

# ゲーム理論的アプローチによる動的利用者均衡 の確率的安定性の解析

佐津川 功季<sup>1</sup>・和田 健太郎<sup>2</sup>・井料 隆雅<sup>3</sup>

<sup>1</sup>学生会員 東京大学大学院 工学系研究科 博士後期課程 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: kouki@iis.u-tokyo.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 東京大学助教 生産技術研究所 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 神戸大学教授 大学院工学研究科市民工学専攻 (〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

E-mail: iryo@kobe-u.ac.jp

本稿では、*unidirectional network* を対象として、出発時刻を固定した動的利用者均衡配分問題における、均衡状態の安定性を解析する。具体的には、確率的なダイナミクスを適用したときの安定性概念である、確率的安定性について調べる。そのために本稿では、動的利用者均衡配分問題の時間分解特性を活用した均衡状態の解析を行う。まず第一に、動的利用者均衡配分問題を車両を離散化した戦略型ゲーム (DUE ゲーム) として定式化する。そして *unidirectional network* 上の DUE ゲームでは、適切な順序どおりに各車両を最短経路に配分することにより、均衡解が導出することができることを示す、i.e., 均衡状態を達成するための適切な順序付けができる。次に、順序付けが可能であるという特性に基づき、*unidirectional network* 上の DUE ゲームが“*weakly acyclic game*”という、静的均衡配分の分野で知られるポテンシャルゲームのより一般的なゲームのクラスであることを示す。そして、ゲーム理論の分野において蓄積されてきた知見に基づき、動的利用者均衡の収束性、及び安定性を証明する。最後に、数値実験を通して、理論解析から得られた結論の妥当性について確認する。

**Key Words:** *dynamic user equilibrium; Nash equilibrium; unidirectional network; weakly acyclic games; convergence; stochastic stability*

## 1. はじめに

動的利用者均衡配分問題は、渋滞現象の記述に伴う解析上の困難から、その数理特性を明確に把握するには至っていない (e.g., 均衡解の存在性, 一意性, 安定性)<sup>1</sup>。特に均衡解の安定性は、均衡状態が複数存在するとき、どの均衡状態が実際に起こりうる意味のある状態かどうかを知るために重要となる性質である。ある均衡解が不安定であれば、何らかの理由により摂動を受け交通状態が均衡状態から外れたとき、利用者はその均衡状態から離れる方向へと行動を変化させるようになる。そうした不安定な均衡は極稀にしか起こりえない状態であり、結果として、実際に起こりうる交通状態を反映するとは言えなくなる<sup>3</sup>。

均衡状態の安定性解析では、利用者の日々の行動変容を記述する動学モデル (i.e., *day-to-day dynamics*) を設定する。動学モデルとして確定的 (i.e., 利用者の経路選択行動が確率的ではなく決まる) なダイナミクス<sup>2</sup>を考えると、通常は均衡解の大域的漸近安定性を示すために、考えているダイナミクスに対するリアプノフ関数の存在を証明することになる。例えば静的利用者

均衡配分問題では、経路旅行時間関数が単調であるとき、Smith<sup>4)</sup> は Smith dynamics を用いてリアプノフ関数の存在を示し、均衡状態の大域的漸近安定性を証明している。また、出発時刻を固定した動的利用者均衡配分問題においては、一経路に一個しかボトルネックが含まれないネットワークでは、経路旅行時間が単調であることが Smith and Ghali<sup>6)</sup> により示されている。そして Mounce<sup>7)</sup> は、このネットワークでは Smith dynamics に対するリアプノフ関数が存在することを示し、動的利用者均衡状態の大域的漸近安定性を示した。

リアプノフ関数の存在証明にあたっては経路旅行時間関数の単調性が大きな役割を果たす。しかしながら、動的利用者均衡配分ではこの性質は必ずしも普遍的には成立しない。実際、一経路に二つ以上のボトルネックが含まれるとき、単純なトポロジーを持つネットワークであっても経路旅行時間の単調性が保証されないことがいくつかの研究により示されている (桑原<sup>8)</sup>, Mounce and Smith<sup>9)</sup>)。こうした事実からは、より一般的な構造を持つネットワーク上での動的配分問題において、大域的漸近安定といった強い概念の安定性を持つ均衡解の存在を証明することは難しいことが示唆される。そのため、より一般的なネットワークでの均衡解の安定

<sup>1</sup> 詳細は近年のレビューを参照 1),2)

<sup>2</sup> 例えば, Smith dynamics<sup>4)</sup>, projection dynamics<sup>5)</sup> など

性を解析するためには、大域的漸近安定より弱い、しかしながらより広い概念の安定性を調べるための、確率的なダイナミクス<sup>3</sup>を用いたアプローチが有用であると考えられる。しかしながら、このアプローチに基づき動的利用者均衡状態の安定性を解析した研究は、著者らの知る限り存在しない。

本稿では、Iryo and Smith<sup>14)</sup>により提案された unidirectional network を対象として、出発時刻が固定された動的利用者均衡配分問題における、均衡状態の安定性を解析する。具体的には、確率的なダイナミクスを適用したときの安定性概念である、確率的安定性<sup>10)</sup>について調べる。そのために本稿では、動的利用者均衡配分問題の時間分解特性を活用した均衡状態の解析を行う。まず第一に、動的利用者均衡配分問題を車両を離散化した戦略型ゲーム（これを DUE ゲームと呼ぶ）として定式化する。そして unidirectional network 上の DUE ゲームでは、適切な順序どおりに各車両を最短経路に配分することにより、均衡解が導出することができることを示す、i.e., 均衡状態を達成するための適切な順序付けができる。次に、順序付けが可能であるという特性に基づき、unidirectional network 上の DUE ゲームが“weakly acyclic game<sup>15)</sup>”という、静的均衡配分の分野で知られるポテンシャルゲーム<sup>16)</sup>のより一般的なゲームのクラスであることを示す。そして、ゲーム理論の分野において蓄積されてきた知見に基づき、動的利用者均衡の収束性、及び安定性を証明する。

本稿の構成は次の通りである。続く 2. では、以降の解析の準備として、DUE ゲームの定式化、及び時間分解特性について説明する。3. では、unidirectional network 上での DUE ゲームでの時間分解特性を示す。4. では、まず unidirectional network 上での DUE ゲームが weakly acyclic game であることを示す。そして、均衡状態の収束性、及び確率的安定性について示す。5. では、数値実験により本稿で考察した均衡解の安定性に関する結論の妥当性を確認する。最後に 6. では、本稿のまとめと今後の課題を述べる。

## 2. DUE ゲームの定式化と時間分解法

### (1) DUE ゲームの定義

DUE ゲームは戦略型ゲームとして定式化された動的利用者均衡配分問題である。このゲームは、「ネットワーク」、「プレイヤー（車両）集合」、「各プレイヤーの戦略集合（経路選択肢集合）」、及び「戦略の利得（経路旅行時間）」の要素から構成されている。以下では、これらの要素について説明する。

<sup>3</sup> 例えば、Foster and Young<sup>10)</sup>, Cantarella and Cascetta<sup>11)</sup>, Balijepalli and Watling<sup>12)</sup>, Cantarella and Watling<sup>13)</sup> など。

### a) ネットワーク

本稿で取り扱うネットワークは、ノードと有向リンクから構成される。ノードの集合を  $\mathcal{N}$ 、有向リンクの集合を  $\mathcal{L}$  とする。起点、終点ノードの集合をそれぞれ、 $\mathcal{N}_o, \mathcal{N}_d$  と表す。あるノード  $a$  からノード  $b$  への、全ての acyclic な経路集合を  $\mathcal{R}(a, b)$  と表す。また、ある経路  $r$  に含まれるノード、リンクの集合をそれぞれ  $\mathcal{N}(r), \mathcal{L}(r)$  と表す。

### b) 車両

車両は離散化されており、一台一台を分割不可能な交通流の構成要素として取り扱う。全車両の集合を  $\mathcal{P}$ 、総台数を  $|\mathcal{P}|$  と表す。車両  $i \in \mathcal{P}$  の起終点ノード  $o_i, d_i$ 、及び出発時刻  $s_i$  は外生的に与えられる。ただし、同一起点から同一時刻に出発する車両は存在しないものとする、i.e.,  $o_i = o_j$  ならば  $s_i \neq s_j$  とする。

### c) 経路選択肢集合

ある車両  $i$  は全ての acyclic な経路  $r_i$  を選択でき、その経路選択肢集合を  $\mathcal{R}_i$  で表す。経路選択肢集合には、車両  $i$  をまだ配分していない（i.e., 起点を出発していない）ことを示す選択肢  $\phi_i$  も含まれる。全車両が選択した経路を並べたベクトルは  $\mathbf{r}$  で、車両  $i$  以外の経路選択を並べたベクトルは  $\mathbf{r}_{-i}$  で記述する。この経路ベクトルは  $\mathbf{r} = (r_i; \mathbf{r}_{-i})$  のように、 $r_i$  と  $\mathbf{r}_{-i}$  を束ねた記述も行う。また、 $\mathcal{R}_i$  の全車両に対する直積集合を  $\mathcal{R} = \prod_{i \in \mathcal{P}} \mathcal{R}_i$  と定義する。

### d) 経路旅行時間

各車両の利得は、経路の一般化交通費用の符号を逆にしたものとし、一般化交通費用は終点到着時刻と等しいものとする。車両  $i$  以外の経路選択が  $\mathbf{r}_{-i}$  であるときの、経路  $r_i \in \mathcal{R}$  を利用することによる車両  $i$  の終点到着時刻を  $g_i(r_i; \mathbf{r}_{-i})$  と表す。なお、車両  $i$  の経路選択が  $\phi_i$  である（i.e., 起点を出発していない）とき、終点到着時刻は無限大であるとする、i.e.,  $g_i(\phi_i; \mathbf{r}_{-i}) = \infty$ 。また、車両  $i$  が経路  $r_i$  を利用するときの、ノード  $n \in \mathcal{N}$  への到着時刻を  $u_n(o_i, s_i, r_i; \mathbf{r}_{-i})$  と表す。

各車両の終点到着時刻、及びノード到着時刻は、各車両の経路選択ベクトル  $\mathbf{r}$  を与件として、動的な交通流モデルを適用することにより計算される。DUE ゲームにおいては、道路における渋滞現象を表現するための適切な要件（e.g., First-In-First-Out (FIFO) 原則）を満たす交通流モデルであれば、任意のモデルを使用できる。なお、このモデルは待ち行列の延伸を考慮したモデルも含む。

### e) Nash 均衡

上記の設定の下、動的利用者均衡は DUE ゲームの（純粋戦略）Nash 均衡として定義される。Nash 均衡状態では、全ての利用者は自身の選択している経路を単独で変更するインセンティブを持たない。すなわち、相手が

選んでいる経路選択に対して自身の終点到着時刻 (i.e., 経路旅行時間) を最小化する最適反応を取っている状態である。このとき、均衡状態  $\mathbf{r}^*$  は次を満たす経路選択状態として表される：

$$g_i(r_i^*; \mathbf{r}_{-i}^*) \leq g_i(r_i; \mathbf{r}_{-i}^*), \quad \forall r_i \in \mathcal{R}_i, \forall i \in \mathcal{P}. \quad (1)$$

また、単に最適反応となっているだけでなく、他の経路選択よりも厳密に経路旅行時間が小さい (i.e., 式 (1) の不等号がイコールなしで成立する) とき、 $\mathbf{r}^*$  は狭義ナッシュ均衡状態であるという。

## (2) DUE ゲームの時間分解特性

本稿では、動的利用者均衡配分問題の時間分解特性を用いることにより、利用者均衡状態の数理的特性を調べる。時間分解法とは、「ある時刻でのリンク旅行時間はより早い時刻にリンクに流入した車両にのみ依存する」という動的な交通流モデルの「因果律」を活用し、ある基準となるノードでの時刻別に配分問題を分解して解く手法である<sup>17),18)</sup>。例えば単一起点ネットワークでは、均衡状態においてある時刻に起点を出発する車両が経験する旅行時間は、その時刻以降に起点を出発する車両の影響を受けないことが保証される；そのため、配分問題を起点出発時刻別に分解し、出発時刻に関して前向きに逐次計算することにより均衡解を求めることができる。時間分解特性は、これまで単一起点・終点構造を持つネットワークにおける均衡解の特性解析<sup>19),20),21)</sup> や、効率的な解法<sup>22),23)</sup> を得るために用いられてきた。

交通流の離散モデルにおける時間分解法は、井料<sup>24)</sup>により「順序配分アルゴリズム」という均衡解の解法として提案されている。このアルゴリズムでは、まず「最早未配分車両」という、ネットワークに配分されていない車両 (未配分車両と呼ぶ) のうち、当該車両の最短経路に含まれるリンクへの流入時刻が、他のどの未配分車両の流入時刻より遅くない車両を求める。そして、最早未配分車両を順次最短経路に配分することにより、均衡解を導いている。すなわち、このアルゴリズムでは、動的利用者均衡配分問題を、最早未配分車両という特殊な車両の配分ごとに分割している。

連続モデルにおける配分問題の時間分解可能性は、離散モデルにおける最早未配分車両の存在と対応している。そして、時間分解された問題を解く (i.e., ある出発時刻にネットワークに流入したフローを各経路にどのように配分するか) ことは、最早未配分車両をその最短経路に配分することに対応することになる。つまり、連続モデルにおいて出発時刻別に定式化されたモデルを数理的に解析することで解の特性解析ができるように、離散モデルでは最早未配分車両、及びその最短経路の数理的解析から、均衡解の性質を説明することが

できる。以降では、unidirectional network における最早未配分車両の存在を証明し、この特性を解析することで均衡解の安定性を調べる。

## (3) 順序配分アルゴリズムと ordered Nash equilibrium

離散モデルにおける時間分解法である順序配分アルゴリズムについて概説する。順序配分アルゴリズムでは、一部の車両のみが配分されている状況を考える。このとき、配分した車両を「既配分車両」、まだ配分されていない車両を「未配分車両」と呼び、後者の集合を  $\bar{P}(\mathbf{r})$  で表す。未配分車両  $i$  は、 $\phi_i \in \mathcal{R}_i$  を選択している車両として表す。また、未配分車両をネットワークに配分することを「追加配分」と呼ぶ。

順序配分アルゴリズムでは、配分すべき車両の適切な順序付けを行うのに、「最早未配分車両」という概念を活用する。最早未配分車両とは「最短経路上のどのリンクへも他の未配分車両よりも早く流入できる」未配分車両である。この定義を数式で記述するために、まず「最早ノード到着時刻」、及びある未配分車両が配分されるとき「最短経路」を次のように定義する：

**定義 1.** (最早ノード到着時刻) ある経路ベクトル  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$  を考える。ある未配分車両  $i \in \bar{P}(\mathbf{r})$  の経路選択肢集合  $\mathcal{R}_i$  に含まれるいずれかの経路一本以上に含まれるノードの集合を  $\mathcal{N}_i$  と表す。このとき、車両  $i$  がノード  $n \in \mathcal{N}_i$  に最も早く流入できる時刻：

$$u_n^*(o_i, s_i; \mathbf{r}) = \min_{r_i \in \mathcal{R}_i} .u_n(o_i, s_i, r_i; \mathbf{r}_{-i}), \quad (2)$$

を「最早ノード到着時刻」と呼ぶ。

**定義 2.** (未配分車両の最短経路) ある経路ベクトル  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$  を考える。このとき、未配分車両  $i \in \bar{P}(\mathbf{r})$  の最短経路を、以下を満たす経路と定義する：

$$r_i^* \in \arg \max_{r_i \in \mathcal{R}_i} .g_i(r_i; \mathbf{r}_{-i}), \quad (3)$$

$$\text{s.t. } u_n(o_i, s_i, r_i; \mathbf{r}_{-i}) = u_n^*(o_i, s_i; \mathbf{r}), \quad \forall n \in \mathcal{N}(r_i^*). \quad (4)$$

これは、ある車両が最短経路を走行しているとき、経路に含まれる全てのノードへ最短旅行時間で到着することを意味している、i.e., 最短経路上で Dynamic Programming (DP) 原理が成立している。時刻  $s$  に終点  $d$  に向けて起点  $o$  を出発する車両の最短経路集合を  $\mathcal{R}^*(o, s, d; \mathbf{r})$  と表す。

これらの定義を用いて「最早未配分車両」は下記のように定義される：

**定義 3.** (最早未配分車両) ある経路ベクトル  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$  を考える。ある未配分車両  $i \in \bar{P}(\mathbf{r})$  の最短経路のうち、次の条件を満たす最短経路  $\bar{r}_i^*$  が存在するならば、車両  $i$  は

最早未配分車両であると定義する：

$$u_n(o_i, s_i, \bar{r}_i^*; \mathbf{r}_{-i}) \leq u_n^*(o_j, s_j; \mathbf{r}), \quad (5)$$

$$\forall n \in \mathcal{N}(\bar{r}_j^*, \forall j \in \bar{P}(\mathbf{r})) \setminus \{i\}.$$

なお、 $|\bar{P}| = 1$  ならば、その未配分車両は最早未配分車両であるとする。

最早未配分車両は、式 (5) を満たす最短経路をとったときに、その経路上の全ノードにおいて他のどの未配分車両よりも遅く到着することはない。この性質と動的な交通流モデルの FIFO 原則、及び因果律を組み合わせると、最早未配分車両を順次最短経路に配分することにより、後から追加配分される車両は既配分車両を追い越すことはなく、かつ既配分車両の旅行時間に影響を与えることもないことがわかる。すなわち、どの車両も事後的な最短経路を選択している状況が達成される (i.e., Nash 均衡状態 (1) が実現する)。この考え方にに基づき、順序配分アルゴリズムは以下のように構築される：

#### 順序配分アルゴリズム

0. 初期設定： $n = 0$  とし、経路ベクトル  $\mathbf{r}^n$  を  $r_i^n = \phi_i$  ( $\forall i \in \mathcal{P}$ )、未配分車両の集合を  $\bar{P}(\mathbf{r}^0) = \mathcal{P}$  とする。
1. 配分車両の決定：定義 3 により最早未配分車両と判定された車両のうち、任意の一台を  $i$  とする。
2. 経路ベクトルおよび未配分車両集合の更新：  
 $\mathbf{r}^{n+1} := (\bar{p}_i(\mathbf{r}^n), \mathbf{r}_{-i}^n)$ ,  $\bar{P}(\mathbf{r}^{n+1}) := \bar{P}(\mathbf{r}^n) - \{i\}$  とする。
3. 収束判定： $\bar{P}(\mathbf{r}^{n+1}) = \emptyset$  ならば、 $\mathbf{r}^{n+1}$  を均衡解としてアルゴリズムを終了する。そうでなければ  $n := n+1$  としてステップ 1 に戻る。

順序配分アルゴリズムにより導出された均衡解は、後から追加配分された車両が既配分車両を追い越せない解であり、車両に次のような順序付けができる解である；より遅く順序付けられた車両は、より早く順序付けられた車両を追い越すことができない。本稿では、この順序配分アルゴリズムにより導出される均衡解を“ordered Nash equilibrium”と呼ぶ。Ordered Nash equilibrium は最早未配分車両の存在が保証されれば、有限の繰り返しにより必ず導出される。しかし、順序配分アルゴリズムそのものの中では最早未配分車両の存在性は保証されていない。そのため、アルゴリズムの適用にあたっては、適用先のネットワークにおける最早未配分車両の存在を示す必要がある。

### 3. Unidirectional network 上での DUE ゲームの時間分解特性

#### (1) Unidirectional network の定義

Unidirectional network とは、ネットワーク上の各ノードに対し「ノード・ポテンシャル」という関数を定義す

ることができるネットワークである。ノード・ポテンシャル関数はある起点からの出発時刻（この起点を基準点、出発時刻を基準時刻と呼ぶ）の関数であり、ある車両が最短経路を通ったときの、その車両の起終点に関わらないノード到着時刻を表す。言い換えれば、ある基準点を基準時刻に出発する車両を考えたとき、次を満たすような出発時刻を各起点について定義することができるネットワークが unidirectional network である：(1) この車両の最短経路上のノードに同時刻に到着することができ、かつ (2) 各起点をこれらの時刻に出発する車両同士が、最短経路上の共有するノードにおいて同時刻に到着する。このときの起点出発時刻、及び最短経路上のノード到着時刻がノード・ポテンシャルである。

ノード・ポテンシャル、及び unidirectional network のフォーマルな定義について、Iryo and Smith<sup>14)</sup> に基づき説明する。まず、これらの定義に先立ち次の“possible dynamical link travel time profiles”を定義する。これは、あるリンクにおいて、動的な交通流モデルとして自然な条件 (i.e., FIFO 原則、及び因果律) が満たされているときに取りうる時々刻々のリンク旅行時間関数の集合を表したものである：

定義 4. あるリンク  $l$  の possible dynamical link travel time profiles は、次のリンク流入時刻  $t$  のリップシッツ連続関数である、リンク旅行時間関数の集合として表される：

$$\mathbf{c}_l^P = \left\{ c_l(t) \mid c_l(t) \in \left\{ c_l^{FT} \leq c_l(t) \text{ and } -1 \leq \frac{c_l(t') - c_l(t)}{t' - t} \right\} \right\}. \quad (6)$$

ただし、 $c_l(t)$  は時刻  $t$  にリンク  $l$  に流入した車両が経験する旅行時間である。また、 $c_l^{FT}$  はリンク  $l$  の自由旅行時間である。

上記の関係式を満たすリンク旅行時間がネットワーク上の各リンクに与えられたとき、この旅行時間により定義される時刻  $s$  に起点  $o$  を出発する車両のノード  $n$  への最早到着時刻を、 $u_n^*(o, s; \mathbf{c}^P)$  と表す。また、ネットワーク上の各リンク旅行時間関数パターン  $\mathbf{c}^P$  が取りうる組み合わせの集合を  $\mathbf{C}^P$  により表す。あるネットワークが与えられたとき、そのネットワーク上で各リンクが取りうる時々刻々のリンク旅行時間プロファイルは、いかなる需要パターンであっても集合  $\mathbf{C}^P$  に含まれる。そのため、この集合に含まれる任意のリンク旅行時間プロファイルに対してある性質が成立するとき、その性質は需要パターンの与え方に関わらないネットワーク特有の性質として解釈することができる。

なお、本稿で考える離散交通流のモデルでは、リンク旅行時間プロファイルは通常（リンク流入時刻の）連続関数としては与えられない。これは図 1 に示すように、

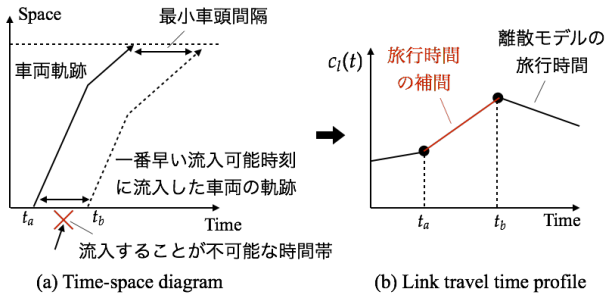


図-1 離散モデルにおける車両軌跡図と、対応するリンク旅行時間プロファイル

ある車両軌跡がリンク上に与えられたとき、追従挙動の関係上流入することが不可能な時間帯が存在するためである：この時間においては入れないためリンク旅行時間を定義できない。しかし、こうした非連続な関数は適当な補間を行うことにより連続関数化することができる。そして、この補間された時間帯においては流入車両がそもそも存在しないため、補間された連続的なリンク旅行時間関数は、補間前と整合的な経路旅行時間パターンや最短経路集合を与える。結果として、離散モデルにおける旅行時間関数は、連続の旅行時間関数を用いて与えることができる。そのため、上記のリンク旅行時間プロファイルを用いて定義される性質は、離散モデルにおいても成立するものとして取り扱うことができる。

このリンク旅行時間プロファイルを用いることにより、unidirectional network, 及びノード・ポテンシャルのフォーマルな定義は次により与えられる：

**定義 5.** (Unidirectional network) 与件とされるネットワークにおいて、ある起点を基準点と選び、それを  $o_{REF} \in \mathcal{N}_o$  と表す。このとき、ネットワーク上の各リンクに対し、リンク旅行時間関数パターン  $\mathbf{c}^P \in \mathbf{C}^P$  を与える。基準点から、任意の時刻  $t \in \mathbb{R}$  で出発する車両が存在しているものとする。このネットワークが unidirectional network であるとき、いかなる  $\mathbf{c}^P$  に対しても、ネットワーク上の各起点  $o \in \mathcal{N}_o$  に対し、次を満たすような出発時刻  $p_o(t; \mathbf{r})$  を与えることができる：ネットワーク上の各ノード  $n \in \mathcal{N}_o$  のポテンシャル  $p_n(t; \mathbf{r})$  を、この出発時刻を用いて次のように定義する：

$$p_n(t; \mathbf{r}) = \min_{o \in \mathcal{N}_o} u_n^*(o, p_o(t; \mathbf{r}); \mathbf{r}), \quad (7)$$

$$\forall n \in \mathcal{N}(r), \forall r \in \mathcal{R}(o, d), \forall o \in \mathcal{N}_o, \forall d \in \mathcal{N}_d.$$

このとき、任意の起点  $o \in \mathcal{N}_o$  から任意の終点  $d \in \mathcal{N}_d$  に対し、ポテンシャル通りに経路上のノードに到着することができる最短経路  $r_{od}^* \in \mathcal{R}(o, p_o(t; \mathbf{c}^P), d; \mathbf{c}^P)$  が少

なくとも一つ存在する：

$$p_n(t; \mathbf{c}^P) = u_n^*(o, p_o(t; \mathbf{c}^P); \mathbf{c}^P), \quad (8)$$

$$\forall n \in \mathcal{N}(r^*), \exists r^* \in \mathcal{R}^*(o, p_o(t; \mathbf{c}^P), d; \mathbf{c}^P),$$

where  $p_{o_{REF}}(t; \mathbf{c}^P) = t$

すなわち、ネットワーク上の各起終点間について、ポテンシャル時刻通りに各ノードに到着できる最短経路が存在するネットワークが unidirectional network である。これは、Unidirectional network では、ある二台以上の車両が最短経路上で二つ以上のノードを共有しているとき、これらのノードを同時に通過するように出発時刻を取れることを意味している。そして、この出発時刻、及びノード到着時刻は車両の起終点に関わらない。

なお、上で定義されるノード・ポテンシャルは複数存在しうる、i.e., ある基準時刻に対応する他の起点からの出発時刻の組み合わせは複数存在しうる。これは、待ち行列が存在しているリンク上では、あるリンク流出時刻 (i.e., リンク下流ノード到着時刻) に対しリンク流入時刻 (i.e., リンク上流ノード到着時刻) は一意に定まらないためである (詳細な議論は佐津川・和田<sup>25)</sup> 参照)。このために、ある基準時刻に基準点を出発する車両の最短経路上のノードに同時刻に到着する他の起点からの出発時刻は、複数の組み合わせが取られうる。そのため、以下ではこれらを区別するために、ある組み合わせを整数値  $m \in \mathbb{Z}$  で表し、その組み合わせに対応するノード・ポテンシャルを  $p_n^m(o, s; \mathbf{r})$  のように上付き添字を用いて表す。

## (2) 最早未配分車両の存在証明

最早未配分車両の存在証明に先立ち、ノード・ポテンシャルに関する次の補題を証明する：

**補題 1.** Unidirectional network において、利用者の経路選択ベクトル  $\mathbf{r}$  が与えられているものとする。ある起点を基準点として定め、ある二つの基準時刻  $t, t'$ 、及びそれに対応する任意の起点ノード  $o \in \mathcal{N}_o$  のポテンシャルをそれぞれ  $p_o^m(t; \mathbf{r}), p_o^{m'}(t'; \mathbf{r})$  と表す。なお、基準時刻、及びノード・ポテンシャルの組み合わせは同一であっても良い、i.e.,  $t = t', m = m'$ 。このとき、ノード・ポテンシャルの大小関係について、次が成立する：

$$p_o^m(t; \mathbf{r}) < p_o^{m'}(t'; \mathbf{r}) \Rightarrow p_n^m(t; \mathbf{r}) \leq p_n^{m'}(t'; \mathbf{r}), \quad \forall n \in \mathcal{N}. \quad (9)$$

証明。なお、以下では経路選択ベクトル  $\mathbf{r}$  は省略する。

まず、ある任意の終点  $d \in \mathcal{N}_d$  と、その終点への経路が存在する起点  $o$  (i.e.,  $\mathcal{R}(o, d) \neq \emptyset$ ) を考える。このとき、組み合わせ  $m$  における終点  $d$  のノード・ポテンシャル  $p_d^m(t)$  は、起点  $o$  のノード・ポテンシャル  $p_o^m(t)$ 、及び最短経路  $r_{od}^* \in \mathcal{R}(o, p_o^m(t), d)$  を用いて、次の関係式に

より表される：

$$p_d^m(t) = p_o^m(t) + RT(p_o^m(t); r_{od}^*), \quad (10)$$

ここで、 $RT(p_o^m(t); r_{od}^*)$  は (経路選択ベクトル  $\mathbf{r}$  が与えられているときの)、時刻  $p_o^m(t)$  に経路  $r_{od}^*$  に流入した車両の経路旅行時間である。

次に、この経路の旅行時間を用いて組み合わせ  $m'$  における終点  $d$  のノード・ポテンシャル  $p_d^{m'}(t')$  を表すことを考える。起点  $o$  のノード・ポテンシャル  $p_o^{m'}(t')$  が与えられているとき、この時刻に出発する車両の最短経路が与えられているならば、式 (10) と同様の等式関係が成立することは自明。そして、経路  $r_{od}^*$  を利用したときの旅行時間はこの最短経路の旅行時間以上である。よって、次の関係性が成立する：

$$p_d^{m'}(t') \leq p_o^{m'}(t') + RT(p_o^{m'}(t'); r_{od}^*(t)). \quad (11)$$

$r_{od}^*$  が時刻  $p_o^{m'}(t')$  に出発する車両の最短経路でもあるとき、等式が成立。

ここで、式 (11) から (10) を差し引くことにより、次の関係性が成立することが分かる：

$$p_d^{m'}(t') - p_d^m(t) \leq \alpha \{p_o^{m'}(t') - p_o^m(t)\}, \quad (12)$$

where  $\alpha \equiv 1 + \frac{RT(p_o^{m'}(t'); r_{od}^*) - RT(p_o^m(t); r_{od}^*)}{p_o^{m'}(t') - p_o^m(t)}$ ,

ここで  $\alpha$  中の分数式 (第二項) は、流入時刻  $p_o^m(t) \rightarrow p_o^{m'}(t')$  への変化に対する、経路  $r_{od}^*$  の旅行時間の伸び率を表す。FIFO 原則、及び因果律が満たされているとき、経路旅行時間の伸び率は必ず  $-1$  以上となる。よって  $\alpha \geq 0$  であるため、次の関係性が成立する：

$$p_d^{m'}(t') - p_d^m(t) \leq \begin{cases} \alpha \{p_o^{m'}(t') - p_o^m(t)\} & 0 < \alpha \\ 0 & 0 = \alpha \end{cases} \quad (13)$$

for all  $o$  such that  $\mathcal{R}(o, d) \neq \emptyset$ .

この関係式から、次の関係性を導くことができる：(1)  $\alpha > 0$  の場合、終点での到着時刻の大小関係が起点でも保存される、i.e.,  $p_d^m(t) \leq p_d^{m'}(t') \Rightarrow p_o^m(t) \leq p_o^{m'}(t')$ 。(2)  $\alpha = 0$  の場合、これは経路  $r_{od}^*$  の旅行時間の伸び率が  $-1$  であり、時刻  $p_o^m(t), p_o^{m'}(t')$  のどちらの時刻に入った車両であっても、同時刻に到着することを意味している。このときこれらの時刻の大小関係は任意に決めることができ<sup>4</sup>、一般性を失うこと無く  $p_d^m(t) \leq p_d^{m'}(t') \Rightarrow p_o^m(t) \leq p_o^{m'}(t')$  の関係性を定義することができる。

以上は、終点におけるポテンシャルの大小関係から、起点のポテンシャルの大小関係を “backward” に (i.e., 交通流の流れと逆方向に) 決めることができることを意味する。さらに、起点でのポテンシャルの大小関係が与えられた場合、FIFO 条件、及び因果律から、終点で

<sup>4</sup> どちらが大きいケースであっても、そのような組み合わせによるポテンシャルを定義することができる。

のポテンシャルの大小関係を次のように “forward” に決めることができる：

$$p_o^m(t) \leq p_o^{m'}(t') \Rightarrow p_d^m(t) \leq p_d^{m'}(t'), \quad (14)$$

for all  $d$  such that  $\mathcal{R}(o, d) \neq \emptyset$ .

そのため、一度ある起点  $o$  でのポテンシャルの大小関係が与えられると、こうした起点・終点間の backward・forward の関係性を利用することにより、全ての起点において次の関係式が成立することが分かる：

$$p_o^m(t) < p_o^{m'}(t') \Rightarrow p_o^m(t) \leq p_o^{m'}(t'), \quad o' \in \mathcal{N}_o. \quad (15)$$

そして、ノード・ポテンシャルの定義から、次が成立する：

$$\begin{aligned} u_n^*(o, p_o^m(t)) &\leq u_n^*(o, p_o^{m'}(t')), \quad \forall o \in \mathcal{N}_o \\ &\Rightarrow \min\{u_n^*(o, p_o^m(t))\} \leq \min\{u_n^*(o, p_o^{m'}(t'))\} \\ &\Leftrightarrow p_n^m(t) \leq p_n^{m'}(t'). \end{aligned} \quad (16)$$

よって、補題の関係式が成立することが示される。□

この補題は、ある起点でポテンシャルの大小関係が成立するとき、その関係性が他の起点、及びノードにおいて逆転しないことを意味する。そのため、この補題を用いることにより、ある  $k$  通りのポテンシャルの組み合わせが存在するとき、ネットワーク上の全てのノードにおいて、他の組み合わせよりポテンシャルが大きくない、ある組み合わせ  $m$  が存在することが分かる。

では、この補題を用いることで最早未配分車両の存在証明を行おう：

**定理 1.** ある unidirectional network において、 $\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r}) \neq \emptyset$  となるような経路ベクトル  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$  が与えられているとする。このとき、少なくとも一台の最早未配分車両が存在する。

**証明.** 全ての未配分車両について、 $p_{o_j}^{m_j}(t_j), \forall j \in \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r})$  となるように基準時刻  $t_j$ 、及びノード・ポテンシャルの組み合わせ  $m_j$  を取る、i.e., 各未配分車両の出発時刻に対応するポテンシャルを設定する。式 (9) から、次が成立するある組み合わせ  $m_i$  が存在することがわかる：

$$p_n^{m_i}(t_i) \leq p_n^{m_j}(t_j), \quad \forall n \in \mathcal{N}. \quad (17)$$

これを用いることにより、 $p_n^{o_i}(t_i) = s_i$  である時刻に起点  $o_i$  を出発する未配分車両  $i$  の最短経路  $\bar{r}_i^*$  上のノード到着時刻について、次が成立することが分かる：

$$\begin{aligned} u_n^*(o_i, s_i) &= p_n^{m_i} \leq p_n^{m_j}(t_j) \leq u_n^*(o_j, s_j), \quad (18) \\ &\forall n \in \mathcal{N}(\bar{r}_i^*) \cap \mathcal{N}_j, \forall j \in \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r}) \setminus \{i\}. \end{aligned}$$

これは、未配分車両  $i$  は最短経路  $\bar{r}_i^*$  を利用することにより、経路上の全てのノードに他の未配分車両より遅くなく到着することができることを意味する。よって、未配分車両  $i$  は最早未配分車両となる。□

なお、前章で説明したように、最早未配分車両の存在が保証されれば、そのネットワークでは順序配分アルゴリズムにより ordered Nash equilibrium を導出することができる。そのため、この定理より次の系が成立することが分かる。

系 1. Unidirectional network における DUE ゲームを考える。このネットワークでは、順序配分アルゴリズムにより均衡解を導出することができる、i.e., ordered Nash equilibrium が存在する。

#### 4. Weakly acyclic games と均衡解の確率的安定性

本章では、unidirectional network における動的利用者均衡の確率的安定性の解析を行う。具体的にはまず、unidirectional network での DUE ゲームが weakly acyclic games と呼ばれるゲームのクラスに分類されることを示す。次に、weakly acyclic game で蓄積されてきた均衡解の数理特性に関する理論を活用することで、動的利用者均衡の収束性、及び安定性を示す。さらに、解析された安定均衡解の特徴について概説するとともに、ネットワーク配分理論の観点から望ましい均衡解を安定化させるための手法について考察する。

なお、以降では DUE ゲームで表される within-day の交通流パターンに加え、その交通流パターンの day-to-day ダイナミクスを考える（ダイナミクスの具体的な内容は後で示す）。そこで、day を表す離散的な変数  $\tau$  ( $= 1, 2, \dots$ ) を導入する。Day  $\tau$  での車両  $i \in \mathcal{P}$  の経路選択を  $r_i^\tau$ 、その経路を選ぶことによる終点到着時刻を  $g_i(r_i^\tau; \mathbf{r}_{-i}^\tau)$  で表す。

##### (1) Weakly acyclic games

Weakly acyclic games の定義の説明に先立ち、次の“better response path”を定義する：

定義 6. (Better response path<sup>15),26)</sup> ある時間の流れに沿った戦略ベクトルの列 (path)  $\mathbf{r}^0, \mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^k$  を考える。各 day  $\tau \in [1, k]$  では、前の day とは異なる経路を選択する車両  $i \in \mathcal{P}$  が存在しているものとし (i.e.,  $r_i^{\tau-1} \neq r_i^\tau$ )、これを day  $\tau$  における逸脱者と呼ぶ。ある path 上において、各 day  $\tau$  の逸脱者が一人のみであり、かつ逸脱者  $i$  の効用が常に増加している (i.e., better response している) とき、すなわち、

$$\begin{cases} r_i^{\tau-1} \neq r_i^\tau, & \text{s.t. } g_i(r_i^\tau; \mathbf{r}_{-i}^\tau) < g_i(r_i^{\tau-1}; \mathbf{r}_{-i}^{\tau-1}), \\ r_j^{\tau-1} = r_j^\tau, & \forall j \in \mathcal{P} \setminus \{i\}. \end{cases} \quad (19)$$

が成立するとき、この path を better response path と呼ぶ。

Weakly acyclic games は、この better response path を用いて次のように定義される：

定義 7. (Weakly acyclic games<sup>15),26)</sup> 戦略集合を  $\mathcal{R}$  と表す。Nash 均衡状態ではない全ての戦略ベクトル  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$  について、Nash 均衡であるいずれかの戦略ベクトル  $\mathbf{r}^*$  への better response path が存在するとき、そのゲームは weakly acyclic game である。

Weakly acyclic games は、静的な均衡配分問題との関連でよく知られている、ポテンシャルゲームの一般化概念である。具体的には、ポテンシャルゲームは (いかなる経路ベクトルからも) Nash 均衡に到達する「有限の」better response path<sup>5</sup> を持つ；一方で、weakly acyclic games では、Nash 均衡に到達する better response path が有限であるとは限らない。ポテンシャルゲームでは、全プレイヤーの利得変化とゲーム全体の利得 (ポテンシャル) 変化とが完全に紐付けられている。すなわち、better response によるある個人の利得増加によりゲーム全体のポテンシャルは必ず増加する：そして、経路ベクトルは以前の day のものに逆戻りすることはない。そのため、ゲームが有限であるとき、その better response path は必ず有限列となる、i.e., 有限の better response のステップで Nash 均衡に到達する。一方で、weakly acyclic games には全プレイヤーの利得変化と紐付けられたポテンシャルは存在しない。そのため、Nash 均衡に到達する better response path は閉路を含んでいる可能性があり、有限列であるとは限らない。

##### (2) DUE ゲームと weakly acyclic games

では、unidirectional network 上の DUE ゲームが weakly acyclic game であることを証明しよう：

定理 2. Unidirectional network 上の DUE ゲームは weakly acyclic games のクラスである。

証明. 任意の初期経路選択ベクトル  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$  から、適切な順番で車両の経路選択を改善することにより Nash 均衡を導出するアルゴリズムを構築する：すなわち、全ての初期経路ベクトルにおいて、Nash 均衡へと到達する better response path の存在を示すことで構成的に証明する。

まず、車両を次の二つの集合に区分する：(1) 事後的な最短経路を選択していることが確定している車両集合  $\mathcal{P}_A$ 、及び (2) 事後的な最短経路を選択しているかどうか分からない車両集合  $\mathcal{P}_B$ 。また、これらの集合に属する車両の経路ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$  と表す。なお、 $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$  である。

以上の準備の下、次のアルゴリズムを考える：

0. 初期設定： $m = 0$  とし、車両集合、経路ベクトルについて次のように初期設定を行う： $(\mathcal{P}_A^m, \mathcal{P}_B^m) = (\emptyset, \mathcal{P})$ ,  $\mathbf{r}^m = (\mathbf{r}_A^m, \mathbf{r}_B^m) = (\emptyset, \mathbf{r})$ .

<sup>5</sup> 有限改善路 (finite improvement path, FIP) とも呼ばれる。

1. 最早未配分車両の探索： $\mathbf{r}_A$  を与件とした上で、車両集合  $\mathcal{P}_B^m$  に属する車両から定義に基づき最早未配分車両を決定する。最早未配分車両を  $i$  と表す。また、車両  $i$  の最短経路を  $\bar{r}_i^*$ 、最短経路を利用することによる最早終点到着時刻を  $g_i^*$  と表す。
2. 経路ベクトルの更新：車両  $i$  の現在の選択経路による終点到着時刻  $g_i(r_i^m; \mathbf{r}_{-i}^m)$  と  $g_i^*$  を比較し、次の場合分けに基づき経路を変更させる：
  - (a)  $g_i^* < g_i(r_i^m; \mathbf{r}_{-i}^m)$  の場合：車両  $i$  を better response させることで、選択経路を  $\bar{r}_i^*$  へと変更させる、i.e.,  $r_i^{m+1} := \bar{r}_i^*$ 。なお、他の車両の選択経路は変更しない、i.e.,  $r_j^{m+1} := r_j^m, \forall j \in \mathcal{P}_B^m \setminus \{i\}$ 。
  - (b)  $g_i^* = g_i(r_i^m; \mathbf{r}_{-i}^m)$  の場合：まず、次の二つの条件を満たす集合  $\mathcal{P}_B^m$  に属する車両の経路選択ベクトル  $\mathbf{r}'_B$  が存在するか否かを確かめる：
    - (1)  $\mathbf{r}'_B$  から  $\mathbf{r}'_B$  への better response path が存在し、
    - (2)  $\mathbf{r}'_B$  において車両  $i$  の終点到着時刻は遅くなる、i.e.,  $g_i(r'_i; \mathbf{r}'_{-i}) < g_i(r_i^m; \mathbf{r}_{-i}^m)$  where  $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}'_B)$ 。 $\mathbf{r}'_B$  が存在するとき (2-(b)-(i) と表す)、 $\mathcal{P}_B^m$  に属する車両の選択経路を次のように更新する：  
 $r_i^{m+1} := \bar{r}_i^*, r_j^{m+1} := r'_j, \forall j \in \mathcal{P}_B^m \setminus \{i\}$ 。  
 $\mathbf{r}'_B$  が存在しないとき (2-(b)-(ii) と表す)、車両の経路は変更しない： $r_j^{m+1} := r_j^m, \forall j \in \mathcal{P}_B^m$ 。
3. 車両集合の更新、及び収束判定： $\mathcal{P}_A^{m+1} := \mathcal{P}_A^m \cup \{i\}$ ,  $\mathcal{P}_B^{m+1} := \mathcal{P}_B^m \setminus \{i\}$  とする。 $\mathcal{P}_B^{m+1} \neq \emptyset$  ならば、 $m := m+1$  としてステップ 1 に戻る。そうでない場合、 $\mathbf{r}^{m+1}$  を均衡解としてアルゴリズムを終了する。

各ステップについて説明しながら、このアルゴリズムにより各車両を better response させつつ Nash 均衡を導出できることを示す。ステップ 1 では、better response させることにより事後的な最短経路を選ばせることができる車両 (i.e., 最早未配分車両) を探索している。具体的には、ある最早未配分車両  $i \in \mathcal{P}_B^m$  が最短経路  $\bar{r}_i^*$  へと better response できたならば、その経路は集合  $\mathcal{P}_B^m$  に属する車両の経路選択に旅行時間が影響されない経路である；そのため、順に最早未配分車両を最短経路へと better response することにより、全車両が事後的な最短経路を選択している状況を実現することができる。

ステップ 2 では、最早未配分車両  $i$  が実際に better response により事後的な最短経路を選ぶことができることを示すものである。まず 2-(a) は、現時点での選択経路による終点到着時刻が最短経路  $\bar{r}_i^*$  を利用したときより遅い場合である；そのため、車両  $i$  は better response により  $\bar{r}_i^*$  へと変更することができる。また 2-(b) は、現時点の終点到着時刻が最短経路  $\bar{r}_i^*$  を利用したときと同じ場合であり、車両  $i$  単独の better response では  $\bar{r}_i^*$  への経路変更はできない。ただし、2-(b)-(i) のときは、 $\mathcal{P}_B^m$

に属する  $i$  以外の車両の選択経路を better response により  $\mathbf{r}'_B$  へと変更すれば、車両  $i$  の終点到着時刻は遅くなるため、 $\bar{r}_i^*$  へと better response することにより変更することができるようになる。

一方で 2-(b)-(ii) のときは、車両  $i$  の終点到着時刻が遅くなるような経路選択ベクトルが存在しないため、車両  $i$  は better response により  $\bar{r}_i^*$  へ経路変更することはできない。しかし、これは車両  $i$  の終点到着時刻は既に最小化 (i.e.,  $g_i^* = g_i(r_i^m; \mathbf{r}_{-i}^m)$ ) されており、かつその終点到着時刻は  $\mathcal{P}_B^m$  に属する車両の better response による経路変更により影響されないことを意味している、i.e., 経路  $r_i^m$  は事後的な最短経路である。そのためステップ 2 を通して、 $\mathcal{P}_B^m$  に属する車両の経路選択に関わらない事後的な最短経路へと、車両  $i$  の経路を変更させることができる。

結果として、最早未配分車両の存在が保証されているとき、このアルゴリズムは有限の繰り返し回数  $|\mathcal{P}|$  で均衡解を必ず導出する。そして、unidirectional network 上の DUE ゲームでは、最早未配分車両の存在は保証されている。すなわち、任意の初期経路選択ベクトル  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$  から、適切な順番で車両の経路選択を改善することにより Nash 均衡を導出することができる。よって、Nash 均衡へと到達する better response path の存在が示された。□

### (3) 動的利用者均衡の収束性、及び安定性

本節では、具体的な day-to-day ダイナミクスを考え、そのダイナミクスに対する均衡解の収束性、及び安定性について調べる。

#### a) 収束性

まず、次の“better response dynamics”を考え、その収束性を示す：各 day  $\tau (> 0)$  において、一つの車両  $i \in \mathcal{P}$  がランダムに抽出され、経路を変更する機会が与えられる。車両  $i$  は現状の経路  $r_i^\tau$  より早く終点に到着する経路  $r_i^{\tau+1}$  を発見することができれば、その経路を新たに選択するものとする、i.e.,  $g_i(r_i^{\tau+1}; \mathbf{r}_{-i}^\tau) < g_i(r_i^\tau; \mathbf{r}_{-i}^\tau)$ 。なお、より早く終点に到着する経路を発見できない場合、経路は変更しない。

Nash 均衡状態は明らかにこのダイナミクスの吸収状態であり、一度 Nash 均衡状態に到達するとその状態から他の状態に推移することはない。また、あるゲームが weakly acyclic game であるとき、いかなる経路ベクトルからも Nash 均衡に到達する better response path が存在する。すなわち、あるゲームが weakly acyclic games であるとき、better response dynamics は Nash 均衡への収束性を持つことがわかる<sup>27)</sup>。そのため定理 2 から、unidirectional network における DUE ゲームの均衡状態の収束性について、次の命題が成立する：



**命題 1.** Unidirectional network における DUE ゲームを考える。車両の経路選択の day-to-day ダイナミクスとして better response dynamics を考えたとき、このダイナミクスにより実現する経路ベクトル  $\mathbf{r}$  は、Nash 均衡へとほとんど確実に収束する。

Day-to-day ダイナミクスの収束性は、定式化したシステムの代表的な状態を表現するのに均衡解を用いることに対して肯定的な材料を提供する。しかしながら、突然変異的な行動変容や効用を最大化する経路への変更ミスといった「ゆらぎ (摂動)」を持たない確定的なダイナミクスの収束性は、均衡解の安定性を示す十分条件とはならない。これは、摂動が加わるにより均衡状態から少し離れた状態へと遷移したとき、元の均衡状態へと戻る方向へ各車両の行動選択が行われるとは限らないためである。そのため、均衡解の安定性を示すためには、均衡点周辺における漸近的な挙動を調べる必要がある。

#### b) 確率的安定性

均衡解の漸近的な挙動を調べるにあたり、Young<sup>15)</sup> は「確率的安定性」の概念を導入した。確率的安定性の分析では、摂動を含むダイナミクス下での状態推移の長期的な振る舞いを、確率過程の定常分布として捉える。そして、摂動が生じる確率を十分小さくしたときの定常分布の漸近的な挙動から、どの状態が実現しやすいか (i.e., 十分長期間にわたり観測したときに、どの状態の観測頻度が高くなるか) を分析する。この摂動に対して長期的に頑強な状態が確率的安定な状態である。

確率的安定性は、フォーマルには次のように定義される：まず、ある摂動を含まないダイナミクスによる各車両の日々の経路変更を有限マルコフ連鎖としてモデル化する (これを “unperturbed Markov chain” と呼ぶ)。このマルコフ連鎖の状態空間は経路選択ベクトルの直積集合  $\mathcal{R}$  であり、遷移確率行列を  $\mathbf{P}^0$  により表す。また、状態 (経路ベクトル)  $\mathbf{r}$  から  $\mathbf{r}'$  への遷移確率を  $\mathbf{P}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}$  により表す。

次にこのダイナミクスにおいて、あるパラメータ  $\epsilon$  により特徴づけられた確率で摂動が起きる (e.g., 効用に関わらずランダムに戦略を選ぶ) ダイナミクスを考える；そして先と同様に、このダイナミクスによる経路ベクトルの遷移を有限マルコフ連鎖としてモデル化する (“regular perturbed Markov chain” と呼ぶ)。Regular perturbed Markov chain の遷移確率行列を  $\mathbf{P}^\epsilon$  により表す。ただしこの遷移確率行列は、パラメータ  $\epsilon$  がゼロになったとき、unperturbed Markov chain の遷移確率行列と一致するものとする、i.e.,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}^\epsilon = \mathbf{P}^0$ 。

$\epsilon > 0$  であるとき、perturbed Markov chain は非周期、かつ既約である、i.e., このマルコフ連鎖はエルゴード的である。すなわち、このマルコフ連鎖は唯一の定常分

布  $\boldsymbol{\mu}^\epsilon$  を持ち、これは  $\boldsymbol{\mu}^\epsilon \mathbf{P}^\epsilon = \boldsymbol{\mu}^\epsilon$  を満たす。この定常分布は、長期間にわたり観測したときの各状態の観測頻度を表すものである。更に、この定常分布はパラメータ  $\epsilon$  がゼロに近づくことで、unperturbed Markov chain の定常分布のうち一つへと収束することが示されている<sup>15)</sup>。そのため、摂動生起確率が十分小さくなったときの定常分布  $\boldsymbol{\mu}^\epsilon$  から、摂動を含まないダイナミクスでの漸近的な挙動 (i.e., どの状態周辺に定常分布が収束するか) を調べることができる。以上の準備の下、確率的安定性は次のように定義される：

**定義 8. (Stochastic stability)** ある状態  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$  がある regular perturbed Markov chain に対して確率的安定であるとき、 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}^\epsilon > 0$  が成立する。

摂動生起確率が十分小さくなったときの長期的な振る舞いを見ると、確率的安定である状態は、そうでない状態と比較して頻繁に観測される (i.e., 0 より大きい確率で観測される) 状態となる。すなわち、確率的安定である均衡解が存在することを証明できれば、その均衡は摂動を含むダイナミクス下での状態遷移においても頻繁に観測される、実現しうる尤もらしい均衡解として解釈することができる。

では、unidirectional network における DUE ゲームでの均衡解の確率的安定性を調べよう。本研究では、摂動の生起確率が利得 (終点到着時刻) と紐付けられていないダイナミクスと、紐付けられているダイナミクスの二種類を取り上げ、その確率的安定性を調べる。具体的には、前者としては、前節で示した better response dynamics のミスを含むダイナミクス (stochastic better response dynamics) を取り上げる；次に後者として、logit-response dynamics<sup>28),29),30)</sup> を取り上げる。

まず、stochastic better response dynamics について説明する。このダイナミクスでは、まず better response dynamics と同様に、各 day  $\tau$  においてある車両  $i \in \mathcal{P}$  がランダムに選ばれ経路変更の機会が与えられる。しかし、車両  $i$  は確率  $\epsilon$  で経路変更ミスを起こすものとする、i.e., 現在の効用以下の経路を含む経路へとランダムに変更する。このダイナミクスによるある状態  $\mathbf{r} = (r_i, \mathbf{r}_{-i})$  から  $\mathbf{r}' = (r'_i, \mathbf{r}_{-i})$  への遷移確率  $\mathbf{P}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}$  は、次のように表される：

$$\mathbf{P}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^\epsilon = (1 - \epsilon)\mathbf{P}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^0 + \frac{1}{n} \left\{ \epsilon \frac{1}{|\mathcal{R}_i|} \right\}, \quad (20)$$

$$\text{where } \mathbf{P}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^0 = \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{1}{|D_i(\mathbf{r})|} & r'_i \text{ が車両 } i \text{ の better response} \\ & \text{による経路変更先の候補のとき} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

ここで  $|D_i(\mathbf{r})|$  は、経路ベクトルが  $\mathbf{r}$  であるときの、(ミ

スを含まない) better response dynamics による車両  $i$  の経路変更候補の総数である. なお, 遷移確率行列  $\mathbf{P}_{rr}^\epsilon$  は  $\epsilon \rightarrow 0$  により明らかに  $\mathbf{P}_{rr}^0$  (better response dynamics における遷移確率行列) へと収束する. そのため, この stochastic better response dynamics は better response dynamics の regular perturbation dynamics であることがわかる.

そして以上の準備の下, stochastic better response dynamics の下での均衡解の確率的安定性は次の定理により示される:

**定理 3.** Unidirectional network 上での DUE ゲームを考える. ミスのある better response dynamics の下での確率的安定状態は, Nash 均衡状態の集合に含まれる. すなわち, 確率的安定的な均衡が存在する.

証明. 証明は付録付録 I を参照.

次に, logit-response dynamics について取り上げる. このダイナミクスでは, 経路変更の機会が与えられた車両  $i$  はより早く終点到着できる経路をより高い確率で選ぶ. 具体的には, ある day  $\tau$  における経路選択ベクトルが  $\mathbf{r}^\tau$  で与えられているとき, day  $\tau + 1$  において車両  $i$  が経路  $r_i$  へと変更する確率  $p_i^{\tau+1}(r_i; \mathbf{r}_{-i}^\tau)$  は, 次のように与えられる:

$$p_i^{\tau+1}(r_i; \mathbf{r}_{-i}^\tau) = \frac{e^{-\beta g_i(r_i; \mathbf{r}_{-i}^\tau)}}{\sum_{r_i \in \mathcal{R}_i} e^{-\beta g_i(r_i; \mathbf{r}_{-i}^\tau)}}. \quad (22)$$

ここで,  $\beta$  ( $0 < \beta < \infty$ ) は摂動パラメータ  $\epsilon$  の逆数に相当するものであり, logit-response の unperturbed dynamics である “best response dynamics” からどれだけの摂動を受けているのかを示す度合いである. Best response dynamics では, ある車両  $i$  は終点到着時刻を最小化する, 次の経路選択肢集合  $B_i(\mathbf{r}_{-i})$  からランダムに経路を選択する:

$$B_i(\mathbf{r}_{-i}) := \left\{ r_i^* \in \mathcal{R}_i \text{ s.t. } g_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) = \min_{r_i \in \mathcal{R}_i} g_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) \right\}. \quad (23)$$

$\beta \rightarrow \infty$  のとき, logit-response dynamics は best response dynamics と同一となる.

Best response dynamics では, 「狭義」Nash 均衡がダイナミクスの吸収状態となる. これは, このダイナミクスでは同一の終点到着時刻を持つ経路に変更することが可能であるためである. この特性に基づき, Alos-Ferrer and Netzer<sup>30)</sup> は, logit-response dynamics での均衡解の確率的安定性について, 次の定理を示している: Weakly acyclic game では, logit-response dynamics での確率的安定状態は狭義 Nash 均衡の集合に含まれる. そのため, もし unidirectional network での DUE ゲームが狭義 Nash 均衡を持てば, 均衡解の確率的安定性を示すことができることがわかる.

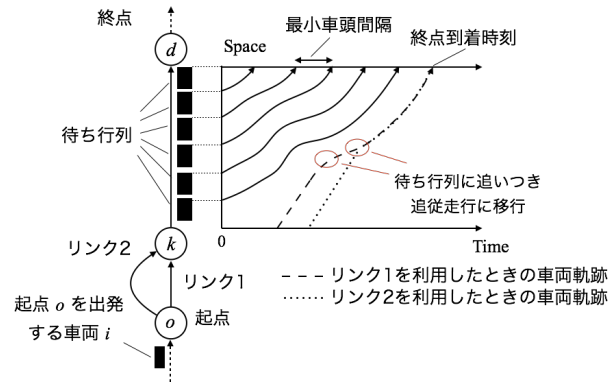


図-2 待ち行列の存在により, 終点到着時刻を最小化する経路が複数存在するときのネットワーク例

しかし, DUE ゲームでは狭義 Nash 均衡は, その存在を一般的に保証することはできない. これは, 動的な交通流での待ち行列の性質により, 終点到着時刻を最小化する経路が複数存在しうするためである. 例えば, 図 2 に示すネットワークを考えてみよう. このネットワークは一起点一終点ネットワークであり, 二つの経路が存在する. ここで, 次を満たす均衡状態が実現しているものとする; リンク 3 に待ち行列が存在しており, ある車両  $i$  はどちらの経路を利用しても待ち行列の末尾に追いつける. 加えて, 車両  $i$  より後の時刻に起点を出発する車両は, 車両  $i$  を追い越す (i.e., リンク 3 により早く流入する) ことができない. このとき, 車両  $i$  はどちらの経路を利用しても, 同時刻 (待ち行列の掛け時刻) に終点到着することがわかる. すなわち, 式 (1) において複数の最適反応が存在することになり, 結果的に狭義 Nash 均衡が存在しなくなる. この例は, 動的利用者均衡配分において, logit-response dynamics では確率的安定な均衡が一般には存在しないことを示唆するものである. このような, ある種のダイナミクスでは待ち行列の存在が均衡解の不安定化を招くといった事実は, 待ち行列の興味深い特性であるといえよう.

#### (4) 交通流の均衡状態と確率的安定性について

一度均衡解の安定性が示されたならば, 交通工学的な関心はこうした安定的な均衡解の解析, すなわち, 安定均衡解と対応する尤もらしいフロー・パターンの特性の解明へと移る. これは, 均衡解析の本来の目的が, 必要最小限の要素モデルの下に導出されるベンチマークとなる均衡状態から, ネットワーク・システムの本質的な挙動の解析を行うことにあるためである<sup>31),32)</sup> (e.g., 安定均衡解に対応するフロー・パターンは, 様々なパラメータ (e.g., 道路容量, トポロジー) の変化に伴いどのような挙動を見せるのか). しかし, 前節で示した確率的安定な均衡解を解析する場合, その解析は率直にいくものではなく, いくつかの問題を有している. 以

下では、それらの問題を挙げた後、その問題を解決するための提案を行う。

解析にあたっての問題の第一は、Ellison<sup>33)</sup> などにより指摘されるように、確率的安定な均衡を数値計算などにより求めることは難しいということである。これは、確率的安定性とは本質的に十分長期的にわたる、無限回の day-to-day ダイナミクスの繰り返しの結果に基づき定義されるためである。例えば、ある day-to-day ダイナミクスを実装し、有限の繰り返しから定常分布を求めたとする；そしてある均衡状態が頻繁に観測されるようであったとしても、その状態は確率的安定であるとは限らない。なぜならば、その有限の繰り返しは「真の」確率的安定状態へ収束するには回数が足りていないかもしれないためである。つまり、この頻繁に観測された均衡は確率的安定状態へと収束する過程において、偶然頻繁に発現したものであるという可能性がある。無限回の繰り返しというのは現実には不可能であるので、結果として確率的安定な均衡を数値計算から求める（判断する）ことは難しい。

既存研究には、定常分布を求めるのではなく確率的安定状態を直接求めるアルゴリズムを提案しているものもある（例えば、Foster and Young<sup>10)</sup>, Young<sup>15)</sup>, Ellison<sup>33)</sup>）。しかし、こうしたアルゴリズムは戦略の列挙を要求する。DUE ゲームの状態（経路ベクトル）空間  $\mathcal{R}$  は非常に大きく、戦略の列挙は実質的に不可能であるため、やはりその実装は難しい。

第二の問題は、確率的安定である均衡解のネットワーク配分理論からの解釈の難しさである。均衡解の確率的安定性は適用される day-to-day ダイナミクスに依存しているため、確率的安定な均衡状態に対応する交通流パターンがどのような配分パターンであるのかは、ダイナミクスごとに変化する。そのため、各ダイナミクスに含まれる摂動の意味や要因を考慮した、確率的安定である均衡解の解釈が求められる。しかし、ダイナミクスによっては、ネットワーク交通流として不自然な摂動を行うものも存在している。例えば前節で示した *perturbed better response dynamics* では、摂動による経路選択の変容は利得（終点到着時刻）と関係づけられておらず、車両はランダムに経路を選択するものとしている。Sandholm<sup>34)</sup> などにより指摘されているように、こうした突然変異的な摂動はネットワーク配分理論としては不自然なものである。そのため、確率的安定な状態が一体どのような摂動にさらされたときに頻繁に観測されるものであるのか、また実現した交通状態は車両のどのような行動の結果であるのか、といった解釈を行うことが難しくなる。

以上の問題を考慮すると、その均衡解（対応するフロー・パターン）の特性を解析するというステップに

おいては、安定均衡解の存在を保証するだけでなく、その均衡が次の特性を持っていることが望ましい；(1) 求解でき、特定することが可能であること、及び(2) ネットワーク配分理論的に自然な解釈を行えることである。言い換えれば、求解可能な均衡解を確率的安定化できるような、何らかの追加的な（しかし自然な）条件を導入することが求められる。

こうした問題に対する一つの解決手法は、ordered Nash equilibrium を確率的安定化することである。前述したように、ordered Nash equilibrium は順序配分アルゴリズムを適用することにより導出される均衡解である。具体的には、適切な順序付けから求められる最早未配分車両を、DP 原理を満たす最短経路へと順に配分していく；これにより、各車両は後から配分された車両から追い越されない、事後的な最短経路を選択している状態（均衡状態）が達成される。すなわち、この均衡解は特定することが可能であり、かつ各車両が DP 原理を満たしながら最短経路を探索した結果実現する交通状態という、ネットワーク配分理論的に自然な解釈を行うことができる。

Ordered Nash equilibrium を確率的安定化するためには、その均衡が適用されるダイナミクスの unperturbed dynamics において吸収点であれば良い。このためには、次の二つが満たされていければ良い；(1) DP 原理により導出される最早未配分車両の最短経路が唯一に定まり、かつ(2) 仮に DP 原理を満たす経路と同一の終点到着時刻を持つ経路が存在するとき、DP 原理を満たす経路を優先して選択するという追加的な基準をダイナミクスに加える。(1) が満たされるためには、あらゆるノード間において、自由旅行時間が同じ経路が複数存在しないという条件が満たされていければ良い。また、(2) を満たすためには、十分小さな値の利得を DP 原理を満たす経路の利得に加えることにより、DP 原理を満たす経路の利得を見かけ上、他の経路より高くしてやれば良い。

結果として、(1) を満たすネットワークにおいて、(2) で述べた追加的な経路選択基準をダイナミクスに導入することにより、logit-response dynamics を含めた様々なダイナミクスにおいて、ordered Nash equilibrium を確率的安定化することができると考えられる。次章では、数値実験を通してこの議論を検証する。

## 5. 数値実験

本章では、ここまでで議論した unidirectional network 上での動的利用者均衡の収束性、及び確率的安定性を、数値実験を通して調べる。具体的には、まず better response dynamics の収束性を調べる。この数値実験では、待ち

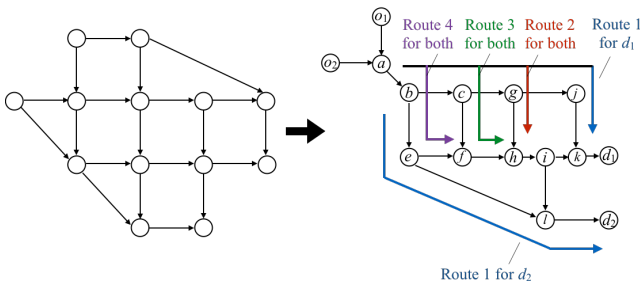


図-3 左図：オリジナルの Dupuis ネットワーク。右図：本稿で取り扱うネットワーク

表-1 リンク・パラメータ (FFTT: 自由旅行時間, BN: ボトルネック容量, SF: 飽和交通流率)

Link	FFTT [sec]	BN [veh/sec]	SF [veh/sec]	Link	FFTT [sec]	BN [veh/sec]	SF [veh/sec]
( $o_1, a$ )	14	2	2	( $f, h$ )	12	1.5	1.5
( $o_2, a$ )	18	2	2	( $g, h$ )	18	0.17	0.5
( $a, b$ )	6	2	2	( $g, j$ )	6	0.2	0.5
( $b, c$ )	6	2	2	( $h, i$ )	9	0.67	83
( $b, e$ )	18	1.5	1.5	( $i, k$ )	12	0.27	0.67
( $c, f$ )	26	1.5	1.5	( $i, l$ )	6	0.2	0.5
( $c, g$ )	10	1.5	1.5	( $j, k$ )	6	0.67	1
( $e, f$ )	20	1.5	1.5	( $k, d_1$ )	6	0.67	1
( $e, l$ )	42	0.27	0.5	( $l, d_2$ )	6	0.67	1

行列の延伸がどのように収束速度に影響を及ぼすかを調べるために、physical queue モデルと point queue モデルを用いた数値実験を行い、その収束に要する回数を比較する。次に、前章最後の議論の妥当性を確認するために、ミスのある day-to-day ダイナミクスを仮定したときの定常分布について、DP 原理を満たす経路を優先するという基準を組み込んだときと組み込まないときのものを比較考察する。

(1) ネットワーク・需要設定

図 3 に、本章で取り扱う unidirectional network を示す。このネットワークは Nguyen Dupuis をベースに、unidirectional 構造を持つように構造を修正したものである。起点ノードの集合は  $N_o = \{o_1, o_2\}$  であり、終点ノードの集合は  $N_d = \{d_1, d_2\}$  である。ネットワーク上の各リンクは、リンク終端のボトルネック部とボトルネック以外の区間から構成されており、台形型の Fundamental Diagram を持っている。各リンクのパラメータ (e.g., 自由旅行時間, ボトルネック容量) を表 1 にまとめる。なお、ネットワーク上の各起点から各終点には、四つの経路が存在している (i.e., 各車両の経路選択肢集合は四つの経路から構成される)。これら経路は図に示したとおりに番号付けている。

ネットワーク上の各起点からは、それぞれ 100 台の車両が出発する。各車両は一定の車頭間隔で起点からネットワークに流入している (車頭間隔の具体的な値

は後に示す)。また、各終点へ向かう車両の比率は一対一と設定している。

本稿では、Leclercq and Becarie<sup>35)</sup> により提案された mesoscopic LWR モデルにより、各車両の挙動を計算する。この数値実験では、各車両が特定の箇所 (e.g., ノード) を通る時刻である “event time” を求める。次に event time のうち、最小の時刻までの車両挙動 (i.e., 各リンク上の車両軌跡) を、適用される動的な交通流モデルに従い求める。そして、この event time の計算、及びその最小時刻までの車両軌跡の更新を、全ての車両がトリップを終えるまで繰り返す。なお、本稿では動的な交通流モデルとして Newell の追従モデルを採用している。

(2) 数値実験結果

a) 収束速度

まず、待ち行列の延伸がどのように収束速度に影響を与えるのかを考察する。具体的には、physical queue と point queue における better responses dynamics での均衡解への収束に要する day の日数の比較を行う。この数値実験では、起点から流入する車両の車頭間隔について次の三種類のパターンを考える；2.5[sec/veh] (low パターン), 2.0[sec/veh] (medium パターン), 1.5[sec/veh] (high パターン)。そして各需要パターンについて、better response dynamics による均衡解への収束計算を 50 回行い、収束に要するまでの日数の平均値を比較する。なお、初期経路選択ベクトルは距離最短の経路と設定する。また、better response にあたっては、前章で議論した DP 原理を満たす経路を優先するという追加的な基準を導入する。具体的には、DP 原理を満たす経路については、車両が知覚する見かけ上の終点到着時刻を 0.001[sec] だけ短くしている<sup>6)</sup>。

図 4 に、physical・point queue モデルのそれぞれにおいて、各需要パターンを適用したものの収束日数の結果について示す。各図の横軸は需要パターンを示しており、縦軸は収束日数の値を示している。数値計算結果は箱ひげ図で示されており、図中赤線が収束日数の平均値を示している。この図からは、車頭間隔が短くなるほど (流入交通流率が高いほど)、均衡状態への収束に要する回数が少なくなることが見て取れる。特に high の需要パターンにおいて point queue と physical queue を比較すると、後者の方が収束に要する回数が少なくなっていることがわかる。この事実からは、待ち行列の延伸が収束回数を少なくしていることが示唆される。

このことを確かめるために、均衡状態における経路選択パターンを調べた。図 5 に、physical queue、及び point queue を適用したときの均衡状態における各経路を利用する車両の累積図 (横軸は出発時刻を表す) を

<sup>6)</sup> 実際の経路旅行時間、及び終点到着時刻は変化させてはいない。

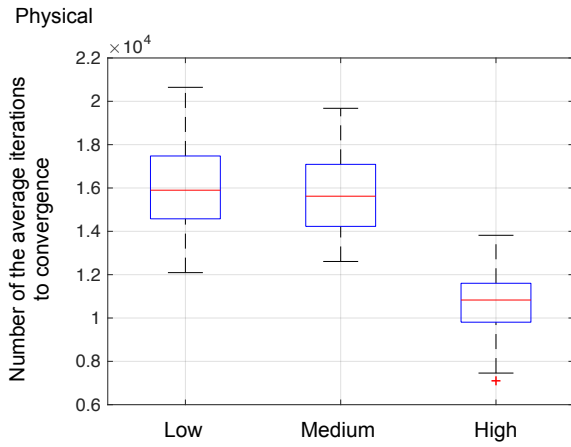


図-4-a Physical queue

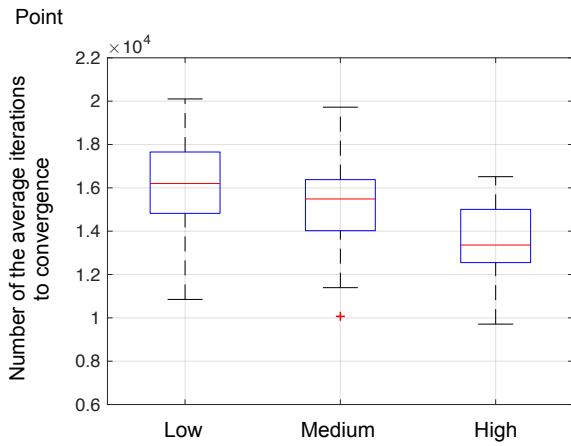


図-4-b Point queue

図-4 Nash 均衡状態に達する前の収束日数の平均値。

示す。まず図 5-a を見ると、physical queue が適用されているときは、より早い時刻において経路 2 を利用する車両が存在しなくなっていることがわかる。これは、リンク  $(j, g)$  上の待ち行列がリンク  $(c, g)$  に延伸することにより、この経路の旅行時間が増加したためである。このことは、均衡状態への収束過程を考えたとき、better response による各車両の経路変更先の候補から経路 2 が除外されやすくなることを意味している、i.e., 経路 1 と 3 の間での better response を行う傾向にある。一方で図 5-b を見ると、point queue が適用されているときは待ち行列の延伸が生じていないために、経路 2 を利用する車両はより遅い出発時刻においても存在していることがわかる。すなわち、経路 2 は better response の候補として残り続けていることが示唆される。結果として、この数値実験においては、待ち行列の延伸が better response による事後的な最短経路への変更確率を高めていることがわかる。このために、physical queue ではより少ない回数で均衡解へと収束していることがわかる。

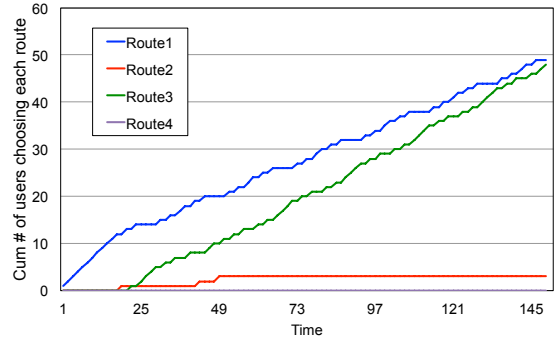


図-5-a Physical queue

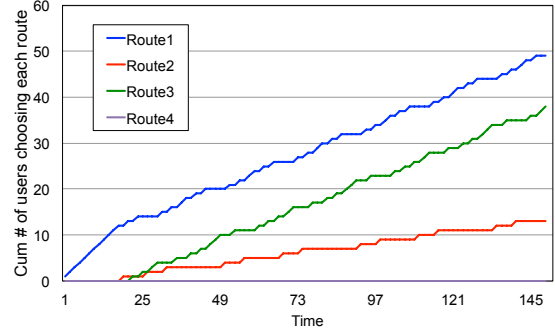


図-5-b Point queue

図-5 均衡状態での、終点  $d_1$  に向かう各経路の累積流入台数。

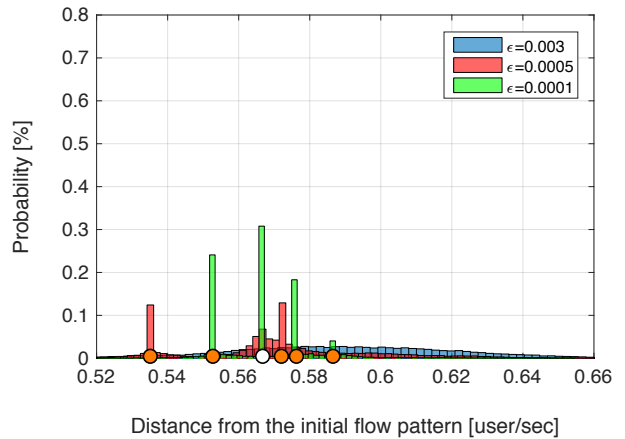


図-6 Perturbed better response dynamics を適用したときの定常分布 (橙の丸は均衡状態, 白丸は ordered Nash equilibrium におけるフロー・パターンを表す)

b) Perturbed dynamics の定常分布

次に、perturbed dynamics の定常分布を求める。具体的には、適用された perturbed dynamics に従い、初期状態からの経路選択ベクトルの推移を 200,000 回繰り返す。そして、経路選択ベクトルから計算される経路フロー・パターンの、初期状態からの乖離具合を交通状態として定義した上で、各交通状態の生起回数の頻度分布を定常分布として求めた。なお、初期経路選択ベ

クトルは前節と同じく距離最短の経路と設定する。また、起点から流入する車頭間隔は high パターンのみを考える。

本節では、次の三種類のダイナミクスを適用し、その結果について比較考察する；通常の perturbed better response dynamics, DP 原理を満たす経路を優先するという追加的な基準を導入した perturbed better response dynamics, 及び logit-response dynamics. 各ダイナミクスに含まれる摂動の起こり具合については、次の三パターンを考える；perturbed better response では、 $\epsilon = 0.003, 0.0005, 0.0001$ ；logit-response では、 $\beta = 300, 500, 700$ .

交通状態の具体的な計算方法を説明する。まず、各 day  $\tau$  の経路  $r$  の（一日間の）平均交通流率  $f^r(\tau)$  を次の式に従い求める：

$$f^r(\tau) = \frac{|\mathcal{P}^r(\tau)|}{T_{last}^r(\tau) - T_{first}^r(\tau)}. \quad (24)$$

ここで、 $|\mathcal{P}^r(\tau)|$  は経路  $r$  を選択している車両総数である。また  $T_{first}^r, T_{last}^r$  は、それぞれその経路を利用した最初と最後の車両の経路（ネットワーク）流入時刻である。そして、初期経路フロー・パターンの乖離具合を、次の経路フロー・パターン間のユークリッド距離として求めた：

$$z(\tau) = \left[ \sum_{r \in \mathcal{R}} (f^r(\tau) - f^r(0))^2 \right]^{1/2}. \quad (25)$$

本稿では、この距離を交通状態として定義する。

図 6 に、通常の perturbed better response dynamics の定常分布を示す。横軸は各交通状態（i.e., 初期経路フロー・パターンからのユークリッド距離）、縦軸は各交通状態の正規化された頻度（生起回数を繰り返し回数 200,000 で割ったもの）を表す。図中において丸がつけられている状態は、それが均衡状態であることを表している。特に白丸は、ordered Nash equilibrium であることを表している。

この図からは、均衡状態、及びそれに対応するフロー・パターンが複数実現していることがわかる。さらに、摂動の生起具合をゼロに近づけていっても、ある Nash 均衡周りへと定常分布が収束（ある均衡状態の正規化頻度が 1.0 に近づく）するわけではないことが見て取れる；寧ろ、生起具合が変化することにより、最も出現頻度が高い状態は変化していることがわかる。具体的に見ていくと、 $\epsilon$  を 0.003 から 0.0005 へと減少させたとき、0.54、及び 0.57 付近の交通状態の正規化頻度が高くなっていることがわかる。このことから、これらの状態が確率的安定状態であることが期待される；そして、更に  $\epsilon$  をゼロに近づけていくことで頻度は更に高くなることが予想される。しかし、実際に  $\epsilon$  を 0.0001

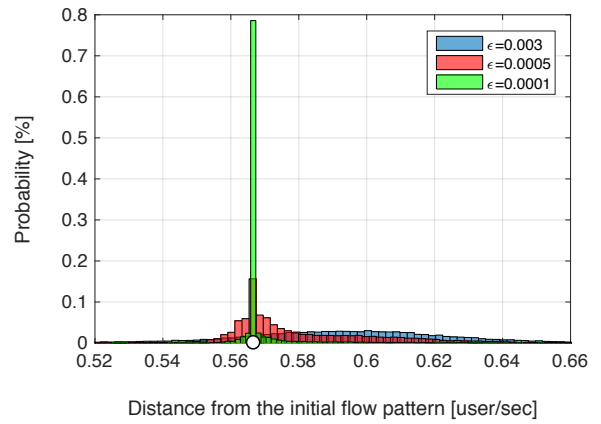


図-7-a Perturbed better response dynamics

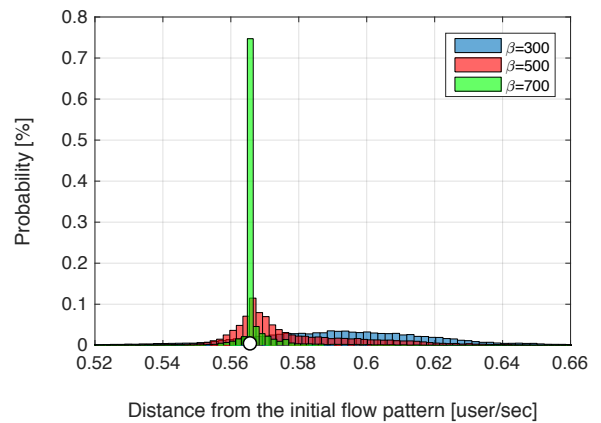


図-7-b Logit dynamics

図-7 Perturbed better response dynamics を適用したときの定常分布（DP 原理を優先する基準を追加）

に減少させると、これらの交通状態の頻度はゼロに近づいていることがわかる。そして、 $\epsilon = 0.0005$  のときには頻度がゼロに近かった交通状態の頻度が高くなっている。これらの事実からは、前節で議論したように、有限の繰り返し回数では頻度が高い均衡が存在しても、それが真に確率的安定であるのか判断することができないことがわかる。

次に、DP 原理を満たす経路を優先する追加的な基準を導入したときの定常分布を確認しよう。図 7 に、perturbed better response dynamics, 及び logit-response dynamics の定常分布を示す。これを見るとわかるように、追加的な基準を導入したダイナミクスでは、摂動の生起具合をゼロに近づけることにより、ordered Nash equilibrium に対応する交通状態の正規化頻度が高くなっている。これは perturbed better response dynamics に限らず、確率的安定性を保証するためには均衡解の狭義性が満たされている必要があった logit-response dynamics でも同様である<sup>7</sup>。すなわち、追加的な基準を導入する

<sup>7</sup> なお、このネットワーク設定では ordered Nash equilibrium は狭義性を満たしてはいない。

ことにより, ordered Nash equilibrium を確率的安定化できることが確認できる。

## 6. 終わりに

本稿では, weakly acyclic games との関係性を通して, unidirectional network 上での DUE ゲームの確率的安定性を調べた。まず, unidirectional network 上での DUE ゲームには, 最早未配分車両が存在することを証明した。これは, unidirectional network では, 均衡解を達成するための適切な順序付けを各車両に行うことができることを保証する。次にこの順序付け可能性から, unidirectional network 上での DUE ゲームが weakly acyclic games のクラスであることを示した。そして, ゲーム理論の分野で蓄積された知見を活用して, 動的利用者均衡の収束性, 及び確率的安定性を示した。最後に, 数値実験を通して, 理論解析で得られた結論の妥当性を確認した。

本稿では, physical queue と point queue を適用したときの収束速度について, 数値実験を通して比較考察を行った。そして, この数値実験では待ち行列の延伸が均衡解への収束に要する繰り返し回数を少なくすることがわかった。この結果は直感と反する興味深いものである。しかし, 待ち行列の延伸が収束回数に与える影響は, その延伸の種類にも依存すると考えられる, e.g., 「分岐部」への延伸か, または「合流部」への延伸か。そのため, ネットワーク構造や待ち行列の延伸の仕方を変えながら, より系統的な数値実験を通して待ち行列の収束速度に与える影響を調べる必要がある。

また本稿では, DP 原理を満たす最短経路を優先して選択する, といった基準を追加することで, 順序配分アルゴリズムにより導出される ordered Nash equilibrium が確率的安定状態になることを示した。この追加的な基準はネットワーク配分では自然なものであると考えられるが, 本来は, このような追加的な基準を導入せずとも, ダイナミクスそのものが車両の経路選択行動を Nash 均衡へと収束・安定化させることができることが望ましいと考えられる。そのため, 動的利用者均衡状態が安定化するようなダイナミクスをゲーム理論の分野で発展してきた既存研究から探索, またはそれを参考にしながら開発していくことは重要であろう。

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 JP18J12493 の助成を受けたものである。

## 付録 I 定理 3 の証明

この証明は, Young<sup>15)</sup> の次の定理を活用している:

定理 4. (Young<sup>15)</sup>, Theorem 4) ある unperturbed Markov

chain を考える。また, 摂動パラメータ  $\epsilon$  を持つこのダイナミクスの regular perturbed Markov chain を考え, その唯一の定常分布を  $\mu^\epsilon$  と表す。このとき  $\epsilon \rightarrow 0$  により,  $\mu^\epsilon$  は unperturbed Markov chain の定常分布のうち, いずれか一つに収束する。さらに, このとき確率的安定な状態は, unperturbed Markov chain の再帰的同値類の集合に含まれる。

Unidirectional network 上の DUE ゲームは weakly acyclic games であるため, better response dynamics は Nash 均衡を吸収点として持つ: また, 吸収点は Nash 均衡である。これは, better response dynamics による車両の日々の経路変更をモデル化した unperturbed Markov chain の再帰的同値類が, Nash 均衡と一対一対応することを意味している。上記の定理より, 確率的安定な状態は再帰的同値類の集合に含まれるため, 確率的安定状態は均衡状態の集合に含まれる。よって証明。□

## 参考文献

- 1) Iryo, T.: Properties of dynamic user equilibrium solution: existence, uniqueness, stability, and robust solution methodology, *Transportmetrica B: Transport Dynamics*, Vol.1, No.1, pp.52–67, 2013.
- 2) 赤松隆 and 和田健太郎: 動的な交通ネットワーク流問題, *Proceedings of the Twenty-Sixth RAMP Symposium*, Hosei University, Tokyo, 2014.
- 3) Beckmann, M., McGuire, C. B., and Winsten, C. B.: *Studies in the Economics of Transportation*, Yale University Press, New Haven, 1956.
- 4) Smith, M. J.: The stability of a dynamic model of traffic assignment—An application of a method of Lyapunov, 1984.
- 5) Zhang, D. and Nagurney, A.: On the local and global stability of a travel route choice adjustment process, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.30, No.4, pp.245–262, 1996.
- 6) Smith, M. J. and Ghali, M.: The dynamics of traffic assignment and traffic control: A theoretical study, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.24, No.6, pp.409–422, 1990.
- 7) Mounce, R.: Convergence in a continuous dynamic queueing model for traffic networks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.40, No.9, pp.779–791, 2006.
- 8) Kuwahara, M.: Some aspects of the dynamic equilibrium assignment in oversaturated networks, [*In Japanese.*] *JSCE Journal of Infrastructure Planning and Management*, Vol.419(IV-13), pp.123–126, 1990.
- 9) Mounce, R. and Smith, M.: Uniqueness of equilibrium in steady state and dynamic traffic networks, *Transportation and Traffic Theory*, (Ed. by R. E. Allsop, M. G. Bell, and B. G. Heydecker), pp. 281–299, Oxford, 2007, Elsevier.
- 10) Foster, D. and Young, H. P.: Stochastic evolutionary game dynamics, *Theoretical Population Biology*, Vol.38, No.2, pp.219–232, 1990.
- 11) Cantarella, G. E. and Cascetta, E.: Dynamic processes and equilibrium in transportation networks: towards a unifying theory, *Transportation Science*, Vol.29, No.4, pp.305–329, 1995.
- 12) Balijepalli, N. C. and Watling, D. P.: Doubly Dynamic Equilibrium Distribution Approximation Model for Dynamic

- Traffic Assignment, *Proceedings of the 16th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, pp. 741–760, 2005.
- 13) Cantarella, G. E. and Watling, D. P.: A general stochastic process for day-to-day dynamic traffic assignment: Formulation, asymptotic behaviour, and stability analysis, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.92, pp.3–21, 2016.
  - 14) Iryo, T. and Smith, M. J.: On the uniqueness of equilibrated dynamic traffic flow patterns in unidirectional networks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.23, No.2016, pp.1–17, 2017.
  - 15) Young, H. P.: The evolution of conventions, *Econometrica*, Vol.61, No.1, pp.57–84, 1993.
  - 16) Monderer, D. and Shapley, L. S.: Potential games, *Games and Economic Behavior*, Vol.14, No.1, pp.124–143, 1996.
  - 17) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic Equilibrium Assignment with Queues for a One-to-Many OD Pattern, 1993.
  - 18) 赤松隆 and 桑原雅夫: 渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分—1 起点・多終点および多起点・1 終点 od ペアの場合, *土木学会論文集*, No.488/IV-23, pp.21–30, 1994.
  - 19) Akamatsu, T.: A dynamic traffic equilibrium assignment paradox, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.34, No.6, pp.515–531, 2000.
  - 20) Akamatsu, T., Wada, K., and Hayashi, S.: The corridor problem with discrete multiple bottlenecks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.81, No.3, pp.808–829, 2015.
  - 21) Wada, K., Satsukawa, K., Smith, M. J., and Akamatsu, T.: Network throughput under dynamic user equilibrium : Queue spillback , paradox and traffic control, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.0, pp.1–23, 2018.
  - 22) Akamatsu, T.: An efficient algorithm for dynamic traffic equilibrium assignment with queues, *Transportation Science*, Vol.35, No.4, pp.389–404, 2001.
  - 23) Waller, S. T. and Ziliaskopoulos, A. K.: A combinatorial user optimal dynamic traffic assignment algorithm, *Annals of Operations Research*, Vol.144, No.1, pp.249–261, 2006.
  - 24) Iryo, T.: Solution algorithm of Nash equilibrium in dynamic traffic assignment with discretised vehicles, *Journal of JSCE*, Vol.67, No.1, pp.70–83, 2011.
  - 25) Satsukawa, K. and Wada, K.: A note on the solution algorithm of Nash equilibrium in dynamic traffic assignment for single destination networks, *Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. D3 (Infrastructure Planning and Management)*, Vol.73, No.1, pp.103–108, 2017.
  - 26) Marden, J. R., Young, H. P., Arslan, G., and Shamma, J. S.: Payoff-based dynamics for multiplayer weakly acyclic games, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol.48, No.1, pp.373–396, 2009.
  - 27) Young, H. P.: *Strategic Learning and Its Limits*, Oxford University Press, USA, 2004.
  - 28) Blume, L. E.: The statistical mechanics of strategic interaction, *Games and Economic Behavior*, Vol.5, No.3, pp.387–424, 1993.
  - 29) Marden, J. R. and Shamma, J. S.: Revisiting log-linear learning: Asynchrony, completeness and payoff-based implementation, *Games and Economic Behavior*, Vol.75, No.2, pp.788–808, 2012.
  - 30) Alós-Ferrer, C. and Netzer, N.: On the convergence of logit-response to (strict) Nash equilibria, *Economic Theory Bulletin*, Vol.5, No.1, pp.1–8, 2017.
  - 31) Akamatsu, T.: Cyclic flows, Markov process and stochastic traffic assignment, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.30, No.5, pp.369–386, oct 1996.
  - 32) 桑原雅夫 and 赤松隆: 動的ネットワーク解析, *土木学会論文集*, Vol.2000, No.653, pp.3–16, 2000.
  - 33) Ellison, G.: Basins of Attraction, Long-Run Stochastic Stability, and the Speed of Step-by-Step Evolution, *Review of Economic Studies*, Vol.67, No.1, pp.17–45, 2000.
  - 34) Sandholm, W. H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, 2010.
  - 35) Leclercq, L. and Bécarie, C.: A meso LWR Model designed for network applications, *TRB 2012 Annual Meeting*, 2012.

(2018. 7. 31 受付)

## Stochastic stability of dynamic user equilibrium in unidirectional networks: Weakly acyclic game approach

Koki SATSUKAWA, Kentaro WADA, and Takamasa Iryo