

# OD 逆推定におけるエントロピー最大化モデル のホモトピー法による解法

茂木 渉<sup>1</sup>

<sup>1</sup>正会員 一般財団法人計量計画研究所 (〒 162-0845 東京都新宿区市谷本村町 2-9)  
E-mail: w Mogi@ibs.or.jp

既存の OD 交通量データと起終点間の経路選択確率が先験値として得られているときに、道路ネットワーク上の観測リンク交通量から OD 表を逆推定する手法として、残差平方和最小化モデルやエントロピー最大化モデルなどが開発されている。残差平方和最小化モデルは一般に 2 次計画問題として定式化されるため、その求解や実務適用も比較的容易な手法であると考えられる。一方、エントロピー最大化モデルについては、制約条件付き非線形計画問題もしくはその最適性条件である非線形連立方程式を数値的に解く必要があり、解法アルゴリズムによっては発散することや精度の低い解しか得られず、実務適用の難易度が高い。そこで、本稿では、非線形連立方程式に対する有効な解法として知られているホモトピー法を用いて、モデル構造を活用したホモトピーパスを追跡することにより、エントロピー最大化モデルの高精度な数値解を安定して求めるアルゴリズムを提案する。

*Key Words: OD matrix estimation, entropy maximization, nonlinear equations, homotopy method*

## 1. はじめに

都市交通実態の把握や将来交通量の推計をするにあたっては、パーソントリップ調査や道路交通起終点調査（道路交通センサス調査）等の調査データから集計された OD 表が一般的に活用される。しかしながら、これらの実態調査はアンケート方式に基づいており、近年では、調査対象者の個人情報保護意識の高まりにより調査回収率が低下することや、調査コストの削減等の理由により従来と同程度の大規模調査を実施することが困難になるという課題がある。これにより、調査データの精度低下を招くことが想定されるため、調査の効率化および調査データの精度を向上させる手法の確立が強く求められている。

データ精度の向上に関する 1 つの解決策としては、観測交通量を用いて OD 交通量を補正する手法（OD 逆推定）を適用することが考えられる。OD 逆推定手法には、観測交通量に加えて道路ネットワーク上の経路情報も先験値として必要なものがあるが、近年では、交通ビッグデータにより日々もしくは時々刻々の様々な観測データが得られるようになってきており、特に、ETC2.0 をはじめとしたプローブデータから起終点間の利用経路も把握できるようになってきている。また、実績データから得られる経路情報を用いるだけでなく、交通量配分などの経路選択モデルや、さらには交通シミュレーションも現実ネットワークに適用できるようになってきており、これらの手法により利用経路を推計して用

いることもできる。このため、OD 逆推定手法を実務適用するための前提条件は着実に整いつつあるといえる。

OD 逆推定では、既存の OD パターンが活用可能な場合には、活用できない場合に比べて、より精度の高い推定 OD 表が得られることが知られている。このような既存の OD パターンを活用して、道路ネットワーク上の観測交通量に整合するように OD 交通量を逆推定する手法は、数多く提案されているが、代表的な方法としては残差平方和最小化モデルとエントロピー最大化モデルがある<sup>1)</sup>。

残差平方和最小化モデルについては、一般には 2 次計画問題として定式化され、OD 交通量の非負条件を考慮した場合でも、有効制約法などにより効率的に解くことができる。さらに、より推計精度を向上させた発展的なモデルも研究されているが、モデルの提案と同時に解法アルゴリズムも開発されていることもあり、実務適用も比較的容易であると考えられる<sup>2)</sup>。

一方で、エントロピー最大化モデルについては、制約条件付きの非線形計画問題もしくはその最適性条件である非線形連立方程式を解く必要がある。このため、エントロピー最大化モデルにより OD 逆推定を行うためには、その非線形モデルを数値計算によって解くこと自体が大きな課題となる。

そこで本稿では、OD 逆推定におけるエントロピー最大化モデルに対して、高精度な数値解を安定して求める方法として、非線形連立方程式に対する有効な解

法として知られるホモトピー法を活用したアルゴリズムを提案する。

## 2. 既往研究のレビュー

OD 交通量を未知変数とし、先験 OD 表と起終点間の経路選択確率を所与とした場合における、観測リンク交通量を用いたエントロピー最大化モデルの定式化やそれらの解法アルゴリズムに関する既往研究・文献について、以下のとおり整理する。

### (1) モデルの定式化に関する既往研究

推定リンク交通量が観測リンク交通量に一致するという制約条件の下でエントロピー最大化により OD 表を逆推定する方法は、Van Zuylen and Willumsen<sup>3)</sup>により最も基本的なモデルが提案されている。Van Vliet and Willumsen<sup>4)</sup>では、このモデルを現実のネットワークや観測データに対して適用することで、モデルの実用性の検証を行っている。さらに、Willumsen<sup>5)</sup>ではこのエントロピー最大化モデルを動的に拡張したモデルと、観測交通量には誤差があることを考慮して残差を許容したモデルの 2 種類を提案し、それらの考え方を示している。そして、小根山・桑原<sup>6)</sup>や三輪・山本・竹下・森川<sup>7)</sup>では、これら 2 種類を組み合わせたモデルにより、観測交通量の誤差を許容した時間帯別 OD 表の逆推定を実施している。ただし、これらのモデルでは、先験総交通量と推定総交通量が一定であると仮定した定式化をしているため、それらの乖離が大きい場合には問題が生じることが示唆されている<sup>3)</sup>。これらのように、推定総交通量を一定と仮定したエントロピー最大化モデルを、本稿では総称して“Willumsen モデル”と呼ぶ。

飯田・高山・小林<sup>8)</sup>、高山<sup>9)</sup>ではこの点を修正し、Van Zuylen and Willumsen<sup>3)</sup>の静的なモデルをベースとして、推定総交通量も未知変数として扱った改良モデルを提案している。また、Willumsen モデルとの比較検証を実施した結果、Willumsen モデルは推定総交通量を一定にしている関係で、調査漏れの影響を大きく受けることを示している。本稿では、こちらのモデルを“改良 Willumsen モデル”と呼ぶ。土木学会<sup>1)</sup>をはじめとして、いくつかの OD 逆推定を扱った教科書等には、改良 Willumsen モデルの方が掲載されている。

### (2) 解法アルゴリズムに関する既往研究

次に、各文献で記述されている、これらのエントロピー最大化モデルの解法アルゴリズムについて述べる。

Willumsen モデルに対する解法としては、Van Zuylen and Willumsen<sup>3)</sup>や Van Vliet and Willumsen<sup>4)</sup>では、

Murchland の方法が使われており、小根山・桑原<sup>6)</sup>では同じく Murchland の方法の他にも、標準的な非線形連立方程式の解法が適用可能とされている。また、三輪・山本・竹下・森川<sup>7)</sup>では最急降下法が使われている。しかし、Murchland の方法は解への収束が遅いうえに収束が保証されておらず<sup>3)</sup>、最急降下法はプリミティブな方法であり、解の近傍付近でジグザグ現象を起こすため、収束までに多数回の反復計算が必要になり、さらには収束が停滞することがある。

一方、改良 Willumsen モデルに対する解法としては、土木学会<sup>1)</sup>、飯田・高山・小林<sup>8)</sup>、高山<sup>9)</sup>ではプレント法を用いることと、解に収束させるためのテクニックとして、事前に未知変数のオーダーを揃えておく前処理を適用することが記述されている。しかし、いずれの文献においても、プレント法についてはプログラムライブラリの紹介だけの記述に留まっており、具体的な実装方法等についてはブラックボックスとなっている。

以上のとおり、OD 逆推定におけるエントロピー最大化モデルについては、モデルの定式化自体はいくつかのバリエーションがあるが、実務適用の際の解法アルゴリズムの選定や構築は、解析者に委ねられているのが現状であると考えられる。しかしながら、非線形モデルの解析では、精度の高い数値解を安定して得られるアルゴリズムを適用することが非常に重要であり、また、解の存在性の分析や判断などをするうえでも、その計算過程に関して明確になっている手法を用いることが望ましい。

## 3. OD 逆推定におけるエントロピー最大化モデルの定式化

OD 逆推定におけるエントロピー最大化モデルとは、1つ1つのトリップを区別して微視的にとらえ、推定リンク交通量が観測リンク交通量に一致（もしくは近似）するという条件の下で、トリップパターンの同時生起確率が最大となる OD 表を求める方法である。

本稿では、推定リンク交通量を観測リンク交通量に一致させ、推定総交通量も未知変数とした静的なモデルである改良 Willumsen モデル<sup>1),7),8)</sup>を、主な解析対象とする。ただし、本稿で提案する解法アルゴリズムは、Willumsen モデル/改良 Willumsen モデル、静的/動的、のいずれに対しても同様に適用可能であるため、これらの違いについてはアルゴリズムを検討するうえでは本質的でないことを注意しておく。

また、提案するアルゴリズムでは、推定リンク交通量と観測リンク交通量の誤差を許容したモデルの構造を活用しており、アルゴリズムを構築するうえで非常に重要になるため、以下に併せてモデルの定式化を示す。

(1) 観測交通量を制約条件として与えるエントロピー最大化モデル (改良 Willumsen モデル)

推定総交通量を未知変数として, 推定リンク交通量を観測リンク交通量に一致させることを制約条件としたうえで, 先験確率を考慮して OD 交通量の同時生起確率を最大化することにより OD 表を逆推定するモデルは, 以下のような非線形計画問題として定式化される<sup>1),7),8)</sup>.

$$\max \frac{q!}{\prod_{rs \in \Omega} q_{rs}!} \prod_{rs \in \Omega} \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right)^{q_{rs}} \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \hat{x}_a = \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} p_{rs,a} \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (2)$$

$$q = \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \quad (3)$$

ここに,

- $\hat{q}_{rs}$  : OD ペア  $rs$  の先験 OD 交通量
- $\hat{q}$  : 先験 OD 交通量の全 OD ペアの合計 (先験総交通量)
- $q_{rs}$  : OD ペア  $rs$  の推定 OD 交通量
- $q$  : 推定 OD 交通量の全 OD ペアの合計 (推定総交通量)
- $\hat{x}_a$  : リンク  $a$  の観測リンク交通量
- $p_{rs,a}$  : OD ペア  $rs$  のトリップが, リンク  $a$  を通過する確率 (リンク利用率)
- $\Omega$  : OD ペア集合
- $\mathcal{A}$  : リンク集合

目的関数 (1) の最大化は, その対数の最大化と同値であり, 階乗関数にスターリングの公式

$$\ln n! \doteq n \ln n - n, \quad (n \gg 1) \quad (4)$$

を適用すると, 解くべき非線形計画問題は以下のように書き直すことができる.

$$\max q \ln q - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \ln q_{rs} + \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \ln \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \quad (5)$$

$$\text{s.t. } (2), (3)$$

この問題をラグランジュ未定乗数法を用いて解くことを考える. まず, ラグランジュ関数  $L$  を次式のように定義する.

$$L = q \ln q - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \ln q_{rs} + \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \ln \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) + \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a \left( \hat{x}_a - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} p_{rs,a} \right) + \nu \left( q - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \right) \quad (6)$$

ただし,  $\lambda_a, \nu$  はラグランジュ乗数である. このラグランジュ関数  $L$  の 1 次の最適性条件は以下で与えられる.

$$\frac{\partial L}{\partial q_{rs}} = -\ln q_{rs} - 1 + \ln \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) - \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a p_{rs,a} - \nu = 0 \quad \forall rs \in \Omega \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \ln q + 1 + \nu = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_a} = \hat{x}_a - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} p_{rs,a} = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \nu} = q - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} = 0 \quad (10)$$

(7),(8) 式から  $\nu$  を消去して整理すると, 以下を得る.

$$\ln q_{rs} = \ln q + \ln \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) - \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a p_{rs,a} \quad \forall rs \in \Omega$$

$$\therefore q_{rs} = q \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \exp \left( - \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a p_{rs,a} \right) \quad \forall rs \in \Omega \quad (11)$$

ここで, ラグランジュ乗数を

$$\Lambda_a = \exp(-\lambda_a) \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (12)$$

と変数変換すると, (11) 式は

$$q_{rs} = q \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \prod_{a \in \mathcal{A}} \Lambda_a^{p_{rs,a}} \quad \forall rs \in \Omega \quad (13)$$

となる. これを (9),(10) 式に代入することで, 解くべき問題は以下の非線形連立方程式となる.

$$1 = \sum_{rs \in \Omega} \left\{ \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \prod_{a \in \mathcal{A}} \Lambda_a^{p_{rs,a}} \right\} \quad (14)$$

$$\hat{x}_a = q \sum_{rs \in \Omega} \left\{ p_{rs,a} \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \prod_{a' \in \mathcal{A}} \Lambda_{a'}^{p_{rs,a'}} \right\} \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (15)$$

以上により, 元の最適化問題では未知変数の数が OD ペア数+1 であったものを, 観測地点数+1 に減らすことができ, また, この非線形連立方程式を解き, 求めた  $q, \Lambda_a$  を (13) 式に代入することで, 推定 OD 交通量  $q_{rs}$  を得ることができる.

(2) 観測交通量の誤差を考慮したエントロピー最大化モデル (拡張型改良 Willumsen モデル)

前節のモデルにおいては, 観測リンク交通量が真値であると仮定して, 推定リンク交通量と観測リンク交通量を厳密に一致させる構造となっていた. しかし, 観測リンク交通量には誤差が含まれていると考えられるため, 推定リンク交通量を観測リンク交通量と厳密に一致させるのではなく, 乖離を許容しつつ両者をなるべく近づけるというアプローチが提案されている. Willumsen<sup>5)</sup> では, 観測リンク交通量の真値との乖離尺度として, 以

下の関数を提案している .

$$\min - \left\{ - \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a \ln x_a + \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a + \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a \ln \hat{x}_a \right\} \quad (16)$$

この最小化関数を組み込んだ逆推定モデルは、以下のように導出される .

まず、元の問題の OD 交通量に関する同時生起確率である目的関数 (1) 式に、リンク交通量に関する同時生起確率を乗じる形で、次式のように拡張する<sup>6)</sup> .

$$\max \left\{ \frac{q!}{\prod_{rs \in \Omega} q_{rs}!} \prod_{rs \in \Omega} \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right)^{q_{rs}} \right\} \left\{ \frac{x!}{\prod_{a \in \mathcal{A}} x_a!} \prod_{a \in \mathcal{A}} \left( \frac{\hat{x}_a}{\hat{x}} \right)^{x_a} \right\}^\gamma \quad (17)$$

ここに、

- $\hat{x}$  : 観測リンク交通量の全リンクの合計
- $x_a$  : リンク  $a$  の推定リンク交通量
- $x$  : 推定リンク交通量の全リンクの合計
- $\gamma$  : パラメータ

この関数におけるパラメータ  $\gamma$  は、OD 表推定に反映させる先験 OD 交通量情報と観測リンク交通量情報の重みを調節するためのパラメータであり、 $\gamma$  が大きいほど観測交通量の情報が多く反映され、 $\gamma \rightarrow \infty$  ならば観測リンク交通量と完全に整合するような OD 表を求める問題になる . また、 $\gamma$  が小さいほど観測リンク交通量の情報は反映されず、先験 OD 交通量の情報がより強く反映され、得られる推定 OD 表は先験 OD 交通量に近いものになる<sup>5)</sup> . このモデルは改良 Willumsen モデルを内包した構造となっていることから、本稿ではこのモデルを“拡張型改良 Willumsen モデル”と呼ぶこととする .

(17) 式の数値をとり、スターリングの公式を適用すると、次式が得られる .

$$\max \left\{ q \ln q - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \ln q_{rs} + \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \ln \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \right\} + \gamma \left\{ x \ln x - x - \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a \ln x_a + \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a + \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a \ln \left( \frac{\hat{x}_a}{\hat{x}} \right) \right\} \quad (18)$$

ここで、観測リンク交通量に係る項については、Willumsen<sup>5)</sup>などに倣い、 $x$  が一定であることを仮定し、目的関数の一部を

$$\text{constant} := \gamma \left\{ x \ln x - x - \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a \ln \hat{x}_a \right\} \quad (19)$$

と定数化すると、観測交通量の誤差を考慮した場合における解くべき非線形計画問題は以下のように導出さ

れる .

$$\max \left\{ q \ln q - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \ln q_{rs} + \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \ln \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \right\} + \gamma \left\{ - \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a \ln x_a + \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a + \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a \ln \hat{x}_a \right\} \quad (20)$$

$$\text{s.t. } x_a = \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} p_{rs,a} \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (21)$$

$$q = \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \quad (22)$$

すなわち、このモデル定式化における (20) 式は、(5) 式および (16) 式の加法的スカラー化関数であり、この非線形計画問題は多目的計画問題に対する線形加重和の最大化問題になっているものと解釈することもできる .

さて、この問題をラグランジュ未定乗数法を用いて解くことを考える . ラグランジュ関数  $L$  を次式のように定義する .

$$L = \left\{ q \ln q - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \ln q_{rs} + \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \ln \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \right\} + \gamma \left\{ - \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a \ln x_a + \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a + \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a \ln \hat{x}_a \right\} + \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a \left( x_a - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} p_{rs,a} \right) + \nu \left( q - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \right) \quad (23)$$

ただし、 $\lambda_a, \nu$  はラグランジュ乗数である . このラグランジュ関数  $L$  の 1 次の最適性条件は以下で与えられる .

$$\frac{\partial L}{\partial q_{rs}} = - \ln q_{rs} - 1 + \ln \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) - \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a p_{rs,a} - \nu = 0 \quad \forall rs \in \Omega \quad (24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \ln q + 1 + \nu = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_a} = \gamma (- \ln x_a + \ln \hat{x}_a) + \lambda_a = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_a} = x_a - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} p_{rs,a} = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \nu} = q - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} = 0 \quad (28)$$

(24),(25),(26) 式を整理して、ラグランジュ乗数  $\lambda_a$  を (12) 式により変数変換を行うと、以下を得る .

$$q_{rs} = q \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \prod_{a \in \mathcal{A}} \Lambda_a^{p_{rs,a}} \quad \forall rs \in \Omega \quad (29)$$

$$x_a = \hat{x}_a \Lambda_a^{-\frac{1}{\gamma}} \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (30)$$



これらを (27),(28) 式に代入することで、解くべき問題は以下の非線形連立方程式となる。

$$1 = \sum_{rs \in \Omega} \left\{ \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \prod_{a \in \mathcal{A}} \Lambda_a^{p_{rs,a}} \right\} \quad (31)$$

$$\hat{x}_a \Lambda_a^{-\frac{1}{\gamma}} = q \sum_{rs \in \Omega} \left\{ p_{rs,a} \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \prod_{a' \in \mathcal{A}} \Lambda_{a'}^{p_{rs,a'}} \right\} \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (32)$$

以上により、観測地点数+1 の未知変数を持つ非線形連立方程式を解き、求めた  $q, \Lambda_a$  を (29) 式に代入することで推定 OD 交通量  $q_{rs}$  を、(30) 式に代入することで推定リンク交通量  $x_a$  をそれぞれ得ることができる。

#### 4. ホモトピー法によるエントロピー最大化モデルの解法

非線形方程式もしくは非線形連立方程式の数値解法としてはニュートン法が一般的に知られている。この方法は解の近傍付近で 2 次収束する解法であるが、大域的収束性がなく、初期値を適切に選定しなければ解に到達しないという問題がある。

そこで、ニュートン法の非収束問題を改良した手法の 1 つとして、ホモトピー法（もしくは連続変形法やパス追跡法）と呼ばれる方法がある<sup>10),(11),(12),(13)</sup>。ホモトピー法は、自明解を持つ補助方程式から解くべき連立方程式まで、連続的につながる連立方程式を構築し、自明解を初期値として、その連立方程式の解集合である解曲線（ホモトピーパス）を追跡することにより、最終的に解くべき連立方程式の解を得る手法である。

(14),(15) 式（もしくは (31),(32) 式）の非線形連立方程式をホモトピー法により解くために必要となる補助方程式やホモトピー関数、および、本稿におけるホモトピーパスの追跡方法と具体的な解法アルゴリズムについて以下に示す。

##### (1) 補助方程式とホモトピー関数

ホモトピー法を適用するためには、自明解を持つ補助方程式と、その補助方程式から最終目標として解くことになる方程式まで連続的に変形可能なホモトピー関数が必要になるが、エントロピー最大化に基づく OD 逆推定モデルに関しては、ホモトピー関数として、観測交通量の誤差を考慮したエントロピー最大化モデルの非線形連立方程式の写像がそのまま活用可能である。つまり、本稿で解析対象としている改良 Willumsen モデルに対しては、拡張型改良 Willumsen モデルの非線形連立方程式 (31),(32) の写像が活用できる。

なぜならばこのモデルは、 $\gamma \rightarrow 0$  のときは観測リンク交通量の情報をまったく反映せず、推定 OD 交通量

は先験 OD 交通量に一致することから、明らかに

$$q = \hat{q} \quad (33)$$

$$\Lambda_a = 1 \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (34)$$

を解として持つことがわかる。そして、 $\gamma \rightarrow \infty$  のときは推定リンク交通量が観測リンク交通量に一致するため、このときの推定 OD 交通量は改良 Willumsen モデルの解となっており、さらに、 $\gamma$  は観測リンク交通量の情報をどの程度反映するかを決定するパラメータとなっている。これらのことから、このモデルの解集合自体がパラメータ  $\gamma$  によって連続的に繋がるホモトピーパスになっているものと解釈できる。

従って、(33),(34) 式を初期値として、非線形連立方程式 (31),(32) の解集合であるホモトピーパスを追跡し、最終的に目標とする  $\gamma^*$ （改良 Willumsen モデルにより逆推定したい場合には  $\gamma^* = \infty$ ）のときの解を求めれば良い。

##### (2) ホモトピーパスの追跡方法

ホモトピーパスの追跡方法としては、予測子・修正子法や球面法など<sup>13)</sup>の、より実用的な方法も提案されているが、ここでは最も簡易的なものとして、ダビデンコ法<sup>11),(12)</sup>をベースにした方法を示す。具体的には、 $\gamma$  を外生パラメータとして徐々に変化させ、ホモトピーパスをニュートン法によって追跡する。

以下では、リンク  $a$  を  $1, \dots, |\mathcal{A}|$  と番号を付け、リンク集合を  $\mathcal{A} = \{1, \dots, |\mathcal{A}|\}$  と表記し、ラグランジュ乗数ベクトルを  $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{|\mathcal{A}|})^T \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}|}$ 、未知変数である推定総交通量  $q$  とラグランジュ乗数ベクトル  $\Lambda$  をまとめて  $z = (q, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{|\mathcal{A}|})^T \in \mathbb{R}^{1+|\mathcal{A}|}$  と記述する。また、ベクトル値関数  $f_\gamma: \mathbb{R}^{1+|\mathcal{A}|} \rightarrow \mathbb{R}^{1+|\mathcal{A}|}$ 、 $f_\gamma(z) = (f_{\gamma,0}(z), f_{\gamma,1}(z), \dots, f_{\gamma,|\mathcal{A}|}(z))^T$  の各要素を次のように定義する。

$$f_{\gamma,0}(z) = 1 - \sum_{rs \in \Omega} \left\{ \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \prod_{a \in \mathcal{A}} \Lambda_a^{p_{rs,a}} \right\} \quad (35)$$

$$f_{\gamma,a}(z) = \hat{x}_a \Lambda_a^{-\frac{1}{\gamma}} - q \sum_{rs \in \Omega} \left\{ p_{rs,a} \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \prod_{a' \in \mathcal{A}} \Lambda_{a'}^{p_{rs,a'}} \right\} \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (36)$$

つまり、ここで解くべき非線形連立方程式を

$$f_\gamma(z) = 0 \quad (37)$$

と定義すると、この非線形連立方程式に対するニュートン方程式は次式のように記述できる。

$$\nabla f_\gamma(z) \Delta z = -f_\gamma(z) \quad (38)$$

ここで、 $\nabla f_\gamma(z) \in \mathbb{R}^{(1+|\mathcal{A}|) \times (1+|\mathcal{A}|)}$  は関数  $f_\gamma(z)$  のヤコビ行列、 $\Delta z = (\Delta q, \Delta \Lambda_1, \dots, \Delta \Lambda_{|\mathcal{A}|})^T \in \mathbb{R}^{1+|\mathcal{A}|}$  はニュートン方向ベクトルである。また、ヤコビ行列

$\nabla f_\gamma(z)$  の各要素は以下の式により計算できる．

$$\nabla f_\gamma(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{\gamma,0}(z)}{\partial q} & \frac{\partial f_{\gamma,0}(z)}{\partial \Lambda_1} & \dots & \frac{\partial f_{\gamma,0}(z)}{\partial \Lambda_{|\mathcal{A}|}} \\ \frac{\partial f_{\gamma,1}(z)}{\partial q} & \frac{\partial f_{\gamma,1}(z)}{\partial \Lambda_1} & \dots & \frac{\partial f_{\gamma,1}(z)}{\partial \Lambda_{|\mathcal{A}|}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{\gamma,|\mathcal{A}|}(z)}{\partial q} & \frac{\partial f_{\gamma,|\mathcal{A}|}(z)}{\partial \Lambda_1} & \dots & \frac{\partial f_{\gamma,|\mathcal{A}|}(z)}{\partial \Lambda_{|\mathcal{A}|}} \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$\frac{\partial f_{\gamma,0}(z)}{\partial q} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial f_{\gamma,0}(z)}{\partial \Lambda_{\bar{a}}} = - \sum_{rs \in \Omega} \left\{ p_{rs,\bar{a}} \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \Lambda_{\bar{a}}^{p_{rs,\bar{a}}-1} \prod_{a' \in \mathcal{A} \setminus \{\bar{a}\}} \Lambda_{a'}^{p_{rs,a'}} \right\} \quad \forall \bar{a} \in \mathcal{A} \quad (41)$$

$$\frac{\partial f_{\gamma,a}(z)}{\partial q} = - \sum_{rs \in \Omega} \left\{ p_{rs,a} \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \prod_{a' \in \mathcal{A}} \Lambda_{a'}^{p_{rs,a'}} \right\} \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (42)$$

$$\frac{\partial f_{\gamma,a}(z)}{\partial \Lambda_{\bar{a}}} = \begin{cases} -q \sum_{rs \in \Omega} \left\{ p_{rs,a} p_{rs,\bar{a}} \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \cdot \Lambda_{\bar{a}}^{p_{rs,\bar{a}}-1} \prod_{a' \in \mathcal{A} \setminus \{\bar{a}\}} \Lambda_{a'}^{p_{rs,a'}} \right\} & \text{if } a \neq \bar{a}, \forall a \in \mathcal{A}, \forall \bar{a} \in \mathcal{A} \\ -\frac{1}{\gamma} \hat{x}_{\bar{a}} \Lambda_{\bar{a}}^{\frac{1}{\gamma}-1} - q \sum_{rs \in \Omega} \left\{ p_{rs,\bar{a}}^2 \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \cdot \Lambda_{\bar{a}}^{p_{rs,\bar{a}}-1} \prod_{a' \in \mathcal{A} \setminus \{\bar{a}\}} \Lambda_{a'}^{p_{rs,a'}} \right\} & \text{if } a = \bar{a}, \forall a \in \mathcal{A}, \forall \bar{a} \in \mathcal{A} \end{cases} \quad (43)$$

なお， $\gamma \rightarrow \infty$  の場合の (36) 式および (43) 式の対角要素については，それぞれ以下の (44),(45) 式となる．

$$f_{\infty,a}(z) = \hat{x}_a - q \sum_{rs \in \Omega} \left\{ p_{rs,a} \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \prod_{a' \in \mathcal{A}} \Lambda_{a'}^{p_{rs,a'}} \right\} \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (44)$$

$$\frac{\partial f_{\infty,a}(z)}{\partial \Lambda_{\bar{a}}} = -q \sum_{rs \in \Omega} \left\{ p_{rs,\bar{a}}^2 \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \cdot \Lambda_{\bar{a}}^{p_{rs,\bar{a}}-1} \prod_{a' \in \mathcal{A} \setminus \{\bar{a}\}} \Lambda_{a'}^{p_{rs,a'}} \right\} \quad \text{if } a = \bar{a}, \forall a \in \mathcal{A}, \forall \bar{a} \in \mathcal{A} \quad (45)$$

### (3) 解法アルゴリズム

以上を基にした，エントロピー最大化モデルに対する解法アルゴリズムを以下に示す．

#### Step1:

解ベクトルの初期値  $q^{(0)} := \hat{q}$ ,  $\Lambda^{(0)} := \mathbf{1}$  を与え，

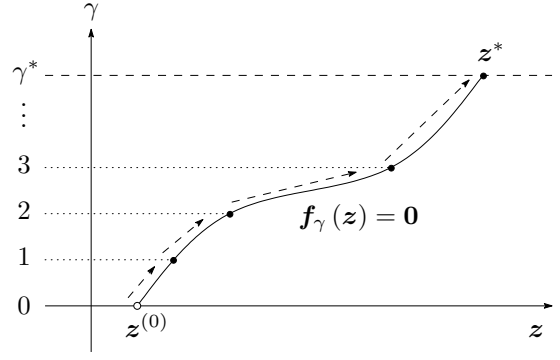


図-1 提案アルゴリズムの収束過程

反復回数を  $t := 0$  とする．また，パラメータの初期値  $\gamma^{(0)}$  および目標値  $\gamma^*$ ，収束判定用定数  $\varepsilon$  を与える．

#### Step2:

ニュートン方程式 (38) を解き， $\Delta z^{(t)}$  を求める．

#### Step3:

解ベクトルを次式により更新する．

$$z^{(t+1)} := z^{(t)} + \Delta z^{(t)} \quad (46)$$

#### Step4:

収束判定を行う．収束していなければ  $t := t+1$  として Step2 に戻り，収束していれば Step5 へ進む．なお，収束判定方法としては，例えば，以下のようなメリット関数を用いる方法が考えられる．

$$\Psi_\gamma(z^{(t+1)}) := \frac{1}{2} \|f_\gamma(z^{(t+1)})\|^2 < \varepsilon \quad (47)$$

#### Step5:

パラメータが  $\gamma^{(t)} < \gamma^*$  であれば， $\gamma^{(t)} < \gamma^{(t+1)} \leq \gamma^*$  の範囲で更新し， $t := t+1$  として Step2 に戻る． $\gamma^{(t)} = \gamma^*$  に到達していれば終了する．

なお，上記のアルゴリズムにより，途中段階の  $\gamma$  ごとの推定リンク交通量や推定 OD 表も得られるため， $\gamma$  を変化させたときの感度分析も同時に行うことができるようになる．このことは，多目的計画問題におけるパレート最適解を逐次的に求めているものと解釈することもできる．

また，本アルゴリズムの留意点として，ヤコビ行列  $\nabla f(z)$  が正則でない場合（非常に稀であるが，非線形連立方程式が一意解を持たない場合など）には，ニュートン方向ベクトルを持たない．この場合には，Levenberg-Marquardt 法や準ニュートン法，共役勾配法などでホトピーパスを追跡するアプローチが考えられる．ただし，そもそも非線形連立方程式の解が存在しないこともあるため，ヤコビ行列  $\nabla f(z)$  が正則でない場合には，入力データや計算過程を分析して解の存在性を判別することも必要になる可能性もある．

(4) アルゴリズムの収束性

ダビデンコ法はホモトピー法の中でも実装が非常に容易なアルゴリズムであるが、ホモトピーパスが不連続もしくはパラメータ  $\gamma$  が  $z$  に対してターニングポイントを持ってしまうと、追跡が難しくなるという欠点がある<sup>12)</sup>。このため、提案したアルゴリズムがエントロピー最大化モデルの解に安定して収束するためには、本稿で定義したホモトピー関数が解析対象範囲内で連続かつ単調であることを証明できれば良い。

まず、ホモトピー関数の連続性について示す。ベクトル値関数  $f$  と同様の式形で、パラメータ  $\gamma$  も変数としたベクトル値関数  $g: \mathbb{R}^{1+|\mathcal{A}|+1} \rightarrow \mathbb{R}^{1+|\mathcal{A}|}$  を考える。

$$g((z^T, \gamma)^T) := f_\gamma(z) \quad (48)$$

この関数を  $z$  および  $\gamma$  で偏微分すると、

$$\frac{\partial g((z^T, \gamma)^T)}{\partial (z^T, \gamma)^T} = \left( \nabla f_\gamma(z) \quad \frac{\partial g((z^T, \gamma)^T)}{\partial \gamma} \right) \quad (49)$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial g_0((z^T, \gamma)^T)}{\partial \gamma} = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial g_a((z^T, \gamma)^T)}{\partial \gamma} = \hat{x}_a \frac{1}{\gamma^2} \Lambda_a^{-\frac{1}{\gamma}} \ln \Lambda_a \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (51)$$

であるため、 $\gamma \neq 0, \Lambda > 0$  の範囲ならば、微分可能なので、連続であることがわかる。

次に、ホモトピー関数のターニングポイントの存在性について示す。(32) 式をリンク  $a$  ごとに  $\gamma$  について解き、それぞれ  $\gamma_a(z)$  と定義すると、

$$\gamma_a(z) = \frac{\ln \Lambda_a}{\ln \hat{x}_a - \ln x_a(z)} \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (52)$$

と表現できる。ただし、

$$x_a(z) = q \sum_{rs \in \Omega} \left\{ p_{rs,a} \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \prod_{a' \in \mathcal{A}} \Lambda_{a'}^{p_{rs,a'}} \right\} \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (53)$$

である。(52) 式を  $z$  で偏微分すると、

$$\frac{\partial \gamma_a(z)}{\partial q} = \frac{\ln \Lambda_a \left( \frac{1}{x_a(z)} \cdot \frac{\partial x_a(z)}{\partial q} \right)}{\{\ln \hat{x}_a - \ln x_a(z)\}^2} \quad (54)$$

$$\frac{\partial \gamma_a(z)}{\partial \Lambda_{\bar{a}}} = \begin{cases} \frac{\ln \Lambda_a \left( \frac{1}{x_a(z)} \cdot \frac{\partial x_a(z)}{\partial \Lambda_{\bar{a}}} \right)}{\{\ln \hat{x}_a - \ln x_a(z)\}^2} & \text{if } a \neq \bar{a}, \forall a \in \mathcal{A}, \forall \bar{a} \in \mathcal{A} \\ \frac{1}{\Lambda_{\bar{a}}} \frac{\{\ln \hat{x}_a - \ln x_a(z)\}}{\{\ln \hat{x}_a - \ln x_a(z)\}^2} + \frac{\ln \Lambda_a \left( \frac{1}{x_a(z)} \cdot \frac{\partial x_a(z)}{\partial \Lambda_{\bar{a}}} \right)}{\{\ln \hat{x}_a - \ln x_a(z)\}^2} & \text{if } a = \bar{a}, \forall a \in \mathcal{A}, \forall \bar{a} \in \mathcal{A} \end{cases} \quad (55)$$

表-1 パラメータ関数  $\gamma_a(z)$  の増減表

	$0 < \Lambda_a < 1$	$1 < \Lambda_a$
$\frac{\partial \gamma_a(z)}{\partial q}$	-	+
$\frac{\partial \gamma_a(z)}{\partial \Lambda_{\bar{a}}}, a \neq \bar{a}$	-	+
$\frac{\partial \gamma_a(z)}{\partial \Lambda_{\bar{a}}}, a = \bar{a}$	-	+
$\gamma_a(z)$	単調減少	単調増加

を得るので、これらの符号を調べることで、パラメータ関数  $\gamma_a(z)$  の増減表を作成する。

所与の先験 OD 交通量  $\hat{q}_{rs}$  や先験総交通量  $\hat{q}$ 、リンク利用率  $p_{rs,a}$  については、符号が正であることと、未知変数  $q, \Lambda_a$  についても符号を正と仮定すれば、(53) 式から  $x_a(z)$  の符号も正となる。(54),(55) 式に含まれている  $x_a(z)$  の偏導関数については、

$$\frac{\partial x_a(z)}{\partial q} = \sum_{rs \in \Omega} \left\{ p_{rs,a} \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \prod_{a' \in \mathcal{A}} \Lambda_{a'}^{p_{rs,a'}} \right\} \quad (56)$$

$$\frac{\partial x_a(z)}{\partial \Lambda_{\bar{a}}} = \begin{cases} q \sum_{rs \in \Omega} \left\{ p_{rs,a} p_{rs,\bar{a}} \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \cdot \Lambda_{\bar{a}}^{p_{rs,\bar{a}}-1} \prod_{a' \in \mathcal{A} \setminus \{\bar{a}\}} \Lambda_{a'}^{p_{rs,a'}} \right\} & \text{if } a \neq \bar{a}, \forall a \in \mathcal{A}, \forall \bar{a} \in \mathcal{A} \\ q \sum_{rs \in \Omega} \left\{ p_{rs,\bar{a}}^2 \left( \frac{\hat{q}_{rs}}{\hat{q}} \right) \cdot \Lambda_{\bar{a}}^{p_{rs,\bar{a}}-1} \prod_{a' \in \mathcal{A} \setminus \{\bar{a}\}} \Lambda_{a'}^{p_{rs,a'}} \right\} & \text{if } a = \bar{a}, \forall a \in \mathcal{A}, \forall \bar{a} \in \mathcal{A} \end{cases} \quad (57)$$

と導出でき、これらも同様の仮定により符号は正となる。また、 $\ln \hat{x}_a - \ln x_a(x)$  については、 $\gamma_a(z) > 0$  を仮定すれば、(52) 式により、

$$\begin{aligned} \Lambda_a > 1 &\rightarrow \ln \hat{x}_a - \ln x_a(x) > 0 \\ \Lambda_a = 1 &\rightarrow \ln \hat{x}_a - \ln x_a(x) = 0 \\ 0 < \Lambda_a < 1 &\rightarrow \ln \hat{x}_a - \ln x_a(x) < 0 \end{aligned}$$

となる。従って、結局、 $\gamma_a(z)$  の偏導関数は、 $\ln \Lambda_a$  の符号にのみ依存することになり、これらを踏まえて  $\gamma_a(z)$  の増減表を整理すると表-1 のようになる。

すなわち、拡張型改良 Willumsen モデルの非線形連立方程式におけるホモトピーパスは、 $\Lambda_a = 1$  でそれぞれターニングポイントを持つことになる。しかし、本稿で提案したアルゴリズムでは、このターニングポイントを初期値として数値解析を実行することになっているので、ニュートン法により解の存在する方向を探ることができれば、まったく問題にはならない。

従って、非線形連立方程式が一意解を持てば、パラ

メータ  $\gamma$  をニュートン法の収束範囲内で適切に更新することにより、提案したアルゴリズムは解に収束する。なお、パラメータ  $\gamma$  の適切な更新方法を明確に示すことは難しいと考えられるが、経験上では、 $\gamma = 1, 2, 3, \dots$  と 1 ずつ増加させていき、改良 Willumsen モデルの解を求める場合には  $\gamma = 10$  程度まで増加させた後に  $\gamma \rightarrow \infty$  とすれば安定して解くことができる。

## 5. おわりに

OD 逆推定におけるエントロピー最大化モデルに対して、高精度な数値解を安定して求める解法アルゴリズムとして、ホモトピー法の適用を提案した。

一般的なホモトピー法では、自明解を持つ補助方程式やホモトピー関数として問題に合わせて有効なものを選定しなければならないが、エントロピー最大化モデルにおいては、観測交通量の誤差を考慮したモデルがそのまま活用可能である。具体的には、観測交通量の情報を反映するパラメータが  $\gamma \rightarrow 0$  のときに自明解を持つ補助方程式となり、このモデルの非線形連立方程式の写像自体がホモトピー関数として活用可能である。そして、ホモトピーパスを辿ることで解への収束が保証され、さらに、解の近傍付近ではニュートン法の 2 次収束性が機能するため、安定して高精度な解を求めることができる。このため、提案手法はエントロピー最大化モデルに対して、非常に有効であると考えられる。また、パラメータを変化させながら連立 1 次方程式を繰り返し解いていくだけなので、プログラム実装に関しても比較的容易であると考えられる。

提案した解法アルゴリズムは、静的な OD 表の逆推定だけでなく時間帯別 OD 表の逆推定<sup>5),6),7)</sup>にも同様に適用可能であり、また、Willumsen モデルや改良 Willumsen モデルといったリンク交通量を用いて OD 表を逆推定するモデル以外にも、様々な観測データに整合した OD 表を求めるようなモデルや、さらには、OD 逆推定以外のエントロピー最大化問題に対する有効な解法になり得る可能性もある。

## 付録 I ホモトピー法概説

非線形連立方程式

$$f(x) = 0 \quad (I.1)$$

の解  $x^*$  を求める問題を考える。ただし、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は連続微分可能な写像、 $x \in \mathbb{R}^n$  は  $n$  次元変数ベクトル、 $0$  は  $n$  次元ゼロベクトルとする。さらに、自明解  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  が存在する補助方程式

$$g(x) = 0 \quad (I.2)$$

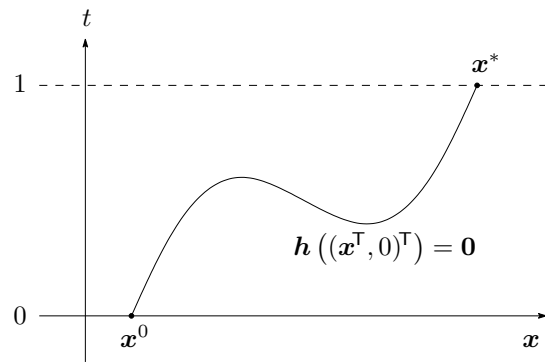


図-2 解曲線 (ホモトピーパス)

を考える。ただし、 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  も連続微分可能な写像である。ホモトピー法は、この補助方程式 (I.2) を解くべき連立方程式 (I.1) まで連続的に変形し、 $x^0$  を初期値として、変形された連立方程式の解を追跡することで、最終的に連立方程式 (I.1) の解に到達させる方法である。例えば、これらの関数に対して、パラメータ  $t$  を導入し、写像  $h: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  を、

$$h((x^T, t)^T) = tf(x) + (1-t)g(x) \quad (I.3)$$

と定義すると、このとき、関数  $h((x^T, t)^T)$  は、

$$h((x^T, 0)^T) = g(x) \quad (I.4)$$

$$h((x^T, 1)^T) = f(x) \quad (I.5)$$

を満たしており、 $t$  を 0 から 1 に連続的に増やしていくと、 $h((x^T, t)^T)$  は  $g(x)$  から  $f(x)$  まで連続的に変化する。式 (I.4), (I.5) を満たすような写像  $h$  を  $g$  と  $f$  の間のホモトピー (ホモトピー関数) と呼ぶ。

ここで、 $((x^T, t)^T)$  を変数とする連立方程式

$$h((x^T, t)^T) = 0 \quad (I.6)$$

を考えると、この連立方程式は  $t = 0$  のとき (I.2) 式、 $t = 1$  のとき (I.1) 式となり、自明解を持つ補助方程式から解くべき連立方程式へと連続的につながる連立方程式の集合となり、その解集合  $\{((x^T, t)^T) | h((x^T, t)^T) = 0\}$  を解曲線またはホモトピーパスと呼ぶ。このようなホモトピーパスをなんらかの方法で追跡することで最終的な解  $x^*$  を求めることが、ホモトピー法の基本的な考え方である。

ホモトピー法は、VLSI (超大規模集積回路網) の設計問題などの非線形回路解析、あるいは、混合溶液の多相平衡解析といった分野に適用され、いくつかの応用分野に対しては大域的収束性が理論的にも保証されている。また、一般の非線形方程式に対しても高い有効性を持つことが知られている。しかし、ホモトピー法による求解が成功するか否かは、自明解を持つ補助方程式およびホモトピー関数として有効なものを選定することと、ホモトピーパスを適切に追跡することが重要となる。



## 参考文献

- 1) 土木学会(編): 交通ネットワークの均衡分析 - 最新の理論と解法 - , 丸善, 1998.
- 2) 飯田恭敬: ICT データ活用による交通計画の新次元展開 - 総合交通ネットワーク流動のモニタリングシステム - , コロナ社, 2017.
- 3) H. J. Van Zuylen and L. G. Willumsen: The Most Likely Trip Matrix Estimated from Traffic Counts , *Transportation Research Part B: Methodological* , Vol.14 , No.3 , pp.281-293 , 1980.
- 4) D. Van Vliet and L. G. Willumsen: Validation of The ME2 Model for Estimating Trip Matrices from Traffic Counts , *Proceedings of the 8th International Symposium on Transportation and Traffic Theory* , pp.640-655 , 1981.
- 5) L. G. Willumsen: Estimating Time-dependent Trip Matrices from Traffic Counts , *Proceedings of the 9th International Symposium on Transportation and Traffic Theory* , pp.397-411 , 1984.
- 6) 小根山裕之, 桑原雅夫: 路側観測交通量からの時間変化する OD 交通量の推定, *交通工学* , Vol.32 , No.2 , pp.5-16 , 1997.
- 7) 三輪富生, 山本俊行, 竹下知範, 森川高行: プロープカーの速度情報を用いた動的 OD 交通量の推定可能性に関する研究, *土木学会論文集 D* , Vol.64 , No.2 , pp.252-265 , 2008.
- 8) 飯田恭敬, 高山純一, 小林光二: リンク観測交通量を用いたエントロピー最大化による道路網交通需要推計法, *土木計画学研究・講演集* , No.9 , pp.441-448 , 1986.
- 9) 高山純一: リンクフロー観測値に基づいた道路網交通需要分析モデルに関する方法論的研究, *京都大学学位論文* , 1988.
- 10) 伊理正夫: 数値計算 - 方程式の解法, 朝倉書店, 1981.
- 11) 小島政和: 相補性と不動点 - アルゴリズムによるアプローチ - , 産業図書, 1981.
- 12) 大石進一: 精度保証付き数値計算, コロナ社, 2000.
- 13) 山村清隆: 非線形現象の解析手法〔V〕 - 非線形方程式の数値解法 - , *電子情報通信学会誌* , Vol.79 , No.7 , pp.740-745 , 1996.

## AN ALGORITHM VIA HOMOTOPY METHOD FOR SOLVING ENTROPY MAXIMIZATION MODEL IN OD MATRIX ESTIMATION PROBLEM

Wataru MOGI

The models based on entropy maximization has been developed as a method of estimate OD matrix from observed traffic flows. However, in order to estimate OD matrix by applying these models, we have to solve the nonlinear programming problems or the nonlinear equations which are the optimum conditions for them.

In this paper, I propose a stable solution algorithm for obtaining the high-precision approximate solution, by tracing the homotopy path effectively utilizing the structure of the entropy maximization model, by using homotopy method that known as an effective method for solving the nonlinear equations.