じた効用を得る．

家計の直接効用関数は以下に示す準線形効用関数

$$u(S_i^H, z_i) = z_i + f(S_i^H) \tag{39}$$

で表されるとする．家計の財消費に関する効用最大化行動は次のように表される：

$$v_i(R_i, W) \equiv \max_{S_{ij}^H, z_{ij}} u(S_i^H, z_i) \tag{40}$$

$$\text{s.t.} \quad W = z_i + R_i S_i^H + T_i \tag{41}$$

Roy の恒等式より，floor 需要関数は以下の式で与えられる：

$$S^H(R_i, W) = -\frac{\partial v(R_i, W)}{\partial R_i} \quad \forall i \tag{42}$$

また，逆需要関数は効用最大化の一階条件より，

$$R_i(S_i^H) = \frac{\mathrm{d}f(S_i^H)}{\mathrm{d}S_i^H} \quad \forall i \tag{43}$$

と与えられる．家計は効用最大化行動により，居住する立地点 i を選択する：

$$\max_i v_i(R_i, W) \tag{44}$$

b) 均衡条件

均衡条件は家計の立地選択が均衡する空間均衡条件，floor の需給が均衡する市場均衡条件，そして立地主体数の保存則から構成される：

$$\begin{cases} v^* - v_i = 0 & \text{if } n_i > 0 \\ v^* - v_i \geq 0 & \text{if } n_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{45}$$

$$\begin{cases} S_i = \sum_{j \in \mathcal{K}} S^H(R_i, W) \cdot n_{ij} & \text{if } R_i > 0 \\ S_i \geq \sum_{j \in \mathcal{K}} S^H(R_i, W) \cdot n_{ij} & \text{if } R_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{46}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} n_i = N \tag{47}$$

ただし，v^* は内生的に決定する均衡効用である．

c) 短期均衡

このモデルでは市場均衡条件 (46) を直接的に解くことによって，間接効用関数 v_i が $\boldsymbol{n}$ の関数として表され，さらに $\boldsymbol{v}$ のポテンシャル関数が存在することを示せる．まず，逆需要関数 (式 (43)) が連続であることを用いると，

$$\begin{cases} S_i^H = S_i / n_i & \text{if } n_i > \underline{n_i} \\ S_i^H = S_i^H(0, W) & \text{if } n_i \leq \underline{n_i} \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{48}$$

と書き直せる．ここで，$S_i^H(0, W)$ は需要関数に $R_i = 0$ を代入したものである．また，$\underline{n_{ij}}$ は $R_i = 0$ となる限界立地者数である．

この関係式 (48) は，floor 需要 S_i^H が立地者数 n_i の関数として表されることを意味している．これを逆需要関数 $R_i(S_i^H)$ に代入すると，地代 R_i も n_i の関数として表現することができる．したがって，間接効用関数も n_i のみの関数 $\hat{v}_i(n_i)$ として表現できる．

d) 長期均衡

前節で得た間接効用関数 $\hat{v}_i(n_i)$ は n_i のみの関数だから，効用関数のベクトル場のヤコビ行列 $\nabla\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{n})$ の非対角要素はすべてゼロとなる．したがって，このモデルは 1 段階のポテンシャル・ゲームとして解釈可能である：

$$\textbf{[RLE-P]} \qquad \max_{\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0}} Z_1^P(\boldsymbol{n}) = \sum_i \int_0^{n_i} \hat{v}_i(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{49}$$

$$\text{s.t.} \quad \text{式 (47)}$$

実は，本モデルでは前節に示したように v_i を n_i の関数として表す過程で市場均衡条件を解いている．つまり，式 (34) の内側の問題 (短期均衡) を解いているため，ポテンシャル関数は効用関数 v_i を n_i について積分することで得られる．

また，**[RLE-P]** の双対問題は以下のように与えられる．

$$\textbf{[RLE-D]} \quad \min_{v^*, \boldsymbol{R} \geq \boldsymbol{0}} Z_1^D(v^*, \boldsymbol{R}) = Nv^* + \sum_i S_i n_i \tag{50}$$

$$\text{s.t.} \quad v^* - v_i(R_i) \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{51}$$

[RLE-D] は **[SE-D]** の特殊ケースであることが分かる．つまり，**[SE-D]** から企業行動に関する項を取り除いた

ものである．なお，土地供給が一定なので総地代は Z_1^D の第 2 項のように置き換えられる．

本節の議論から，市場均衡を解いた結果，利潤関数・効用関数を $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ の関数として表すことができ，かつそのベクトル場のヤコビ行列が対称 (i.e., 利潤関数・効用関数が積分可能) であるモデルでは，ポテンシャル関数が存在し，1 段階の最適化問題に帰着すると考えられる．

(2) Fujita and Ogawa モデル

Fujita and Ogawa モデル (以下，FO モデル) は企業と家計が立地選択を行うモデルである．各立地点の floor 供給 $\bar{S}$ は固定されているほか，企業 1 単位の floor 需要・労働需要，家計 1 単位の floor 需要，労働供給は一定である．

a) 立地主体の行動

家計の効用は，floor 需要，労働供給が固定されているので，合成財消費量に依存する．予算制約から，家計の間接効用最大化による立地選択行動は以下のように表される：

$$\max_{i,j} v_{ij} = \max_{i,j}\{W_j - T_{ij} - S^H \cdot R_i\} \tag{52}$$

ただし，S^H は家計 1 単位の floor 消費量である．

また，企業は利潤を最大化するように立地点 i を選択する：

$$\max_{i} \pi_i = \max_{i}\{A_i(\boldsymbol{m}) - S^F \cdot R_i - L \cdot W_i\} \tag{53}$$

ただし，S^F, L は企業 1 単位の土地需要量および労働需要量である．

b) 均衡条件

- 空間均衡条件

$$\begin{cases} v^* = W_j - T_{ij} - S^H R_i & \text{if} \ \ n_{ij} > 0 \\ v^* \geq W_j - T_{ij} - S^H R_i & \text{if} \ \ n_{ij} = 0 \end{cases} \quad \forall i, j \in \mathcal{K} \tag{54}$$

$$\begin{cases} \pi^* = A_i - S^F R_i - L W_i & \text{if} \ \ m_i > 0 \\ \pi^* \geq A_i - S^F R_i - L W_i & \text{if} \ \ m_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{55}$$

- 市場均衡条件

$$\begin{cases} \bar{S} = S^H \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + S^F m_i & \text{if} \ \ R_i > 0 \\ \bar{S} \geq S^H \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + S^F m_i & \text{if} \ \ R_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{56}$$

$$\begin{cases} \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} = L m_j & \text{if} \ \ W_j > 0 \\ \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \geq L m_j & \text{if} \ \ W_j = 0 \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{K} \tag{57}$$

- 立地主体数の保存則

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} m_i = M \tag{58}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = N \tag{59}$$

c) 均衡問題の等価最適化問題

FO モデルでは市場均衡条件を直接的に解くことはできない．そこで，**補題 1** に示した市場均衡の等価最適化問題を利用することを考えよう．いま，**[ME-P]** の未知変数 $\boldsymbol{X}$ はすべて定数である．つまり，FO モデルでは **[ME-P]** は未知変数を持たない問題となるので，短期均衡の問題を明示的に解く必要がない．したがって，式 (34) より 1 段階の最適化問題に帰着させることができる．

$$\textbf{[FO-P]} \quad \max_{\boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0}} Z_2^P(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) = \sum_j \sum_i m_i D_{ij} m_j - \sum_i \sum_j T_{ij} \cdot n_{ij} \tag{60}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} S^H + m_i S^F \leq \bar{S} \qquad \forall\, i \in \mathcal{K} \tag{61}$$

$$L m_j \leq \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \quad \forall\, j \in \mathcal{K} \tag{62}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = N \tag{63}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} m_i = M \tag{64}$$

FO モデルでは **[ME-P]** の目的関数 Z^P(式 (26)) のうち，第 1 項から第 3 項までが $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ によらない定数項となる[2]．したがって，**[FO-P]** の目的関数は企業間交流便益の総和と家計の通勤費用の総和のみによって与えられる．制約条件は **[ME-P]** の制約条件によって与えられる．

また，FO モデルの双対問題は以下のように与えられる．

$$\textbf{[FO-D]} \quad \min_{\pi^*, v^*, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{0}} Z_2^D(\pi^*, v^*, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{A}) = M\pi^* + N v^* + \bar{S} \sum_i R_i - \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{K}} \sum_{i \in \mathcal{K}} A_i D_{ij}^{-1} A_j \tag{65}$$

$$\text{s.t.} \quad \pi^* - \pi_i(R_i, W_j, A_i) \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{66}$$

$$v^* - v_{ij}(R_i, W_j) \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{K} \tag{67}$$

[FO-D] は **[SE-D]** の特殊ケースであり，土地供給が一定なので **[SE-D]** の目的関数の総地代の項を書き換えることで **[FO-D]** が得られる．

---

[2] 第 1 項は土地供給が一定のため，第 2,3 項は生産関数と効用関数の f, g が定数となるため．

6. おわりに

本研究では 2 種類の立地主体が存在し，土地と労働の需給が内生的に決定する立地均衡モデルを定式化した．さらに，立地主体の立地選択行動はポテンシャル・ゲームとして表現可能であることを明らかにした．具体的には，短期均衡の最適化問題の最適値関数が長期均衡の問題のポテンシャル関数となっていることを示した．さらに，生産関数や効用関数を特定化した特殊ケースでは，ポテンシャル関数を closed form で得られることを示した．

均衡解の安定性を議論するためには，ポテンシャル関数が closed form で得られることが望ましい．生産関数や効用関数に対してどのような仮定をおけば，短期・長期の問題を合わせた 1 段階の最適化問題として表現可能であるかを明らかにすることは，今後の課題である．

付録 I　式 (4),(5) の導出:Roy の恒等式

家計の直接効用最大化問題は以下のように表現される．

$$\max_{S^H_{ij}, L^H_{ij}, z_{ij}} u(S^H_{ij}, L^H_{ij}, z_{ij}) = z_{ij} + f(S^H_{ij}, L^H_{ij}) \tag{I.1}$$

$$\text{s.t.} \quad W_j(E - L^H_{ij}) = z_{ij} + R_i S^H_{ij} + T_{ij} \tag{I.2}$$

ラグランジュ乗数を λ として，ラグランジュ関数を以下のように定義する：

$$\begin{aligned} L =& z_{ij} + f(S^H_{ij}, L^H_{ij}) \\ &- \lambda(z_{ij} + R_i S^H_{ij} - W_j(E - L^H_{ij}) + T_{ij}) \end{aligned} \tag{I.3}$$

一階条件より，

$$\frac{\partial f(S^H_{ij}, L^H_{ij})}{\partial S^H_{ij}} = \lambda R_i \tag{I.4}$$

$$\frac{\partial f(S^H_{ij}, L^H_{ij})}{\partial L^H_{ij}} = \lambda W_j \tag{I.5}$$

$$\lambda = \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \tag{I.6}$$

間接効用関数

$$v(R_i, W_j) = u(S^H(R_i, W_j), L^H(R_i, W_j), z(R_i, W_j))$$

を R_i, W_j について微分すれば，

$$\frac{\partial v}{\partial R_i} = \frac{\partial u}{\partial S^H_{ij}} \frac{\partial S^H_{ij}}{\partial R_i} + \frac{\partial u}{\partial L^H_{ij}} \frac{\partial L^H_{ij}}{\partial R_i} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial R_i} \tag{I.7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial W_j} = \frac{\partial u}{\partial S^H_{ij}} \frac{\partial S^H_{ij}}{\partial W_j} + \frac{\partial u}{\partial L^H_{ij}} \frac{\partial L^H_{ij}}{\partial W_j} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial W_j} \tag{I.8}$$

となる．効用最大化の一階条件式 (I.4)〜(I.6) を代入する．

$$\frac{\partial v}{\partial R_i} = R_i \frac{\partial S^H_{ij}}{\partial R_i} + W_i \frac{\partial L^H_{ij}}{\partial R_i} + \frac{\partial z}{\partial R_i} \tag{I.9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial W_j} = R_i \frac{\partial S^H_{ij}}{\partial W_j} + W_i \frac{\partial L^H_{ij}}{\partial W_j} + \frac{\partial z}{\partial W_j} \tag{I.10}$$

需要関数 $S^H(R_i, W_j)$，$L^H(R_i, W_j)$ は予算制約を満たしている．予算制約を R_i, W_j について微分すれば，

$$-W_j \frac{\partial L^H_{ij}}{\partial R_i} = R_i \frac{\partial S^H_{ij}}{\partial R_i} + S^H_{ij} + \frac{\partial z}{\partial R_i} \tag{I.11}$$

$$(E - L^H_{ij}) - W_j \frac{\partial L^H_{ij}}{\partial W_j} = R_i \frac{\partial S^H_{ij}}{\partial W_j} + \frac{\partial z}{\partial W_j} \tag{I.12}$$

これを式 (I.9),(I.10) に代入すると次を得る．

$$-S^H_{ij}(R_i, W_j) = \frac{\partial v(R_i, W_j)}{\partial R_i} \tag{I.13}$$

$$(E - L^H_{ij}(R_i, W_j)) = \frac{\partial v(R_i, W_j)}{\partial W_j} \tag{I.14}$$

付録 II　補題 1，補題 2 の証明

まず，家計の効用最大化の一階条件と企業の利潤最大化の一階条件について整理しておこう．式 (2),(3) の家計の効用最大化の一階条件より，

$$\frac{\partial u(S^H_{ij}, L^H_{ij})}{\partial S^H_{ij}} = \frac{\partial f(S^H_{ij}, L^H_{ij})}{\partial S^H_{ij}} = R_i \tag{II.1}$$

$$\frac{\partial u(S^H_{ij}, L^H_{ij})}{\partial L^H_{ij}} = \frac{\partial f(S^H_{ij}, L^H_{ij})}{\partial L^H_{ij}} = W_j \tag{II.2}$$

式 (7) の企業の利潤最大化の一階条件より，

$$\frac{\partial g(S^F_i, L^F_i)}{\partial S^F_i} = R_i \tag{II.3}$$

$$\frac{\partial g(S^F_i, L^F_i)}{\partial L^F_i} = W_i \tag{II.4}$$

を得る．

[ME-P] のラグランジュ関数を

$$\begin{aligned} &L^P(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{W}) \\ &= Z^P(\boldsymbol{X}) + \sum_i R_i (S_i - \sum_j S^H_{ij} n_{ij} - S^F_i \cdot m_i) \\ &\quad + \sum_j W_j (\sum_i (E - L^H_{ij}) n_{ij} - L^F_j \cdot m_j) \end{aligned} \tag{II.5}$$

$$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{W} \geq \boldsymbol{0} \tag{II.6}$$

と定義する．**[ME-P]** の KKT 条件を以下に記す：

$$\begin{cases} S_i[S^{-1}(S_i) - R_i] = 0 \\ S^{-1}(S_i) - R_i \geq 0 \quad S_i \geq 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{II.7}$$

$$\begin{cases} S^F_i \left[-\frac{\partial g(S^F_i, L^F_i)}{\partial S^F_i} m_i + R_i m_i \right] = 0 \\ -\frac{\partial g(S^F_i, L^F_i)}{\partial S^F_i} m_i + R_i m_i \geq 0 \quad S^F_i \geq 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{II.8}$$

$$\begin{cases} L^F_i \left[-\frac{\partial g(S^F_i, L^F_i)}{\partial L^F_i} m_i + W_j m_i \right] = 0 \\ -\frac{\partial g(S^F_i, L^F_i)}{\partial L^F_i} m_i + W_j m_i \geq 0 \quad L^F_i \geq 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K} \tag{II.9}$$

$$\begin{cases} S_{ij}^H \left[-\frac{\partial f(S_{ij}^H, L_{ij}^H)}{\partial S_{ij}^H} n_{ij} + R_i n_{ij} \right] = 0 \\ \quad -\frac{\partial f(S_{ij}^H, L_{ij}^H)}{\partial S_{ij}^H} n_{ij} + R_i n_{ij} \geq 0 \quad S_{ij}^H \geq 0 \end{cases}$$
$$\forall i, j \in \mathcal{K} \quad \text{(II.10)}$$

$$\begin{cases} L_{ij}^H \left[\frac{\partial f(S_{ij}^H, L_{ij}^H)}{\partial L_{ij}^H} n_{ij} - W_j n_{ij} \right] = 0 \\ \quad \frac{\partial f(S_{ij}^H, L_{ij}^H)}{\partial L_{ij}^H} n_{ij} - W_j n_{ij} \geq 0 \quad L_{ij}^H \geq 0 \end{cases}$$
$$\forall i, j \in \mathcal{K} \quad \text{(II.11)}$$

以上の式 (II.8)〜(II.11) は $m_i = 0$ あるいは $n_{ij} = 0$ であれば，自明に成り立つ．$m_i > 0, n_{ij} > 0$ のとき，式 (II.1)〜式 (II.4) より，財需要あるいは供給が正ならば，財の需要価格は供給価格に等しいという条件であり，これは競争均衡である．

$$\begin{cases} R_i \left[S_i - \sum_j S_{ij}^H n_{ij} - S_i^F \cdot m_i \right] = 0 \\ \quad S_i - \sum_j S_{ij}^H n_{ij} - S_i^F \cdot m_i \geq 0 \quad R_i \geq 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K}$$
$$\text{(II.12)}$$

$$\begin{cases} W_j \left[\sum_i (E - L_{ij}^H) n_{ij} - L_j^F \cdot m_j \right] = 0 \\ \quad \sum_i (E - L_{ij}^H) n_{ij} - L_j^F \cdot m_j \geq 0 \quad W_j \geq 0 \end{cases}$$
$$\forall i, j \in \mathcal{K} \quad \text{(II.13)}$$

式 (II.12),(II.13) は市場均衡条件の式 (18),(19) と等価である．したがって，**[ME-P]** の解は市場均衡状態である．

次に，**[ME-D]** のラグランジュ関数を

$$L^D(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{W}) = \sum_i \int_{\underline{R_i}}^{R_i} S(\omega) \mathrm{d}\omega + \sum_i \pi(R_i, W_i, A_i) \cdot m_i + \sum_i \sum_j v(R_i, W_j) \cdot n_{ij} \quad \text{(II.14)}$$

$$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{W} \geq \boldsymbol{0} \quad \text{(II.15)}$$

と定義する．**[ME-D]** の KKT 条件は式 (II.12),(II.13) であり，市場均衡条件と等価である．

付録 III　補題 3 の証明

[ME-P]，**[ME-D]** の最適解は与件のパラメータ $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ を用いて表される．つまり，短期均衡の解は $\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}), \boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}), \boldsymbol{W}^*(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ と表せる．式 (II.5),(II.14) に記したラグランジュ関数と包絡線定理を用いて

$$\frac{\partial Z^*(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})}{\partial m_i} = \frac{\partial L^P}{\partial m_i} = \frac{\partial L^D}{\partial m_i} = \pi_i(R_i^*(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}), W_i^*(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}), A_i(\boldsymbol{m})) \quad \forall i \in \mathcal{K} \quad \text{(III.1)}$$

$$\frac{\partial Z^*(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})}{\partial n_{ij}} = \frac{\partial L^P}{\partial n_{ij}} = \frac{\partial L^D}{\partial n_{ij}} = v_{ij}(R_i^*(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}), W_j^*(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})) \quad \forall i, j \in \mathcal{K} \quad \text{(III.2)}$$

が与えられる．

付録 IV　命題 1 の証明

[SE-P] のラグランジュ関数を以下のように定義する：

$$L = -Z^*(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) + \pi^*(\sum_{i \in \mathcal{K}} m_i - M) + v^*(\sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} - N) \quad \text{(IV.1)}$$

ただし，π^*, v^* はラグランジュ乗数である．このラグランジュ関数の一階条件を以下に記す：

$$\begin{cases} m_i[\pi^* - \pi_i] = 0 \\ \quad \pi^* - \pi_i \geq 0 \quad m_i \geq 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{K} \quad \text{(IV.2)}$$

$$\begin{cases} n_{ij}[v^* - v_{ij}] = 0 \\ \quad v^* - v_{ij} \geq 0 \quad n_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad \forall i, j \in \mathcal{K} \quad \text{(IV.3)}$$

$$\sum_i \sum_j n_{ij} = N \quad \text{(IV.4)}$$

$$\sum_i m_i = M \quad \text{(IV.5)}$$

式 (IV.2),(IV.3) は空間均衡条件に他ならない．また，式 (IV.4),(IV.5) は立地主体数の保存則である．

参考文献

1) Fujita, M. and Ogawa, H. : Multiple equilibria and structural transition of non-monocentric urban configurations, *Regional science and urban economics*, Vol. 12, No.2 , pp. 161-196, 1982.
2) Ogawa, H. and Fujita, M.: Nonmonocentric urban configurations in a two-dimensional space, *Environment and Planning A*, Vol.21, pp.363-374, 1989.
3) Fujita, M.: A monopolistic competition model of spatial agglomeration: Differentiated product approach. *Regional Science and Urban Economics*, Vol.18, pp.87-124, 1988.
4) Lucas, R.E. and Rossi-Hansberg, E.: On the internal structure of cities. *Econometrica*, Vol.70, pp.1445-1476, 2002.
5) Berliant, M., Peng, S.K. and Wang, P.: Production externalities and urban configuration, *Journal of Economic Theory*, Vol.104, pp.275-303, 2002.
6) Berliant, M. and Wang, P.: Urban growth and subcenter formation: A trolley ride from the staples center to disneyland and the rose bowl, *Journal of Urban Economics*, Vol.63, pp.679-693, 2008.

7) Osawa, M. and Akamatsu, T.: Stochastically stablity analysis of a model of endogenous urban subcenter formation, 土木計画学研究・講演集 (CD-ROM), Vol.54, 2016.
8) 山口修平，赤松隆：複数都心形成モデルの確率安定性解析一線分都市 vs. 円周都市一，土木計画学研究・講演集 (CD-ROM), Vol.57, 2018.
9) Sandholm, W. H.: *Population games and evolutionary dynamics*, MIT press, 2010.
10) Sandholm, W. H.: Potential games with continuous player sets, *Journal of Economic Theory*, Vol.97, No.1, pp.81-108, 2001.
11) Alonso, W.:*Location and Land Use: Toward a General Theory of Land Rent*, Harvard University Press, Cambridge, 1964.

(2018. 7. 31 受付)

POTENTIAL GAME REPRESENTATION OF THE SPATIAL ECONOMIC MODEL WITH SUPPLY-DEMAND EQUILIBRIUM OF THE LAND AND THE LABOR MARKETS

Shuhei YAMAGUCHI and Takashi AKAMATSU