

# q一般化ネスティッドロジットモデルとその相関構造

中山 晶一朗<sup>1</sup>, 力石 真<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 金沢大学 地球社会基盤学系 (〒920-1192 金沢市角間町)

E-mail: nakayama@staff.kanazawa-u.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 広島大学大学院 国際協力研究科 (〒739-8529 東広島市鏡山一丁目5番1号)

E-mail: chikaraishim@hiroshima-u.ac.jp

ランダム効用理論に基づいた離散選択モデルの中で、操作性の高さからロジットモデルが多用されている。ロジットモデルの誤差項は極値分布の一つのガンベル分布に従うが、著者らが開発した一般化ロジットモデルはガンベル分布を特殊形として含む一般化極値分布に従うランダム効用を持つ離散選択モデルである。本稿では、一般化極値分布をさらに一般化した多変量一般化極値分布に従い、ネスト構造化されたランダム効用を持つ一般化ネスティッドロジットモデルを構築し、その相関構造も明らかにする。

**Key Words :** *generalized nested logit model, multivariate generalized extreme value distribution*

## 1. はじめに

交通分野では、ランダム効用理論に基づいた離散選択モデルの中で操作性の高さからロジットモデルが多用されている。ロジットモデルはランダム効用理論に基づいた離散選択モデルの一つであり、効用が極値分布の一つであるガンベル分布に従う。効用が正規分布に従う場合はプロビットモデルと呼ばれている。中心極限定理などから類推できるように、プロビットモデルの方が現象の再現上、本来的には望ましいとも考えられるが、正規分布の確率密度関数を積分することができないことを起因として、プロビットモデルの推定は数値的に扱うもしくは近似的にしか扱うことができないという欠点を持つ。一方、ロジットモデルは閉形式で問題を記述することができ、数理的な操作性が高く、プロビットモデルよりもロジットモデルが多用されている。

ロジットモデルを基礎としたより精緻化された様々なモデルがこれまでも開発されている。ロジットモデルの問題点であるIIA特性の緩和することができるネスティッドロジットモデルは実務的にも多用されている。

ロジットモデルで用いられているガンベル分布は極値分布の一つであるが、ガンベル分布を含むより一般的な分布として一般化極値分布<sup>1)</sup>がある。著者らはロジットモデルで用いられるガンベル分布を一般化極値分布に拡張した場合の離散選択モデルを開発した<sup>2)</sup>。しかし、そのモデルはロジットモデルの一般化ではあるものの、各選択肢のランダム効用は独立であるという問題点を持ってい

る。本稿では、その問題を緩和するために、一般化ロジットモデルを多変量化するとともに、その相関構造を明らかにする。選択肢にネスト構造を仮定し、各選択肢のランダム効用が多変量一般化極値分布に従う離散選択モデルである。これは従来までのネスティッドロジットモデルを一般化したモデルと言える。このような一般化ネスティッドロジットモデルを構築し、それを広島市の交通手段選択行動の分析に適用し、そのモデルの妥当性等を検討する。

## 2 q一般化ロジットモデル

### (1) 一般化極値分布

ロジットモデルでは、効用（もしくは誤差項）はガンベル分布に従っている。ガンベル分布は極値分布の1つのタイプであり、ガンベル分布を含むより広い極値分布には一般化極値分布がある。一般化極値分布はガンベル分布を一般化したものであり、一般化極値分布の累積分布関数  $\tilde{F}(x)$  は以下の通りである。

$$\tilde{F}(x) = \exp \left\{ - \left[ 1 + \gamma \left( \frac{x - \mu}{\theta} \right) \right]^{-\frac{1}{\gamma}} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $\gamma = 0$  の時、 $\exp(x) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} [1 + \gamma x]^{\frac{1}{\gamma}}$  となるため、上の式は

$$\tilde{F}(x | \gamma = 0) = \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{x - \mu}{\theta} \right) \right] \right\} \quad (2)$$

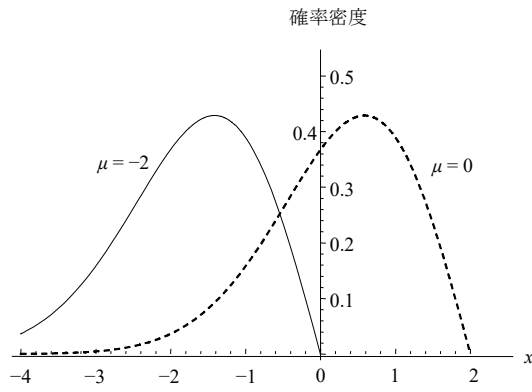


図-1  $q=1, \mu=0$ の時の一般化極値分布の確率密度関数

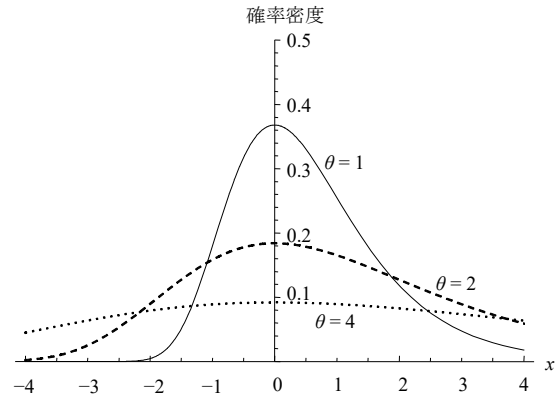


図-2  $q=1/2, \theta=1$ の時の一般化極値分布の確率密度関数

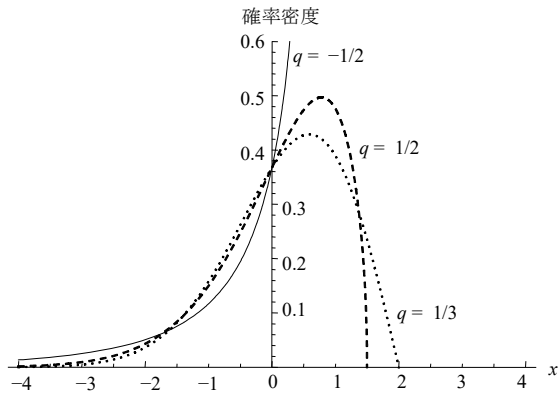


図-3  $q<1, \theta=1, \mu=0$ の時の一般化極値分布の確率密度関数

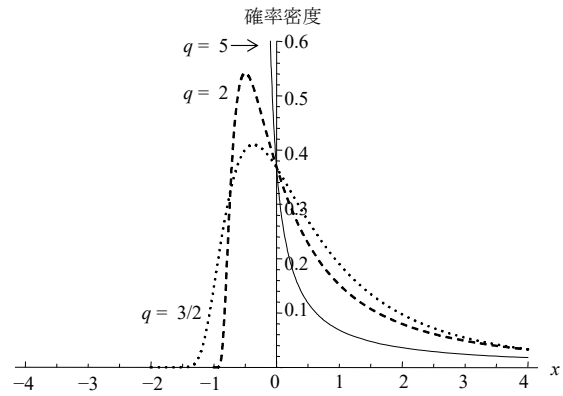


図-4  $q>1, \theta=1, \mu=0$ の時の一般化極値分布の確率密度関数

となり、ガンベル分布であることがわかる。なお、さらに、 $\theta=1, \mu=0$ の時は標準ガンベル分布である。

以降の議論のために、以下の $q$ -指数関数

$$\exp_q(x) := [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)} \quad (3)$$

を導入する。これはツァリス統計でよく用いられているものである。前述の通り、 $\exp(x) = \lim_{q \rightarrow 0} [1 + qx]^{1/q}$ であり、上述の $\exp_q(x)$ は $q=1$ 通常の指数関数となる。つまり、 $\exp_1(x) = \exp(x)$ である。このように $q$ -指数関数は通常の指数関数を特殊形として持つ一般化指数関数の一つである。同様に、

$$\ln_q(x) := (x^{1-q} - 1)/(1-q) \quad (4)$$

も導入する。この $q$ -対数関数も、 $q=1$ の時、 $\ln_1(x) = \ln(x)$ と通常の対数関数であり、対数関数の一般化である。また、 $\ln_q(\exp_q[x]) = x$ であることは容易に分かる。

$q$ -指数関数を用いると、一般化極値分布の累積分布関数  $\tilde{F}(x)$  は

$$\begin{aligned} F(x) &= \exp \left[ -\exp_q \left( -\frac{x-\mu}{\theta} \right) \right] \\ &= \exp \left\{ - \left[ 1 - (1-q) \frac{x-\mu}{\theta} \right]^{1/(1-q)} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

と書くことができる。

一般化極値分布の平均は

$$\begin{cases} \mu + \frac{\Gamma(2-q)-1}{q-1} \theta & q < 2 \text{ and } q \neq 1 \\ \mu + \eta \theta & q = 1 \end{cases} \quad (6)$$

である。なお、 $\eta = 0.572216$  (オイラー定数)、 $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数である。 $q \geq 2$ の時は平均値が存在しない。分散は

$$\begin{cases} \frac{\Gamma(3-2q) - [\Gamma(2-q)]^2}{(q-1)^2} \theta^2 & q < \frac{3}{2} \text{ and } q \neq 1 \\ \frac{\pi^2 \theta^2}{6} & q = 1 \end{cases} \quad (7)$$

である。分散は $q \geq 3/2$ の時存在しない。

図-1は、 $q=1, \mu=0$ の場合の一般化極値分布 (ガンベル分布) の確率密度関数である。 $q=1$ の場合の一般化極値分布はガンベル分布となる。図-1から分かるように、 $\theta$ によってばらつきが異なる。なお、ガンベル分布の定義域は $-\infty$ から $+\infty$ までである。図-2は、 $q=1/2, \theta=1$ の場合の一般化極値分布の確率密度関数である。 $q=1$ のガンベル分布の一般化極値分布の定義域は $-\infty$ から $+\infty$ までであったが、 $q \neq 1$ の一般化極値分布の定義域は上限もしくは下限がある。図-2から分かるように、 $\mu$ によって、

分布が  $x$  軸について平行移動する。図-3は  $q < 1, \theta = 1, \mu = 0$  の場合の一般化極値分布の確率密度関数である。この図から分かるように、 $q < 1$  の場合の一般化極値分布は上限があり、下限はない ( $-\infty$  まで)。図-4は  $q > 1, \theta = 1, \mu = 0$  の場合の一般化極値分布の確率密度関数である。 $q > 1$  の場合は、図-3とは逆に、下限があり、上限がない ( $+\infty$  まで) 分布となる。所要時間などは負の値はとらず、基本的には自由走行時間以上の値をとるため、このような分布をモデル化するためには、ガンベル分布よりも一般化極値分布の方が都合が良いと考えられる。

## (2) 一般化ロジットモデル<sup>2)</sup>

前節で述べた一般化極値分布に従うランダム効用を持つ離散選択モデルを本節では考える。通常のロジットモデルでは、ランダム効用  $U_i$  はガンベル分布に従うが、 $U_i = v_i + \varepsilon_i$  と確定効用と誤差項(確率項)に分離可能である。しかしながら、このように確定項と確率項が分離されるために、確定項の大小にかかわらず、効用の分散が同じになる(homeogeneityである)。所要時間などはその平均値が長ければ分散も大きくなるのが通常であり、必ずしもhomeogeneityが良いとは限らない。本研究では、確定項と確率項を分離させない。ランダム効用  $U_i$  の平均値を効用関数で与えることにする。つまり、

$$E[U_i] = v_i \quad (8)$$

である。ここで、 $E[\cdot]$  は期待値をとる操作子、 $U_i$  は選択枝  $i$  のランダム効用、 $v_i$  は選択枝  $i$  の効用の平均値である。このように効用の平均値を効用関数で与えるが、本稿では線形効用関数で与えることにする。つまり、

$$v_i = \alpha_{i0} + \sum_{k=1}^K \alpha_k y_{ik} \quad (9)$$

とする。ここで、 $\alpha_{i0}$  は選択枝  $i$  の定数項、 $\alpha_k$  はパラメータ ( $k=1, 2, \dots, K$ )、 $y_{ik}$  は選択枝  $i$  の  $k$  番目の変数である。平均値が  $v_i$  となる(選択枝  $i$  の)効用が従う一般化極値分布の累積分布関数  $F_i(x)$  は以下ようになる。

$$F_i(x) = \exp \left[ - \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{[\Gamma(2-q)]^{1/(q-1)}} \exp_q(-x) \right] \\ = \exp \left[ - \exp_q \left( - \frac{x - \frac{1}{1-q} \left\{ 1 - \frac{1+(q-1)v_i}{\Gamma(2-q)} \right\}}{\frac{1+(q-1)v_i}{\Gamma(2-q)}} \right) \right] \quad (10)$$

$$\mu = \frac{1}{1-q} \left[ 1 - \frac{1+(q-1)v_i}{\Gamma(2-q)} \right] \text{ と } \theta = \frac{1+(q-1)v_i}{\Gamma(2-q)} \text{ を式(6)に代}$$

入することによって、 $E[U_i] = v_i$  であることを確認することができる。ただし、 $q < 2$  でなければならない。また、 $q \neq 1$  の場合、 $1+(q-1)v_i \geq 0$  でなければならない。

選択枝  $i$  を選択する確率はその選択枝のランダム効用が他の選択枝のランダム効用よりも大きい確率であり、

$$p_i = \Pr[U_i > \max_{i' \neq i} (U_{i'})] \\ = \int_{z \in \hat{\Omega}} F_1(x) \cdots F_{i-1}(x) f_i(x) F_{i+1}(x) \cdots F_I(x) dx \quad (11)$$

として与えられる。ここで、 $f_i(x)$  は選択枝  $i$  のランダム効用が従う一般化極値分布の確率密度関数であり、 $I$  は選択枝の総数、 $\hat{\Omega}$  は定義域である。ここで、 $z := \exp_q(-x)$  とすると、確率密度関数  $f_i(x)$  は

$$f_i(x) = \frac{d}{dx} F_i(x) = - \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{[\Gamma(2-q)]^{1/(q-1)}} F_i(x) \frac{dz}{dx} \quad (12)$$

となる。また、 $dz/dx = -[\exp_q(-x)]^q$  であり、これらを式(11)に代入すると、

$$p_{ij} = - \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{[\Gamma(2-q)]^{1/(q-1)}} \int_{z \in \hat{\Omega}} \prod_{i=1}^I F_i(x) dz \\ = - \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{[\Gamma(2-q)]^{1/(q-1)}} \int_{z \in \hat{\Omega}} \exp \left[ - \frac{z}{[\Gamma(2-q)]^{1/(q-1)}} \sum_{i=1}^I \exp_{2-q}(v_i) \right] dz \\ = \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{\sum_{i=1}^I \exp_{2-q}(v_i)} \left[ \exp \left\{ - \frac{z}{[\Gamma(2-q)]^{1/(q-1)}} \sum_{i=1}^I \exp_{2-q}(v_i) \right\} \right]_0^{\hat{\Omega}} \\ = \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{\sum_{i=1}^I \exp_{2-q}(v_i)} \quad (13)$$

となる。ここで、 $\hat{\Omega}_i$  は  $z$  の定義域である。このように、

$$p_i = \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{\sum_{i=1}^I \exp_{2-q}(v_i)} \quad (14)$$

が得られる。 $q=1$  の時、上の式は

$$p_i = \frac{\exp(v_i)}{\sum_{i=1}^I \exp(v_i)} \quad (15)$$

であり、式(14)の一般化ロジットモデルは通常の多項ロジットを含むことが分かる。通常の多項ロジットモデルと一般化ロジットモデルの違いは、通常のものでは通常の指数関数を用いられている一方、一般化ロジットモデルでは、その指数関数を一般化された指数関数である  $q$ -指数関数に置き換わっている点である。ロジットモデルの一般化としては様々なものがあるため、本研究での一般化ロジットモデルを「 $q$ -一般化ロジットモデル」と呼ぶことにする。

式(14)の  $q$ -一般化ロジットモデルでは、選択枝の効用が一般化極値分布となる。これによって、多項ロジットモデルでの各選択枝の効用のばらつきが同じという問題を緩和することができる。このモデルを経路選択に適用

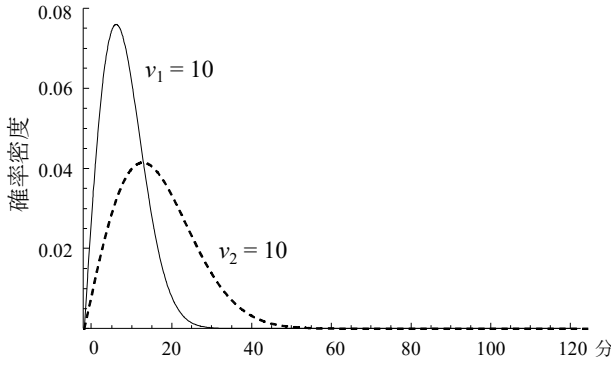


図-5 所要時間が10と20の経路の不効用の確率密度(q=0.5)

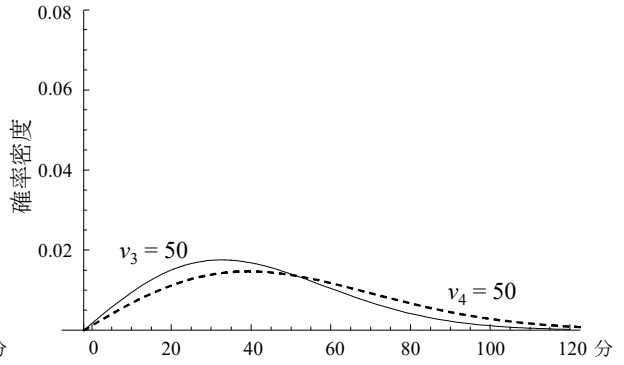


図-6 所要時間が50と60の経路の不効用の確率密度(q=0.5)

することを考えよう。単純に、 $v_i = -c_i$ と設定してみる。ただし、 $-c_i$ は経路*i*の所要時間平均である。ランダム不効用 $-U_i$ の分布（知覚所要時間分布）は図-5、図-6の通りとなる。なお、いずれも $q=0.5$ の場合である。図-5は所要時間の平均値が10と20の場合であり、図-6は所要時間の平均値が50と60の場合である。多項ロジットモデルの場合は10、20、50、60に関わらずばらつきは同じになるが、 $q$ 一般化ロジットモデルの場合は平均所要時間が長いほどばらつきが大きく、現実に近い状況を表現することができている。

式(14)は

$$p_i = \frac{\exp_{2-q}(v_i)}{\sum_{i=1}^I \exp_{2-q}(v_i)} = \frac{[1+(q-1)v_i]^{\frac{1}{q-1}}}{\sum_{i=1}^I [1+(q-1)v_i]^{\frac{1}{q-1}}} \quad (16)$$

$$= \frac{\left(v_i + \frac{1}{q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}}}{\sum_{i=1}^I \left(v_i + \frac{1}{q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}}} = \frac{\tilde{v}_i^{-\xi}}{\sum_{i=1}^I \tilde{v}_i^{-\xi}}$$

と変形できる。ここで、

$$\tilde{v}_i = v_i + \frac{1}{q-1} = \alpha_{i0} + \frac{1}{q-1} + \alpha_{i1}y_{ij1} + \dots + \alpha_{ik}y_{ijk} \quad (17)$$

$$\xi = -\frac{1}{q-1} \quad (18)$$

である。このように、式(14)は効用がワイブル分布に従う離散選択モデルであるワイビットモデル<sup>3)</sup>も含むこともわかる。このように、一般化ロジットモデルはワイビットモデルも含む。

ランダム効用 $U_i (i=1,2,\dots,I)$ の最大値の分布の累積分布関数 $F^{\max}(x)$ は以下のように与えられる。

$$F^{\max}(x) = \prod_{i=1}^I F_i(x) = \exp \left[ -\frac{\sum_{i=1}^I \exp_{2-q}(v_i)}{[\Gamma(2-q)]^{\frac{1}{q-1}}} \exp_q(-x) \right] \quad (19)$$

このように最大効用の分布も一般化極値分布となる。そ

の平均が式(6)で与えられ、上の式と式(10)を比較することにより、最大効用の期待値は

$$E[\max(U_{ij} | \forall j)] = \ln_{2-q} \left[ \sum_{j=1}^{J_j} \exp_{2-q_i}(v_{ij}) \right] \quad (20)$$

となることが分かる。 $q=1$ の時、 $\max[U_{ij} | \forall j] = \ln[\sum \exp(v_{ij})]$ となり、いわゆるログサムである。この点においても通常のロジットモデルの一般化であることを確認できる。

### 3. 多変量一般化極値分布に従う効用

上述の一般化ロジットモデルでは、一般化極値分布を誤差項に持つものの、それぞれの選択肢の誤差項は互いに独立であった。この独立の仮定の緩和を考える。通常のロジットモデルについては、これまで選択構造のネスト化によるこの問題の緩和が一つの主要なアプローチであった。このアプローチでは、ネスティッドロジットモデル、クロスネスティッドモデルなど様々なモデルが開発されてきている。

本稿では、 $q$ 一般化ロジットモデルについて、選択肢構造のネスト化を行う。

McFadden<sup>4)</sup>は、以下の4つの性質をもつ $G(y_1, y_2, \dots)$ 関数を用いて、ロジットモデルの多変量化を行った。

$$\textcircled{1} \quad G(y_1, y_2, \dots, y_j) \geq 0 \quad (21)$$

$$\textcircled{2} \quad G(\alpha y_1, \alpha y_2, \dots, \alpha y_j) = \alpha G(y_1, y_2, \dots, y_j) \quad (22)$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{y_j \rightarrow \infty} G(y_1, y_2, \dots, y_j) = \infty \quad (23)$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\partial^k G(y_1, y_2, \dots, y_j)}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2} \dots \partial y_{i_k}} \begin{cases} \geq 0 & \text{if } k = 2r - 1 \\ \leq 0 & \text{if } k = 2r \end{cases} \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

なお、この②の性質は以下のような $s$ 次同次 ( $s \geq 2$ ) にまで拡張されていることを付記しておきたい<sup>5)</sup>。

$$\textcircled{2} \quad G(\alpha y_1, \alpha y_2, \dots, \alpha y_l) = \alpha^s G(y_1, y_2, \dots, y_l) \quad (25)$$

ここで、以降の議論のために、

$$G_i(y_1, y_2, \dots, y_l) = \frac{\partial G(y_1, y_2, \dots, y_l)}{\partial y_i} \quad (26)$$

と表記することにする。各選択枝の誤差項が

$$\exp[-G(e^{-\varepsilon_1}, e^{-\varepsilon_2}, \dots, e^{-\varepsilon_l})] \quad (27)$$

という結合累積分布関数を持つ多変量極値分布に従う場合のランダム効用離散選択モデルの選択枝*i*の選択確率は以下のように与えられる<sup>4)</sup>。

$$p_i = \frac{e^{v_i} G_i(y_1, y_2, \dots, y_l)}{G(y_1, y_2, \dots, y_l)} \quad (28)$$

以上のように、McFadden<sup>4)</sup>は、選択枝間の誤差項がG関数を用いた多変量極値分布に従うということにより、選択枝間の誤差項間の相関を考慮できるロジット系ランダム効用離散選択モデルを構築した。

Mattsson et al.<sup>6)</sup>はMcFadden<sup>4)</sup>のG関数を拡張したA関数 (aggregation function) を提案した。A関数を用いた多変量極値分布の結合累積分布関数は

$$\exp[-A(-w_1 \ln \Psi(-x_1), -w_2 \ln \Psi(-x_2), \dots, -w_l \ln \Psi(-x_l))] \quad (29)$$

である。なお、 $\Psi$ はシード (種) となる分布の累積分布関数で、 $w_i > 0$  である。

本研究では、以下の結合累積分布関数を持つ多変量極値分布を用いる。

$$\exp[-G\{w_1 \exp_q(-x_1), \dots, w_l \exp_q(-x_l)\}] \quad (30)$$

McFadden<sup>4)</sup>は式(27)を考えていたため、上の式はその拡張と言える。一方、Mattsson et al.<sup>6)</sup>の特殊形と言える。

G関数自体は一般的なものとなっているが、McFadden<sup>4)</sup>はネステッドロジットモデルが導出される以下の具体的なG関数形を提示している。

$$G(y_1, y_2, \dots, y_l) = \sum_{i=1}^m \left[ \left( \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right] \quad (31)$$

ここで、 $m$ はネストの数、 $n_i$ はネスト*i*の選択枝の数、 $\rho_i$ はスケールパラメータである。このネステッドロジットモデルを導出するG関数を式(30)に入れ込むことによって、一般化ネステッドロジットモデルを導出することが可能となる。McFadden<sup>4)</sup>と異なっている点は、G関数の引数として、通常の数関数を用いずに、その一般形であるq指数関数を用いていることである。この観点から、導出されるモデルは一般化ネステッドロジットモデルと言える。したがって、以下の多変量一般化極値分布の累積分布関数を用いる。

$$\exp \left\{ - \sum_{i=1}^m \left[ \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{w_{ij} \exp_q(-x_{ij})\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right] \right\} \quad (32)$$

ここで  $w_{ij}$  を  $\exp_{2-q}(v_{ij}) \geq 0$  とおく。また、 $v_{ij}$  は効用関数で与えることとする。このとき、

$$\begin{aligned} & \exp[-w_{ij} \exp_q(-x_{ij})] \\ &= \exp[-\exp_{2-q}(v_{ij}) \exp_q(-x_{ij})] \\ &= \exp \left[ - \left\{ 1 + (q-1)v_{ij} \right\}^{q-1} \left\{ 1 + (1-q)(-x_{ij}) \right\}^{\frac{1}{1-q}} \right] \\ &= \exp \left[ - \left\{ 1 + (1-q) \frac{-(x_{ij} - v_{ij})}{1 + (q-1)v_{ij}} \right\}^{\frac{1}{1-q}} \right] \\ &= \exp \left[ - \exp_q \left( - \frac{x_i - v_{ij}}{1 + (q-1)v_{ij}} \right) \right] \end{aligned} \quad (33)$$

上の式を用いて、多変量一般化極値分布の累積分布関数  $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  を以下のように与える。

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^m \left[ \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ \exp_{2-q}(v_{ij}) \exp_q(-x_{ij}) \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right] \right\} \quad (34)$$

$\exp_1(x) = \exp(x)$  であるため、上の式は  $q=1$  の時、

$$\exp \left[ - \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ \exp(-[x_i - v_{ij}]) \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right] \quad (35)$$

となり、これは通常のネステッドロジットモデルの効用が従う多変量確率分布の累積分布関数である。

式(33)の多変量一般化極値分布の周辺分布は

$$F_{\mathbf{X}}(\infty, \dots, \infty, x_{ij}, \infty, \dots, \infty) = \exp[-\exp_{2-q}(v_{ij}) \exp_q(-x_{ij})] \quad (36)$$

となる。これは上述の一般化極値分布の累積分布関数と同じものである。式(6)(7)より、多変量一般化極値分布の平均と分散は以下の通りとなる。

$$E[X_{ij}] = \left( v_{ij} - \frac{1}{1-q} \right) \Gamma(2-q) + \frac{1}{1-q} \quad (37)$$

$$\text{Var}[X_{ij}] = \left( v_{ij} - \frac{1}{1-q} \right)^2 \left[ \Gamma(3-2q) - \{\Gamma(2-q)\}^2 \right] \quad (38)$$

ここで、 $\mathbf{X}$  は上述の多変量一般化極値分布に従い、 $X_{ij}$  はその成分である。また、 $E[\cdot]$  と  $\text{Var}[\cdot]$  は期待値と分散を算出する演算子である。

次に、相関について考えよう。通常のネステッドロジットモデルの効用の相関は解析的に与えられている

(e.g. Daganzo & Kusnic, 1993<sup>7)</sup>). 一方, Marzano *et al.* (2013)<sup>8)</sup>はクロスネステッドロジットモデルの共分散等は数値計算的に与えている.

式(34)の累積分布関数で与えられる多変量一般化極値分布の共分散・相関について, 異なったネストにある場合, すなわち,  $j \neq j'$ の時,

$$\begin{aligned} & F_{\mathbf{X}}(\dots, \infty, x_{ij}, \infty, \dots, \infty, x_{ij'}, \infty, \dots) \\ &= \exp\left[-\left\{\exp_{2-q}(v_{ij})\exp_q(-x_{ij}) + \exp_{2-q}(v_{ij'})\exp_q(-x_{ij'})\right\}\right] \\ &= F_{X_{ij}}(x_{ij})F_{X_{ij'}}(x_{ij'}) \end{aligned} \quad (39)$$

となり, それらは互いに独立となる.

同じネスト  $j$ にある異なった2つの選択肢のランダム効用の相関について考えるために  $s = \exp_q\left(-\frac{x_{ij}-v_{ij}}{1+(q-1)v_{ij}}\right)$  及び

$$t = \exp_q\left(-\frac{x_{ij}-v_{ij}}{1+(q-1)v_{ij}}\right) \text{ とおくと, } X_{ij} = \frac{1}{1-q} + (v_{ij} - \frac{1}{1-q})S^{1-q}$$

及び  $X_{ij} = \frac{1}{1-q} + (v_{ij} - \frac{1}{1-q})T^{1-q}$  となる. ここで,  $S$ と $T$ は  $s$ と $t$ の確率変数である. Shi *et al.* (1992)<sup>9)</sup>は累積分布関数が  $\exp[-\{(s+\rho)^{\rho}\}]$  の二変量確率分布のモーメントを以下のように与えている.

$$E[S^\xi T^\zeta] = \frac{\Gamma(1+\frac{\xi}{\rho})\Gamma(1+\frac{\zeta}{\rho})\Gamma(1+\xi+\zeta)}{\Gamma(1+\frac{\xi+\zeta}{\rho})} \quad (40)$$

ここで,  $\xi=1-q$ ,  $\zeta=0$  を上の式に入れると,  $E[S^{1-q}] = \Gamma(2-q)$  となり,  $X_{ij} = \frac{1}{1-q} + (v_{ij} - \frac{1}{1-q})S^{1-q}$  であったため, 式(37)が得られる. 同様にすると,

$$\begin{aligned} E[X_{ij}X_{ij'}] &= \left(\frac{1}{1-q}\right)^2 + \frac{1}{1-q}(v_{ij} + v_{ij'} - \frac{2}{1-q})\Gamma(2-q) \\ &\quad + E[S^{1-q}T^{1-q}] \end{aligned} \quad (41)$$

となり,

$$\begin{aligned} & E[X_{ij}X_{ij'}] - E[X_{ij}]E[X_{ij'}] \\ &= \left(v_{ij} - \frac{1}{1-q}\right)\left(v_{ij'} - \frac{1}{1-q}\right)\left\{E[S^{1-q}T^{1-q}] - [\Gamma(2-q)]^2\right\} \end{aligned} \quad (42)$$

であるため, 式(40)から,  $E[S^{1-q}T^{1-q}] = \frac{\{\Gamma(1+(1-q)/\rho)\}^2 \Gamma(3-2q)}{\Gamma(1+2(1-q)/\rho)}$  が得られる. 結果として, 同じネスト  $j$ 内の  $X_{ij}$ と $X_{ij}$ の共分散は以下の通りとなる.

$$\begin{aligned} & E[X_{ij}X_{ij}] - E[X_{ij}]E[X_{ij}] \\ &= \left(v_{ij} - \frac{1}{1-q}\right)\left(v_{ij} - \frac{1}{1-q}\right) \times \\ &\quad \left\{ \frac{\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\rho_j}[1-q]\right)\right\}^2 \Gamma(3-2q)}{\Gamma\left(1+\frac{2}{\rho_j}[1-q]\right)} - [\Gamma(2-q)]^2 \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

これを用いると, 相関係数も以下のように与えることができる.

$$\begin{aligned} & \text{Corr}[X_{ij}, X_{ij}] \\ &= \begin{cases} \frac{\Gamma(3-2q) \frac{\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\rho_j}[1-q]\right)\right\}^2}{\Gamma\left[1+\frac{2}{\rho_j}[1-q]\right]} - [\Gamma(2-q)]^2}{\Gamma(3-2q) - [\Gamma(2-q)]^2} & \text{if } i \text{ and } i' \text{ are in the same nest } j, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (44)$$

ここで,  $\text{Corr}[\cdot, \cdot]$ は相関係数を与える演算子である. 図-7は同じネストの中の異なった選択肢のランダム効用の相関係数をパラメータ  $q$ と $\rho$ (もしくは $\rho$ )に関して図示したものである. なお,  $\rho$ (もしくは $\rho$ )=1, の時は,

$$F_{\mathbf{X}}(\dots, \infty, x_{ij}, \infty, \dots, \infty, x_{ij}, \infty, \dots) = F_{X_{ij}}(x_{ij})F_{X_{ij}}(x_{ij}) \text{ と}$$

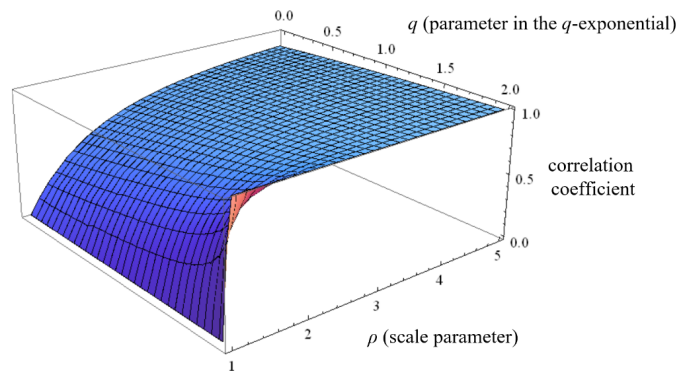


図-7 同じネスト内の効用の相関係数

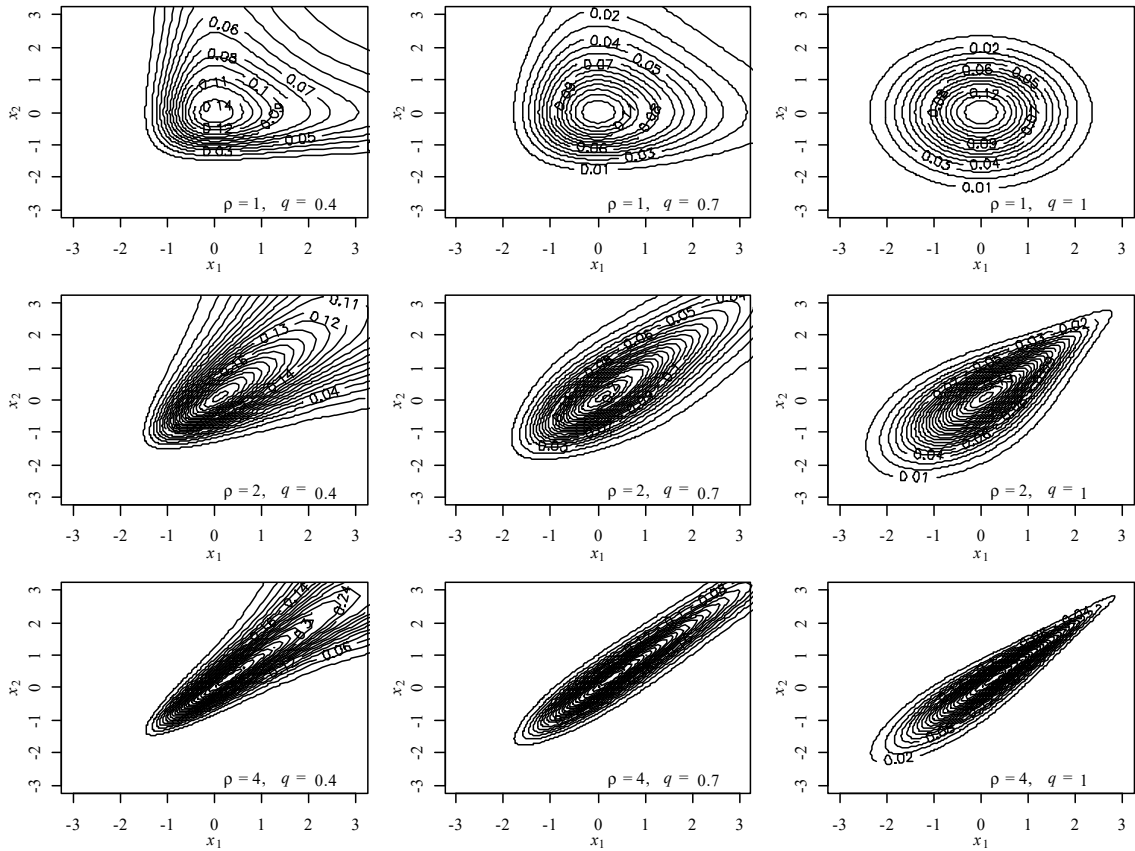


図-8 2変量一般化極値分布の確率密度関数 ( $\exp_{2-q}(v_1) = \exp_{2-q}(v_2) = 1$ )

なり,  $\text{Corr}[X_j, X_j] = 0$ となる. また,  $q=1$ の時は, 上の式より,

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\Gamma(3-2q) \left[ \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\rho_j} [1-q]\right)}{\Gamma\left[1 + \frac{2}{\rho_j} [1-q]\right]} \right]^2 - [\Gamma(2-q)]^2}{\Gamma(3-2q) - [\Gamma(2-q)]^2} = 1 - \frac{1}{\rho_j^2} \quad (45)$$

となる. つまり,  $q=1$ の時の相関係数は  $1 - 1/\rho_j^2$  であり, 通常のネステッドロジットの相関係数(e.g. Daganzo & Kusnic, 1993)と同じになる.

図-8は以下の累積分布関数を持つ2変量一般化極値分布の確率密度関数を示したものである.

$$\exp \left[ - \left( \left\{ \exp_{2-q}(v_1) \exp_q(-x_1) \right\}^\rho + \left\{ \exp_{2-q}(v_2) \exp_q(-x_2) \right\}^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \right] \quad (46)$$

ただし, 簡単のために  $\exp_{2-q}(v_1) = \exp_{2-q}(v_2) = 1$  とした図になっている. 図から, 様々な形状の相関関係を記述することができることを確認できる.

#### 4. ネステッドモデルの一般化

式(34)の多変量一般化極値分布の累積分布関数を持つ場合の離散選択を考えよう. 式(28)によって, 離散選択モデルの選択確率を得ることができる. したがって, 式(34)の多変量一般化極値分布の累積分布関数の偏微分を行う. なお, 式を短く書くために, これ以降は,  $q$ 指数関数の表記を

$$\exp_q(x) = e_q^x \quad (47)$$

と短縮表記することとする.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\mathbf{x}}}{\partial x_{ij}} &= -F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left( \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \\ &= -\frac{1}{\rho_i} F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \left( \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i} \\ &= -\frac{1}{\rho_i} F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \left( \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i} \\ &= - \left( e_{2-q}^{v_{ij}} \right)^{\rho_i} F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \left( \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} \left\{ e_q^{-x_{ij}} \right\}^{\rho_i-1} \frac{d e_q^{-x_{ij}}}{d x_{ij}} \end{aligned} \quad (48)$$

なお,

$$\begin{aligned} \frac{de_q^{-x_{ij}}}{dx_{ij}} &= \frac{d}{dx_{ij}} [1 - (1-q)x_{ij}]^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \frac{1}{1-q} [1 - (1-q)x_{ij}]^{\frac{1}{1-q}-1} \frac{d}{dx_{ij}} [1 - (1-q)x_{ij}] \quad (49) \\ &= -[1 - (1-q)x_{ij}]^{\frac{q}{1-q}} = -(e_q^{-x_{ij}})^q \end{aligned}$$

であるため、これを式(48)に代入すると、

$$\frac{\partial F_{\mathbf{x}}}{\partial x_{ij}} = (e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x_{ij}} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} (e_q^{-x_{ij}})^{q+\rho_i-1} \quad (50)$$

が得られる。ここで、 $x_{11}=x_{12}=\dots=x$ を上のに代入したものを $\partial F_{\mathbf{x}}(x, x, \dots, x)/\partial x_{ij}$ と表記することにする。また、

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{x}}(x, x, \dots, x) &= \exp \left\{ -\sum_{i=1}^m \left[ \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -e_q^{-x} \sum_{i=1}^m \left[ \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right] \right\} \quad (51) \end{aligned}$$

であり、ここで、

$$S = \sum_{i=1}^m \left[ \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right] \quad (52)$$

とおくと、

$$F_{\mathbf{x}}(x, x, \dots, x) = \exp[-S e_q^{-x}] \quad (53)$$

と書ける。ネスト*i*の選択枝*j*の選択確率 $p_{ij}$ は

$$p_{ij} = \int_0^{\infty} \frac{\partial F_{\mathbf{x}}(x, x, \dots, x)}{\partial x_{ij}} dx \quad (54)$$

として与えることができるため、

$$\begin{aligned} p_{ij} &= (e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} \int_{\Omega} \exp[-S e_q^{-x}] \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} e_q^{-x} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} (e_q^{-x})^{q+\rho_i-1} dx \\ &= (e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} \int_{\Omega} (e_q^{-x})^q \exp[-S e_q^{-x}] dx \quad (55) \end{aligned}$$

である。そして、 $z = e_q^{-x}$ として、置換積分を行う。 $z = e_q^{-x} \geq 0$ であり、 $e_q^{-x}$ の関数形から、積分範囲は $\infty \rightarrow 0$ となる。よって、

$$\begin{aligned} p_{ij} &= (e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} \int_0^1 z^q e^{-S z} (-z^{-q}) dz \\ &= (e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} \int_0^{\infty} e^{-S z} dz \\ &= -\frac{1}{S} (e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1} [e^{-S z}]_0^{\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1}}{\sum_{i=1}^m \left[ \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right]} \quad (56) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} [e_q^v]^{\rho} &= [1 + (1-q)v]^{\frac{\rho}{1-q}} \\ &= \left[ 1 + \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{q-1}{\rho} \right) \right\} \rho v \right]^{\frac{1}{1-(1+\frac{q-1}{\rho})}} \\ &= \exp_{1+\frac{q-1}{\rho}}(\rho v) \quad (57) \end{aligned}$$

であるため、

$$[e_{2-q}^{v_{ij}}]^{\rho_i} = \exp_{\rho_i'}[\rho_i v_{ij}] = e_{\rho_i'}^{\rho_i v_{ij}} \quad (58)$$

となる。ただし、

$$\rho_i' = 1 + \frac{1-q}{\rho_i} \quad (59)$$

である。また、

$$\left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} = \left( \sum_{j=1}^{n_i} e_{\rho_i'}^{\rho_i v_{ij}} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} = \left( \exp_{\rho_i'} \left\{ \ln_{\rho_i'} \left[ \sum_{j=1}^{n_i} e_{\rho_i'}^{\rho_i v_{ij}} \right] \right\} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \quad (60)$$

である。ここで、さらに、

$$\Lambda_i = \ln_{\rho_i'} \left[ \sum_{j=1}^{n_i} e_{\rho_i'}^{\rho_i v_{ij}} \right] \quad (61)$$

とおく。これを用いると、

$$\left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} = (\exp_{\rho_i'}[\Lambda_i])^{\frac{1}{\rho_i}} = \exp_{\rho_i'} \left( \frac{1}{\rho_i} \Lambda_i \right) = e_{\rho_i'}^{\Lambda_i / \rho_i} \quad (62)$$

となり、したがって、

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \frac{(e_{2-q}^{v_{ij}})^{\rho_i} \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}-1}}{\sum_{i=1}^m \left[ \left( \sum_{j=1}^{n_i} \{ e_{2-q}^{v_{ij}} \}^{\rho_i} \right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right]} \\ &= \frac{\exp_{2-q} \left( \frac{1}{\rho_i} \Lambda_i \right) \exp_{\rho_i'}(\rho_i v_{ij})}{\sum_{i=1}^m \exp_{2-q} \left( \frac{1}{\rho_i} \Lambda_i \right) \sum_{j=1}^{n_i} \exp_{\rho_i'}(\rho_i v_{ij})} \quad (63) \end{aligned}$$

が得られる。

次に、ネスト*i*の選択枝*j*の効用 $v_{ij}$ がネスト*i*自体の効用 $w_i$ と選択枝*j*の効用 $u_j$ から構成される場合を考えよう。通常のネステッドロジットモデルでは $v_{ij} = w_i + u_j$ と線



形和で考えることが多いが、本研究では、一般化ネステッドロジットモデルであるため、より一般的な構成を考える。和を一般化した $q$ -和を以下のように定義しよう。

$$x \oplus_q y := x + y + (1 - q)xy \quad (64)$$

$q=1$  の時は

$$x \oplus_1 y = x + y \quad (65)$$

となり、 $q$ -和は通常の和も含んでいる。また、

$$\begin{aligned} \exp_q[x \oplus_q y] &= \exp_q[x + y + (1 - q)xy] \\ &= [1 + (1 - q)\{x + y + (1 - q)xy\}]^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \{[1 + (1 - q)x][1 + (1 - q)y]\}^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \exp_q[x] \exp_q[y] \end{aligned} \quad (66)$$

であり、通常の指数関数のように、 $q$ -指数関数内の変数の $q$ -和は $q$ -指数関数の積となる。

本研究では、 $q$ -和を用いて、ネスト $i$ の選択肢 $j$ の効用 $v_{ij}$ を

$$v_{ij} = w_i \oplus_{2-q} v_{ij} \quad (67)$$

とする。これを式(63)に代入すると、

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{\left(e_{2-q}^{w_i \oplus_{2-q} v_{ij}}\right)^{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{e_{2-q}^{w_i \oplus_{2-q} v_{ij}}\right\}^{\rho_i}\right)^{\frac{1}{\rho_i-1}}}{\sum_{i=1}^m \left[ \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{e_{2-q}^{w_i \oplus_{2-q} v_{ij}}\right\}^{\rho_i}\right)^{\frac{1}{\rho_i}} \right]} \\ &= \frac{\left(e_{2-q}^{w_i}\right)^{\rho_i} \left(e_{2-q}^{v_{ij}}\right)^{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{e_{2-q}^{v_{ij}}\right\}^{\rho_i}\right)^{\frac{1}{\rho_i-1}}}{\sum_{i=1}^m e_{2-q}^{w_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{e_{2-q}^{v_{ij}}\right\}^{\rho_i}\right)^{\frac{1}{\rho_i}}} \\ &= \frac{e_{2-q}^{w_i} \left(e_{2-q}^{v_{ij}}\right)^{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{e_{2-q}^{v_{ij}}\right\}^{\rho_i}\right)^{\frac{1}{\rho_i-1}}}{\sum_{i=1}^m e_{2-q}^{w_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{e_{2-q}^{v_{ij}}\right\}^{\rho_i}\right)^{\frac{1}{\rho_i}}} \\ &= \frac{e_{2-q}^{w_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{e_{2-q}^{v_{ij}}\right\}^{\rho_i}\right)^{\frac{1}{\rho_i}} \left(e_{2-q}^{v_{ij}}\right)^{\rho_i}}{\sum_{i=1}^m e_{2-q}^{w_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\{e_{2-q}^{v_{ij}}\right\}^{\rho_i}\right)^{\frac{1}{\rho_i}} \sum_{j=1}^{n_i} \left\{e_{2-q}^{v_{ij}}\right\}^{\rho_i}} \end{aligned} \quad (68)$$

ここで、式(61)の $v_{ij}$ を $u_j$ に置き換えたものとして、

$$\Lambda'_i = \ln \left[ \sum_{j=1}^{n_i} e^{\rho'_i v_{ij}} \right] \quad (69)$$

とおく。なお、 $\rho'_i$ は式(59)と同じである。また、式(62)と同様に、

$$\left[ \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ \exp_{2-q}(\rho_i v_{ij}) \right\}^{\rho_i} \right]^{\frac{1}{\rho_i}} = \exp_{2-q} \left[ \frac{1}{\rho_i} \Lambda'_i \right] \quad (70)$$

さらに、 $\left[ e_{2-q}^{v_{ij}} \right]^{\rho_i} = e^{\rho'_i v_{ij}}$ であり、これらを式(68)に代入すると、

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{\exp_{2-q}[w_i] \exp_{2-q} \left[ \frac{1}{\rho_i} \Lambda'_i \right] \left( \exp_{2-q}[v_{ij}] \right)^{\rho_i}}{\sum_{i=1}^m \exp_{2-q}[w_i] \exp_{2-q} \left[ \frac{1}{\rho_i} \Lambda'_i \right] \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ \exp_{2-q}[v_{ij}] \right\}^{\rho_i}} \\ &= \frac{\exp_{2-q} \left[ w_i \oplus_{2-q} \frac{1}{\rho_i} \Lambda'_i \right] \exp_{\rho'_i}[\rho_i v_{ij}]}{\sum_{i=1}^m \exp_{2-q} \left[ w_i \oplus_{2-q} \frac{1}{\rho_i} \Lambda'_i \right] \sum_{j=1}^{n_i} \exp_{\rho'_i}[\rho_i v_{ij}]} \end{aligned} \quad (71)$$

が得られる。これを $q$ -一般化ネステッドロジットモデル( $q$ -NLモデル)と呼ぶことにする。これは通常のネステッドロジットモデル式と似ており、違いは指数関数の代わりに $q$ -指数関数を用いられており、通常の和の代わりに $q$ -和になっている点である。上の式で $q=1$ の時は通常のネステッドロジットモデルとなる。このように $q$ -一般化ネステッドロジットモデルは通常のネステッドロジットモデルを含む一般的なネステッドロジットモデルである。

## 5. 一般化ネステッドモデルの適用例

$q$ -一般化ネステッドロジットモデルを広島市交通実態調査データに適用し、買物目的トリップの交通手段・目的地選択行動の分析を行う。広島市交通実態調査データは、2008年に実施された調査で、クリーニング作業を行った後の7,288のデータ(5,023の通勤トリップと2,265の買い物等自由トリップ)を用いる。選択肢集合は、徒歩・自転車、バイク、自動車(自分で運転)、自動車(同乗)、バス、鉄道の6つである。ネスト構造としては、2レベルで、バスと鉄道を同じネストに入れた。

効用関数は全ての選択肢で $v_{ij} = \alpha(TC_{ij} + \beta TT_{ij} + \beta_0)$ とした。ここで、 $\alpha, \beta, \beta_0$ はパラメータであり、 $TC_{ij}, TT_{ij}$ は料金(千円単位)と旅行時間(時間単位)である。 $\beta$ は時間価値となる。

表-1及び表-2は、6つのモデル(通常の多項ロジットモデル、通常のネステッドロジットモデル、Chikaraishi & Nakayama (2016)<sup>10</sup>の $q$ 積ロジットモデル、Chikaraishi & Nakayama (2016)の $q$ 積ネステッドロジットモデル、 $q$ -一般化ロジットモデル、 $q$ -一般化ネステッドモデル)を比較したものである。最終対数尤度の観点からは、本研究で提案している $q$ -一般化ネステッドロジットモデルが最も良い結果となった。また、推定結果で

表-1 通勤トリップの交通機関選択の推定結果

	logit		nested logit		$q$ -product (Chikaraishi and Nakayama, 2016)		$q$ -product nested (Chikaraishi and Nakayama, 2016)		$q$ -generalized logit (Nakayama and Chikaraishi, 2015)		The proposed $q$ -generalized nested logit	
	estimate	t-value	estimate	t-value	estimate	t-value	estimate	t-value	estimate	t-value	estimate	t-value
$\alpha$	-2.931	-24.79	-2.850	-23.06	-2.959	-27.50	-2.882	-25.57	-3.646	-12.84	-3.553	-12.27
$\beta$	1.120	19.32	1.105	19.00	1.174	17.55	1.162	17.26	1.185	17.30	1.171	17.07
$\beta_{\alpha}$ (non-motorized)	-0.050	-1.65	-0.014	-0.43	-0.066	-2.16	-0.033	-1.03	-0.069	-2.22	-0.037	-1.12
$\beta_{\alpha}$ (motorbike)	0.850	27.55	0.883	24.42	0.864	26.33	0.897	23.69	0.863	26.23	0.895	23.72
$\beta_{\alpha}$ (car (passenger))	1.036	19.26	1.078	17.71	1.090	17.72	1.135	16.56	1.098	17.68	1.140	16.57
$\beta_{\alpha}$ (car (driver))	0.146	9.32	0.164	9.34	0.162	9.87	0.178	10.01	0.163	9.91	0.178	10.02
$\beta_{\alpha}$ (bus)	-0.169	-9.84	-0.178	-11.13	-0.170	-9.81	-0.178	-11.06	-0.171	-9.79	-0.179	-10.99
$\beta_{\alpha}$ (rail)	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-
$1/\rho^a$	0	-	0.857	2.80	0	-	0.861	2.76	0	-	0.866	2.64
$q$	0	-	0	-	0.182	3.11	0.186	3.09	0	-	0	-
$q^b$	0	-	0	-	0	-	0	-	0.940	3.72	0.938	3.63
Initial log-likelihood	-9000.0		-9000.0		-9000.0		-9000.0		-9000.0		-9000.0	
Final log-likelihood	-6785.9		-6782.9		-6781.92		-6,778.9		-6779.3		-6776.5	
Sample size							5,023					

a) 帰無仮説  $1/\rho=1$ . b) 帰無仮説  $q=1$ .

表-2 買い物等自由トリップの交通機関選択の推定結果

	logit		nested logit		$q$ -product (Chikaraishi and Nakayama, 2016)		$q$ -product nested (Chikaraishi and Nakayama, 2016)		$q$ -generalized logit (Nakayama and Chikaraishi, 2015)		The proposed $q$ -generalized nested logit	
	estimate	t-value	estimate	t-value	estimate	t-value	estimate	t-value	estimate	t-value	estimate	t-value
$\alpha$	-2.582	-15.05	-2.551	-14.52	-2.354	-15.99	-2.352	-15.86	-3.373	-8.20	-3.392	-8.17
$\beta$	0.880	10.67	0.869	10.56	1.090	8.98	1.086	8.93	1.102	8.91	1.110	8.88
$\beta_{\alpha}$ (non-motorized)	0.086	1.91	0.114	2.05	0.005	0.10	0.010	0.16	0.004	0.08	-0.004	-0.06
$\beta_{\alpha}$ (motorbike)	1.114	14.17	1.141	12.72	1.248	11.96	1.252	11.19	1.249	11.89	1.244	11.11
$\beta_{\alpha}$ (car (passenger))	0.241	6.74	0.260	5.69	0.278	6.91	0.280	5.74	0.277	6.91	0.273	5.59
$\beta_{\alpha}$ (car (driver))	-0.153	-5.27	-0.139	-3.99	-0.106	-3.30	-0.104	-2.71	-0.109	-3.43	-0.112	-2.88
$\beta_{\alpha}$ (bus)	-0.179	-5.59	-0.180	-5.97	-0.199	-5.61	-0.199	-5.66	-0.200	-5.66	-0.201	-5.58
$\beta_{\alpha}$ (rail)	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-
$1/\rho^a$	0	-	0.915	0.78	0	-	0.987	0.12	0	-	1.021	0.17
$q$	0	-	0	-	0.243	3.04	0.242	3.01	0	-	0	-
$q^b$	0	-	0	-	0	-	0	-	0.879	3.43	0.878	3.49
Initial log-likelihood	-4058.3		-4058.3		-4058.3		-4058.3		-4058.3		-4058.3	
Final log-likelihood	-3249.7		-3249.4		-3245.6		-3245.6		-3245.1		-3245.1	
Sample size							2,265					

a) 帰無仮説  $1/\rho=1$ . b) 帰無仮説  $q=1$ .

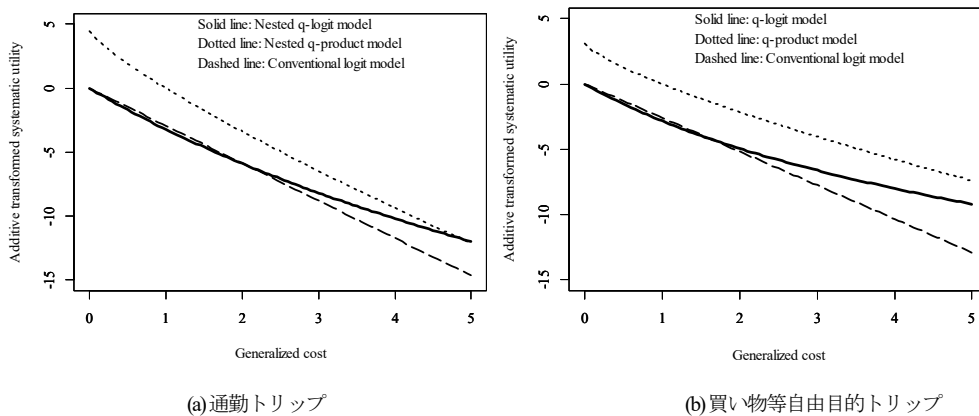


図-9 一般化費用とシステマティック効用との関係

は、買い物等の自由目的トリップではネスト構造を考慮 する必要がないことも分かる。パラメータのサイン (符

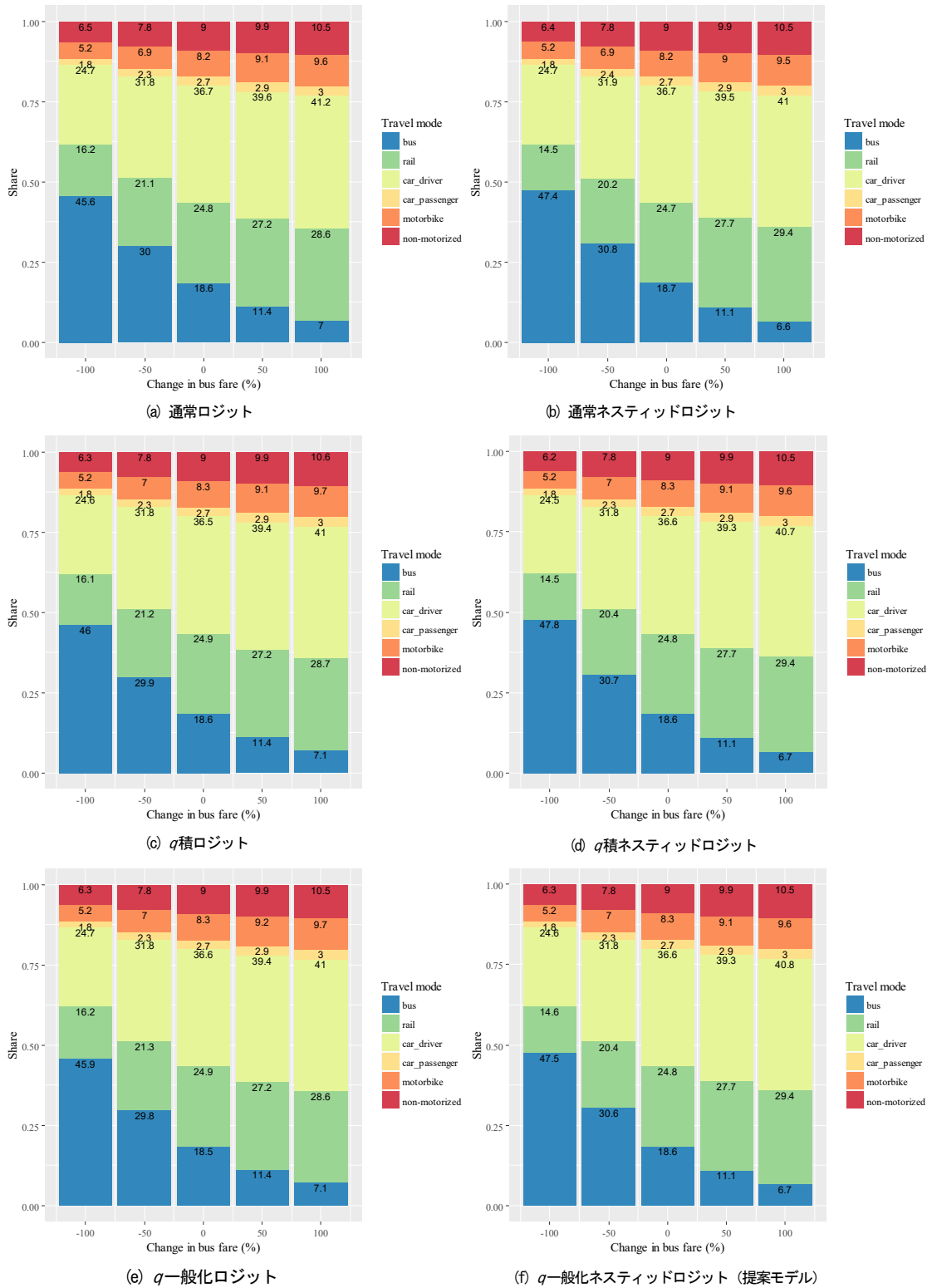


図-10 バス料金を変化させた場合の交通機関シェアの変化

号) や時間価値など特に問題はない。

q一般化ロジットモデルを多変量化したq一般化ネスティッドロジットモデルの効果を検討するために、全てのモデルを非線形確定効用関数を有するロジットモデルに変換し、その非線形性を比較する(変換前の効用は、ロジットモデル, q積ロジットモデル, q一般化ロジットモデル間で直接比較できない)。このように、誤差分布形

状の選択を、確定効用の非線形性の選択に置き換えた上で各モデルの挙動を確認することで、旅行時間や費用が選択確率に及ぼす影響を直感的に比較することができる。非線形確定効用関数は、q積ロジットモデル, q積ネスティッドロジットモデルの場合  $\alpha \ln_i(TC_i + \beta Tt_i + \beta_0)$ , q一般化ロジットモデル, q一般化ネスティッドモデルの場合  $\ln(\exp_{2-q}(\alpha(TC_i + \beta Tt_i + \beta_0)))$  である。

図-9に比較結果を示す。ロジットモデルの場合、定義より一般化費用と確定効用は線形関係を有する。一方、 $q$ 積モデルや $q$ 一般化モデルでは、一般化費用の増大に伴い、その限界不効用は小さくなることが確認できる。また、 $q$ 積モデルと $q$ 一般化モデルで確定項の形状は異なり、今回のケースでは、一般化費用に対する限界不効用の低減は、 $q$ 一般化モデルにおいて大きくなる傾向が確認された。

図-10 はバス料金を変化させた場合の交通機関のシェアの変化を示している。図より、顕著な違いはみられないものの、 $q$ 積モデル、 $q$ 一般化モデルでは、ロジットモデルに比べて、バス料金の増加（減少）に対して感度が低い（高い）ことが確認できる。この結果は、図-9と同様に、一般化費用が高くなるにつれてその効果が低減（限界不効用の通減）することを示唆する。なお、ネスト化の影響は通常のロジットモデル、 $q$ 積モデル、 $q$ 一般化モデルで大きな差は見られず、鉄道からバスへの手段転換が促されることを示唆する結果となった。

## 6. おわりに

ロジットモデルでは効用はガンベル分布に従う。ガンベル分布は極値分布の一つであり、ガンベル分布を含むより一般的な極値分布が一般化極値分布である。著者らは一般化極値分布に従う効用による離散選択モデルである $q$ 一般化ロジットモデルを開発した。本稿では、これを多変量化し、選択構造をネスト化した $q$ 一般化ネステッドロジットモデルを構築するとともに、そのランダム効用の相関構造を明らかにした。そして、それを広島市交通実態調査データに適用し、通勤トリップや買物等の自由目的トリップの交通手段選択行動の分析を行った。 $q$ 一般化ネステッドロジットモデルの適合度は多項ロ

ジットモデルや通常のネステッドロジットモデルよりも高く、 $q$ 一般化ネステッドロジットモデルの妥当性を確認することができた。

## 参考文献

- 1) 例えば、蓑谷千風彦：統計分布ハンドブック，朝倉書店，東京，2003.
- 2) Nakayama, S. and Chikaraishi, M.: Unified closed-form expression of logit and weibit and its extension to a transportation network equilibrium assignment, *Transportation Research, Part B*, Vol. 81, pp. 672-685, 2015.
- 3) Castillo, E., Menendez, J. M., Jimenez, P., & Rivas, A.: Closed form expressions for choice probabilities in the Weibull case, *Transportation Research, Part B*, Vol. 42, pp. 373-80, 2008.
- 4) McFadden, D.: Modelling the choice of residential location, Karlqvist, A. et al. eds., *Spatial Interaction Theory and Planning Models*, North-Holland, Amsterdam, 75-96, 1978.
- 5) Ben-Akiva, M. and Lerman, S. R.: *Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand*, 8<sup>th</sup> ed., MIT Press, Cambridge, Massachusetts, U.S.A., 2000.
- 6) Mattsson, L.-G., Weibull, J. W., & Lindberg, P. O.: Extreme values, invariance and choice probabilities, *Transportation Research, Part B*, Vol. 59, pp. 81-95, 2014.
- 7) Daganzo, C.F., Kusnic, M.: Two properties of the nested logit model, *Transportation Science*, Vol. 27, pp. 395-400, 1993.
- 8) Marzano, V., Papola, A., Simonelli, F., Vitillo, R.: A practically tractable of the covariances of the Cross-Nested model, *Transportation Research*, Vol. 57B, pp. 1-11, 2013.
- 9) Shi, D., Smith, R.L., Coles, S.G. (1992). Joint versus marginal estimation for bivariate extremes, *Technical Reports of NC State Department of Statistics*, No. 2074.
- 10) Chikaraishi, M., Nakayama, S.: Discrete choice models with  $q$ -product random utilities, *Transportation Research*, Vol. 93B, pp. 576-595, 2016.

(2018.7.31 受付)

## Q-GENERALIZED NESTED LOGIT MODEL AND ITS CORRELATED STRUCTURE

Shoichiro NAKAYAMA, Makoto CHIKARAISHI

In the field of transportation, the logit model has widely been used as a random utility discrete choice model. The error terms in the logit model follow the Gumbel-distribution, which is an extreme value distribution. The authors have developed the  $q$ -generalized logit model that includes the standard logit model. In this paper, the  $q$ -generalized logit model is “multivarized,” and the  $q$ -generalized nested logit model is developed. In the proposed model, the alternatives are nested, and their utilities follow the multivariate generalized extreme value distribution. Furthermore, the correlated structure of random utilities of  $q$ -generalized nested logit model is derived analytically.