

# 渋滞パターンの縮約に基づく一般構造ネットワークの交通性能近似手法の考察

佐津川 功季<sup>1</sup>・和田 健太郎<sup>2</sup>・大口 敬<sup>3</sup>

<sup>1</sup>学生会員 東京大学大学院 工学系研究科 博士後期課程 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: kouki@iis.u-tokyo.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 東京大学助教 生産技術研究所 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp

<sup>3</sup>フェロー会員 東京大学教授 生産技術研究所 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: takog@iis.u-tokyo.ac.jp

本稿では、一般的な構造を持つ交通ネットワークを対象に、渋滞パターンを与件としたトリップ完了流率の近似解析手法について考察を行う。この手法の基本的なアイデアは、渋滞パターンの構造を、動的利用者均衡モデルによる理論解析が可能な unidirectional 構造 (Iryo and Smith<sup>1)</sup>) へと近似変換することである。具体的には、有向・無向のループ構造に含まれる起点を一つのノードに集約することにより、有向の多重木構造 (polytree) と単一起点構造が組み合わさった構造へと変換する。そして、変換後の渋滞パターンに基づき定式化された、動的利用者均衡モデルの逆問題を解くことで、トリップ完了流率の解析式を近似的に導出する。

**Key Words:** trip completion rate, dynamic user equilibrium, unidirectional network, congestion pattern

## 1. はじめに

都市レベルの複雑な道路ネットワークの運用・管理を可能とするために、Daganzo<sup>2)</sup> はネットワーク上の交通状態/性能を集計的に捉える Macroscopic Fundamental Diagram (MFD) を提案した。MFD は、混雑がネットワーク内で一様に分布しているならば、ネットワーク上の車両存在台数が混雑状態を把握するための代表的な集計量となる、といった考え方にに基づき、存在台数をネットワーク性能であるトリップ完了流率の説明変数として用いるアプローチであり、これらの関数関係である。こうした MFD について、Geroliminis and Daganzo<sup>3)</sup> は、横浜エリアにおける実証分析から、ばらつきの小さい well-defined MFD の存在を確認している。また、Geroliminis and Sun<sup>4)</sup> は、横浜エリアのデータを用いて、同一のエリア存在台数に対して異なる日時で実現するリンク密度分布が (統計的に) 同一であれば、エリア内の混雑が一様でなくとも、well-defined MFD が成立することを示した。これは、ネットワーク上の空間的な混雑分布である渋滞パターンに再現性があれば、存在台数が依然代表的な集計量となり、ネットワーク性能の解析・制御に用いることができることを示している。

ただし、実際のネットワークでは、当然ながら混雑が一様に分布しているとは限らず、また交通制御を導入したときに渋滞パターンに再現性があるとも限らない。

こうした事実は、ネットワーク性能の解析・制御を行うにあたり、混雑の分布と関連付けられた説明変数を導入する必要があることを示している。これに対し既存手法の多くは、ネットワーク上の混雑の偏りを集計的に表す「リンク交通密度分布の分散」に着目している。Mazlounian et al.<sup>5)</sup>, Daganzo et al.<sup>6)</sup> では、分散の増加とともに同一存在台数下の平均空間交通量が低下することを、それぞれシミュレーション、理論分析により明らかにしている。また、Ramezani et al.<sup>7)</sup> は、分散がトリップ完了流率に与える影響を定式化するとともに、この定式化に基づき混雑の一様化を図りながらトリップ完了流率を改善する流入制御手法を提案している。

一方、こうした集計量を用いるアプローチに対して、和田・佐津川<sup>8)</sup> は渋滞パターンをそのまま説明変数とするアプローチを提案した。この手法では、リンクの接続関係、及び交通状態 (渋滞・非渋滞のパターン) から、ボトルネックとなるリンク同士の接続関係を表す縮約ネットワークを構築する。そして、この構造・容量パターンを与件とした動的利用者均衡 (Dynamic User Equilibrium: DUE) 配分問題の逆問題を構築し、これを解くことで、経路選択原理と整合的な流れうる OD 交通需要 (トリップ完了流率) の解析式を導出している。さらに Wada et al.<sup>9)</sup> では、解析式の感度 (あるボトルネック容量の変化がトリップ完了流率に及ぼす影響) 分析を通して、ネットワーク性能を改善しうる自律分散型の合流制御ロジックを構築した。ただしこのアプロ

チは、理論的な頑健さを担保するにあたり、全車両が同一起点から出発する単一起点ネットワークを対象としている。

集計的な変数、または渋滞パターンを説明変数としたアプローチには、それぞれ一長一短が存在する。前者は、どのようなネットワーク構造であっても、その集計量とネットワーク性能の関数関係を構築することが可能である。しかし、空間的な要素 (e.g., ネットワーク構造) を捨象しているため、ネットワーク制御の具体的なロジック (e.g., どのリンクをどのように制御することで混雑の改善を図るのか) を構築することは難しい。一方で後者は対象とするネットワーク構造が限定されているという欠点を持つ。しかし、この手法はボトルネックの空間的な配置・容量とトリップ完了流率を直接関係づけているため、ある局所的なボトルネック容量の変化がトリップ完了流率に及ぼす影響を、解析的に明らかにすることができる。これを踏まえると、ネットワーク性能を改善する具体的なボトルネック制御ロジックを構築するためには、後者の考え方をより発展させるのが有効であると考えられる。

本稿では、単一起点を対象として構築された渋滞パターンを与件とするネットワーク性能の解析手法を、多起点多終点の一般構造における解析へと拡張する。第一に、既存のトリップ完了流率の解析手法を、多起点多終点の特殊な構造である“unidirectional network”における解析へと拡張する。Unidirectional network とは、有向・無向のループが存在しない“polytree”構造を基本とする構造を持つ、DUE の時間分解法を適用できるネットワークである。本稿ではこのネットワークにおける DUE 状態の定式化を行い、渋滞パターンを与件とした均衡解の関係式を解析的に導出する。そして、既存手法と同様に DUE 配分問題の逆問題を解くことで、渋滞パターンとトリップ完了流率を解析的に関係づける。

本稿では第二に、一般構造ネットワークのトリップ完了流率を解析するために、ネットワーク構造を unidirectional network 構造へと近似変換する手法を構築する。具体的には、有向・無向のループに含まれる複数の起点を一つの仮想的な起点へと集約することで、単一起点構造へとループ構造を変換する；この変換を全てのループ構造に適用することにより、ネットワークを単一起点構造が組み合わさった polytree 構造へと変換する。そして、変換後のネットワークに対して前述した解析式を適用することで、一般構造ネットワークにおけるトリップ完了流率を近似解析する。

本稿の構成は次の通りである。まず、続く 2. では、unidirectional network における時刻別分解された DUE の定式化を行う。そのうえで、渋滞パターンを与件とした DUE の均衡解の導出方法について説明する。3. で

は、導出した DUE の均衡解から、定常状態におけるトリップ完了流率を解析的に導出する。4. では、一般的な構造を持つネットワークを、unidirectional 構造へと近似変換する手法について説明する。最後に 5. では、本稿のまとめと今後の課題を述べる。

## 2. 動的利用者均衡の定式化と解析解

本章では、Iryo and Smith<sup>1)</sup>で提案された「unidirectional network」におけるトリップ完了流率を解析的に導出するための準備として、同構造のネットワークにおける DUE 均衡解を解析的に導出する。まず、本稿で用いる変数について定義を行う。次に、DUE 状態の「時間分解法」と、解析対象となる unidirectional network、及びそれらの関係性を説明する。続いて、unidirectional network における時間分解法に基づく DUE 状態の定式化を行う。そして、渋滞パターンを与件とした DUE 均衡解の解析的な導出手法について説明する。

### (1) 解析の前提条件

本稿では、多起点多終点の一般的な (i.e., 任意のリンク・ノード接続構造を持つ) ネットワークを対象とする。ネットワークは、ノード集合  $\mathcal{N}$ 、リンク集合  $\mathcal{L}$ 、起終点集合  $\mathcal{W}$  で表現されており、各々の集合の要素を、それぞれ  $i \in \mathcal{N}, ij \in \mathcal{L}, od \in \mathcal{W}$  とする。また、起点、通過、終点ノードの各集合を、それぞれ  $\mathcal{N}_o, \mathcal{N}_i, \mathcal{N}_d$  と定義する。

ネットワークの構造は、ノード・リンク接続行列  $\mathbf{A}^*$  ( $\mathcal{N} \times \mathcal{L}$  行列) で表される。なお本稿では、ノード・リンク接続行列について様々な操作 (e.g., 行の削除・抽出、要素の変換) を行う。これらの操作、及び操作により構築されるノード・リンク接続行列は、次のように定義される：行列  $\mathbf{A}^*$  から、全ての起点に対応する行を除いたものを  $\mathbf{A}$  と表す。また、行列  $\mathbf{A}^*$  について、起点、通過、終点に対応する行を抽出したものを、それぞれ  $\mathbf{A}_o, \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_d$  と表す。さらに、ある行列  $\mathbf{A}$  における +1 の要素を 0 にした行列を  $\mathbf{A}_-$ 、-1 の要素を 0 にした行列を  $\mathbf{A}_+$  とおく。

各 OD ペア間の交通需要は外生的に与えられる。より具体的には、時刻  $t$  までに起点  $o$  を出発し終点を  $d$  とする累積 OD 交通量を  $Q_{od}(t)$  と表す。各リンクは First-In-First-Out (FIFO) 原理を採用し、交通状態は Point Queue (PQ) モデルで表現されるとする。具体的には、各リンク  $(i, j)$  は自由走行リンクと待ち行列リンクで構成されているとし、自由走行リンクの旅行時間は定数  $m_{ij}$ 、待ち行列リンクのボトルネック容量は  $\mu_{ij}$  とする。このと

き、時刻  $t$  にリンク  $(i, j)$  に流入した車両の旅行時間は、

$$c_{ij}(t) = m_{ij} + x_{ij}(t + m_{ij}) / \mu_{ij} \quad (1)$$

$$\text{where } x_{ij}(t) = A_{ij}(t - m_{ij}) - D_{ij}(t).$$

ここで、 $x_{ij}(t)$  は時刻  $t$  のリンク下流端での待ち行列台数、 $A_{ij}(t), D_{ij}(t)$  は各々時刻  $t$  までにリンク  $(i, j)$  を流入、流出した累積交通量を表している。なお、 $A_{ij}(t), D_{ij}(t)$  が時間微分可能であれば、時刻  $t$  におけるリンク  $(i, j)$  の流入、流出交通流率  $\lambda_{ij}(t), g_{ij}(t)$  は下記のように書くことができる：

$$\lambda_{ij}(t) \equiv dA_{ij}(t)/dt, \quad g_{ij}(t) \equiv dD_{ij}(t)/dt. \quad (2)$$

## (2) 時間分解法と unidirectional network

### a) DUE の定義と時間分解法

DUE は静的な利用者均衡を動的な場合に自然に拡張した解の概念であり、DUE 状態は以下のように定義される：任意の時刻において、どの利用者も自分だけが経路を変更することによって自分の所要時間を改善できないような状態。すなわち、全ての瞬間において、全ての利用者が選択した経路が“事後的”に見ても各人の最短経路となっているような交通流パターンである。

DUE 状態を表現する手法の一つとして、動的均衡配分問題を起点出発時刻別に分解して定式化する「時間分解法<sup>10),11)</sup>」が提案されている。時間分解法では、DUE 状態における次の性質を利用する：(1) 同時刻に同一起点を出発した車両の任意のノードへの到着時刻は経路によらず等しい、(2) ある起点における車両の出発順序は終点に到着するまでのあらゆるノードへの到着時に維持されている。すなわち、起点出発時刻毎に、各ノードへの一意的な均衡到着時刻を定義することができる<sup>1</sup>。この性質とリンクモデルの性質を組み合わせると、時刻  $s$  に起点を出発する車両が経験する旅行時間は、同一起点を時刻  $s$  以降に出発する車両の影響を受けないことがわかる。そのため、ネットワークが単一起点構造を持つならば、DUE 状態は唯一の起点からの出発時刻別に分解することができる：出発時刻に関して「前向き」に逐次計算していくことが可能となる<sup>2</sup>。

時間分解法の重要な特性は、絶対時刻  $t$  における各ボトルネックの交通状態を定式化する通常の DUE 配分とは異なり、経路旅行時間とリンク旅行時間に関する複雑なネスト構造を取り扱う必要がないことである（詳細な議論は<sup>12),13)</sup>を参考）。結果的に、時間分解法における DUE の定式化では、時刻  $s$  に単一起点を出発する車両のフロー・パターンは、静的な交通配分の定式化とほぼ同形式の表現に帰着する。この特性は、DUE の均

衡解の特性を数理的に把握するにあたり有益なものであり、これまで単一起点・単一終点の構造を持つネットワークにおける均衡解の特性解析<sup>14),13)</sup>や効率的な解法<sup>15),16),17),18)</sup>を得るために用いられてきた。また、和田・佐津川<sup>8)</sup>、Wada et al.<sup>9)</sup>は、時刻別分解された DUE の逆問題から、渋滞パターンを与件としたトリップ完了流率の解析モデルを構築している。

### b) Unidirectional network

時間分解法を適用できる多起点多終点構造のネットワークとして、Iryo and Smith<sup>1)</sup>は、「unidirectional network (以降 UN と表記)」と呼ばれるネットワークを提案した。UN は、ある起点  $o$  を基準点として定めるとき、基準点からの出発時刻（基準時刻）に対応する、各ノードへの起終点によらない均衡到着時刻である「ノード・ポテンシャル」を一意的に定めることができるネットワークである。UN は次のように定義される<sup>3</sup>：

**定義 1. (Unidirectional network)** ある起点  $o$  を時刻  $s$  に出発した車両の、終点  $d \in \forall N_d$  への最短経路上のノード集合を  $N^*(o, s, d)$  とし、この和集合を  $N^*(o, s) (\equiv N^*(o, s, d) \cup \dots \cup N^*(o, s, d_{|N_d|}))$  とする。また、この車両の最短経路上のノード  $i \in N^*(o, s)$  への最短到着時刻を  $u_i^*(o, s)$  と定義する。さらに、他の全ての起点からの出発時刻についての組み合わせを、 $S(o, s) = (s_1, \dots, s_{|N_o|}) \in \mathbb{R}^{|N_o|-1}$  と定義する。このとき、次の条件を満たすような、出発時刻の組  $S(o, s)$  が存在する場合、このネットワークは unidirectional network である：ある起点  $\forall o_m, o_n \in N_o$  とその出発時刻  $\forall s_m, s_n$  について、

$$u_i^*(o_m, s_m) = u_i^*(o_n, s_n) \quad (3)$$

$$\forall i \in N^*(o_m, s_m) \cap N^*(o_n, s_n) \quad (4)$$

が成立する。

この定義における、各ノード  $i$  への起終点によらない均衡到着時刻  $u_i^*(o_m, s_m) = u_i^*(o_n, s_n)$  が、ノード・ポテンシャル  $p_i(s)$  である<sup>4</sup>。この定義は、UN においてあるノードを同時刻に通る二つ以上の車両が存在するとき、それらは起終点に関わらず、最短経路上の他のノードにおいても同時刻で到着し、そのときの車両の出発時刻は  $S(o, s)$  の各出発時刻と対応することを示している。これは、あるリンク  $l$  が、起点  $o$  を時刻  $s$  に出発する車両にとっての最短経路上のリンクであるとき、このリンクが時刻  $s_m$  に他の起点  $o_m$  を出発する車両にとっての最短経路でもあることを示している。

なお、この定義は UN の構造上の特性については言及していないが、Iryo and Smith は、「polytree」構造を基本構造にもつネットワークは UN であることを示して

<sup>1</sup> この性質はネットワークが多起点多終点の一般構造であっても成立する。

<sup>2</sup> 同様の議論により、単一終点ネットワークでは、終点到着時刻に関して問題の分解が可能である。

<sup>3</sup> この定義は、原著論文<sup>1)</sup>のものを修正したものである。

<sup>4</sup>  $o$  以外の起点ノードにおけるポテンシャルは、定義中の上記の出発時刻と対応する。

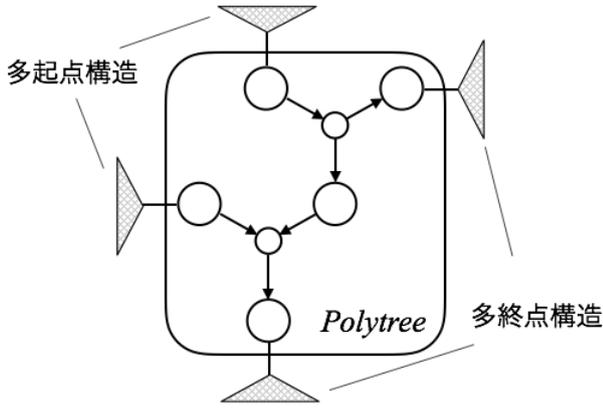


図-1 UN 構造例：polytree 構造を基本構造に持つネットワーク

いる。Polytree とは、有向非巡回グラフの特殊なパターンであり、仮に全ての有向なリンクを無向リンクに変換しても、閉路（ループ）を持たないようなネットワークである。そして、こうした polytree 構造に多起点構造、または多終点構造を接続したものは UN であることがわかっている（図-1）。

UN におけるノード・ポテンシャルの重要な特性が、次に示す基準時刻に対する単調性である（Iryo and Smith, Theorem 2）：

$$s < s' \Leftrightarrow p_i(s) < p_i(s'). \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (5)$$

これは、より遅い基準時刻に対応する出発時刻を持つ車両は、より早い基準時刻に対応する出発時刻を持つ車両に対して、各ノードにより遅く到着することを意味している。これらの性質とリンクモデルの性質を組み合わせると、前節の議論と同様に、UN ではある基準時刻に対応する出発時刻の車両は、より遅い基準時刻に対応する出発時刻の車両の影響を受けないことがわかる。すなわち、UN における DUE 状態は、基準時刻に関して時刻別分解することができることがわかる：基準時刻に関して前向きに逐次計算することが可能。これは UN においても、単一起点ネットワークと同様の解析を行うことができることを示唆している。

### (3) 時刻別分解された DUE の定式化

前節の議論を踏まえ、本節では UN における DUE 状態を、ある起点  $o_{REF}$  において定められた基準時刻  $s$  別に分解して定式化する。基準時刻別の DUE では、次の二つの変数が中心的な役割を果たす。一つは、基準時刻  $s$  に対応する、ノード  $i$  のノード・ポテンシャル  $p_i(s)$  である<sup>5</sup>。もう一つは、基準時刻  $s$  に関するリンク  $ij$  の流入交通流率  $y_{ij}(s)$  である。先に定義した絶対時刻  $t$  における累積流入台数  $A_{ij}(t)$ 、及び流入交通流率  $\lambda_{ij}(t)$  と

<sup>5</sup> なお、 $p_{o_{REF}}(s) \equiv s$  である。

は次の関係が成立する：

$$y_{ij}(s) \equiv dA_{ij}(p_i(s))/ds \quad (6)$$

$$= \lambda_{ij}(p_i(s)) \dot{p}_i(s). \quad (7)$$

ここで、 $\dot{p}_i(s) \equiv dp_i(s)/ds$  である。これは、基準時刻の変化に対するノード  $i$  への到着時刻の伸び率を表している。

これらの変数を用いると、基準時刻別の DUE の定式化は、以下のようにまとめられる：

#### a) リンク旅行時間

基準時刻  $s$  に関するリンク  $ij$  の旅行時間  $c_{ij}(s)$  は、次のように表される：

$$c_{ij}(s) = \int_0^s \dot{c}_{ij}(s) ds + c_{ij}(0) \quad \forall s, \quad (8)$$

$$\text{where } \dot{c}_{ij}(s) = \begin{cases} \frac{y_{ij}(s)}{\mu_{ij}} - \dot{p}_i(s) & \text{if } x_{ij}(p_i(s) + m_{ij}) > 0 \\ 0 & \text{if } x_{ij}(p_i(s) + m_{ij}) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 $\dot{c}_{ij}(s) \equiv dc_{ij}(\tau_i(s))/ds$  である。なお UN では、ある基準時刻に対応する出発時刻を持つ車両であれば、各リンクの旅行時間はその車両の起点・終点により変化することはない。これは、UN ではあるリンク  $ij$  に対して、各車両は起終点に関わらず基準時刻  $s$  におけるノード・ポテンシャル  $p_i(s)$  で到着するためである、i.e., 起終点に関わらずリンクへの流入時刻は同一となる。

#### b) 最短経路選択条件

DUE 状態では、各車両は事後的にみても所要時間が最短となる経路のみを選択する。あるリンク  $ij$  についてのこの条件は、ノード・ポテンシャルを利用することにより、次のように表される：

$$\begin{cases} y_{ij}(s) \{c_{ij}(s) + p_i(s) - p_j(s)\} = 0 \\ c_{ij}(s) + p_i(s) - p_j(s) \geq 0, y_{ij}(s) \geq 0 \end{cases} \quad \forall ij \in \mathcal{L}, \forall s. \quad (10)$$

なお、前節の UN の定義についての説明、及びリンク旅行時間における議論からわかるように、UN ではあるリンクが最短経路上に位置するとき、そのリンクは（そのリンクを利用して到着できる）全ての終点にとっての最短経路である。そのため、起終点別に分解した最短経路選択条件の定式化は必要ない。

#### c) FIFO 条件式とフロー保存則

FIFO が成立している（i.e., リンク内での追い越しがない）とき、各リンクにおいて、入口への車両の到着順序と出口での退去順序は同じである。すなわち、フローが流れているリンクにおいて、

$$A_{ij}^o(t) = D_{ij}^o(t + c_{ij}(t)), \quad (11)$$

が成立する。なお、 $A_{ij}^o(t), D_{ij}^o(t)$  はそれぞれ起点を  $o$  とする車両のリンク  $ij$  における累積流入・流出交通量であ

る。特に、 $t = p_i(s)$  とすると、UN 上のフローが流れているリンクでは、DUE 状態において  $c_{ij}(s) + p_i(s) = p_j(s)$  が成立しているため、

$$A_{ij}^o(p_i(s)) = D_{ij}^o(p_i(s) + c_{ij}(p_i(s))) = D_{ij}^o(p_j(s)) \quad (12)$$

となる。

次に、あるノード  $i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_o$  におけるフロー保存則<sup>6</sup>は、起点別にフローを分解することで次のように定式化することができる：

$$\sum_k D_{ki}^o(t) - \sum_l A_{il}^o(t) - Q_{oi}(t - C_{oi}^*(t)) = 0. \quad (13)$$

$C_{oi}^*(t)$  は、起点  $o$  を出発し、時刻  $t$  にノード  $i$  に到着する車両が経験する均衡経路旅行時間である。

ここで  $t = p_i(s)$  とすることにより、基準時刻  $s$  に対応する時刻に出発した車両が満たすべきフロー保存則を考える。このとき均衡経路旅行時間について、 $p_i(s) - C_{oi}^*(p_i(s)) = p_o(s)$  である。この関係式と (12) を (13) に代入し、全ての起点について足し合わせることで、

$$\begin{aligned} \sum_o \left[ \sum_k D_{ki}^o(p_i(s)) - \sum_l A_{il}^o(p_i(s)) - Q_{ok}(p_o(s)) \right] &= 0, \\ \Rightarrow \sum_k A_{ki}(p_k(s)) - \sum_l A_{il}(p_i(s)) - \sum_o Q_{ok}(p_o(s)) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

が成立することがわかる。そしてこれを  $s$  で微分することで、各リンクでの FIFO 条件式と各ノードでのフロー保存則は、以下のような  $y_{ij}(s)$  を利用した表現に帰着することとなる：

$$\sum_k y_{ki}(s) - \sum_l y_{il}(s) - \dot{Q}_{ok}(p_o(s)) \dot{p}_o(s) = 0, \quad (15)$$

$$\text{where } \dot{Q}_{ok}(p_o(s)) \equiv dQ_{ok}(p_o(s))/dp_o(s). \quad (16)$$

結果として、これらの条件を全てのノード・リンクについてとり、行列・ベクトル表示することによって、UN における基準時刻別分解された DUE 状態は、次のように相補性形式で表される：

$$\mathbf{m} \leq \mathbf{c}(s) \perp (\dot{\mathbf{c}}(s) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}(s) + \mathbf{A}_+^{*T}\dot{\mathbf{p}}^*(s)) \geq \mathbf{0} \quad (17)$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{y}(s) \perp (\mathbf{c}(s) + \mathbf{A}^{*T}\dot{\mathbf{p}}^*(s)) \geq \mathbf{0} \quad (18)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{y}(s) = -\dot{\mathbf{Q}}(s)\dot{\mathbf{p}}_o(s) \quad (19)$$

ここで、 $\mathbf{M}$  はリンク容量  $\mu_{ij}$  を対角要素とする  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$  対角行列、 $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{c}(s)$ , そして  $\mathbf{y}(s)$  は、それぞれ  $m_{ij}$ ,  $c_{ij}(s)$ ,  $y_{ij}(s)$  を要素とする  $\mathcal{L}$  次元ベクトルである。また、 $\dot{\mathbf{p}}^*(s)$  は、それぞれ  $p_i(s)$ ,  $\dot{p}_i(s)$  を要素とする  $\mathcal{N}$  次元ベクトルであり、 $\dot{\mathbf{p}}_o(s)$  は  $\dot{\mathbf{p}}^*(s)$  の起点に関する行について抽出した  $\mathcal{N}_o$  次元のベクトルである。 $\dot{\mathbf{Q}}(s)$  は、 $i$  行  $j$  列に  $\dot{Q}_{ji}(p_j(s))$  を要素としてもつ  $\{\mathcal{N} - \mathcal{N}_o\} \times \mathcal{N}_o$  の行列である。

<sup>6</sup> 起点におけるフロー保存則は冗長なのでここでは除く。

#### (4) 渋滞パターンを与件とした DUE の均衡解

前節で示された時刻別 DUE は相補性問題/変分不等式問題として表現されており、一般的に解析解を求めることはできない。しかし、ネットワーク上の全てのリンクでフローの流入があり (i.e.,  $y_{ij}(s) > 0$ )、かつ、全てのリンクで渋滞している (i.e.,  $x_{ij}(p_i(s)) > 0$ )、**“飽和ネットワーク”**では、時刻別の DUE 問題が連立線形システム方程式に帰着するため、均衡解を解析的に求めることが可能である<sup>19),14),20)</sup>。

具体的には、相補性条件として表現されていたリンク旅行時間関数 (17)、及び最短経路選択条件 (18) は、次の等式条件に帰着する：

$$\dot{\mathbf{c}}(s) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}(s) + \mathbf{A}_+^{*T}\dot{\mathbf{p}}^*(s) = \mathbf{0}, \quad (20)$$

$$\mathbf{c}(s) + \mathbf{A}^{*T}\dot{\mathbf{p}}^*(s) = \mathbf{0}. \quad (21)$$

ここで、(21) を  $s$  について微分し、(20) と連立させることにより、

$$\mathbf{y}(s) = -(\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T\dot{\mathbf{p}}_o(s) + \mathbf{M}\mathbf{A}^T\dot{\mathbf{p}}(s)). \quad (22)$$

なお、 $\dot{\mathbf{p}}(s)$  は  $\dot{\mathbf{p}}^*(s)$  から起点に関する要素を削除した  $\mathcal{N} - \mathcal{N}_o$  次元のベクトルである。よって、この式 (22) をフロー保存則 (19) に代入することにより、UN における DUE の均衡解に関する次の関係式を得る：

$$\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}_-^T\dot{\mathbf{p}}_o(s) + \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^T\dot{\mathbf{p}}(s) = \dot{\mathbf{Q}}(s)\dot{\mathbf{p}}_o(s). \quad (23)$$

なお、ノード・リンク接続行列  $\mathbf{A}^*$  を用いて、起点ノードにおけるフロー保存則を明示的に取り扱うことにより、この式は次のようにも表される：

$$\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A}_-^{*T}\dot{\mathbf{p}}^*(s) = \dot{\mathbf{Q}}^*(s)\dot{\mathbf{p}}_o(s). \quad (24)$$

なお、

$$[\mathbf{Q}^*(s; o)]_{ij} \equiv \begin{cases} -\sum_{d \in \mathcal{N}_d} Q_{id}(p_i(s)) & \text{if } i \in \mathcal{N}_o \cap i = j \\ 0 & \text{if } i \in \mathcal{N}_o \cap i \neq j. \\ Q_{ji}(p_j(s)) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (25)$$

またこの方法論は、非渋滞リンクを含むネットワークに対しても拡張が可能である：非渋滞リンクを含むネットワークに対しても適切にネットワークを縮約することにより、“縮約ネットワーク<sup>21),9)</sup>” と呼ばれる飽和ネットワークを構築することができる (証明は付録 I)。縮約ネットワークは、ネットワーク上の渋滞パターンが与えられたとき、非渋滞リンクの始点と終点ノードを 1 つのノードとして集約する (i.e., 非渋滞リンクを取り除く) ことにより構築される<sup>7</sup>。また、フローの流入のないリンク (i.e.,  $y_{ij}(s) = 0$ ) がある場合は、そのリンクを削除する。よって、構築された縮約ネットワークに対して本節の議論を適用することにより、非飽和

<sup>7</sup> なお、ネットワーク上の全てのリンクが渋滞している場合、縮約ネットワークの構造はオリジナルのネットワーク構造と一致する。

ネットワークにおいても DUE 均衡解に関する同様の関係式を得ることができる：

$$\mathbf{A}_R \mathbf{M}_R \mathbf{A}_{R,o}^T \dot{\mathbf{p}}_{R,o}(s) + \mathbf{A}_R \mathbf{M}_R \mathbf{A}_R^T \dot{\mathbf{p}}_R(s) = \dot{\mathbf{Q}}_R(s) \dot{\mathbf{p}}_{R,o}(s) \quad (26)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A}_R^* \mathbf{M}_R \mathbf{A}_{R,o}^{*T} \dot{\mathbf{p}}_R^*(s) = \dot{\mathbf{Q}}_R^*(s) \dot{\mathbf{p}}_{R,o}(s) \quad (27)$$

ここで、下付き添字  $R$  は、縮約ネットワーク上で定義された変数であることを意味する。

### 3. Unidirectional network におけるトリップ完了流率

本章では、和田・佐津川<sup>8)</sup>によって構築された、単一終点ネットワークにおける渋滞パターンを与件としたネットワーク交通性能 (i.e., トリップ完了流率) 解析手法を、UN へと拡張する。以下では、まず、DUE を記述する状態量と巨視的な状態変数の関係性を整理する。次に、UN での定常状態におけるトリップ完了流率を解析的に導出する。そして、和田・佐津川<sup>8)</sup>で導出された、単一起点ネットワークにおける解析式との関係を考察する。

なお本章では、飽和ネットワーク・非飽和ネットワークの両方を解析の対象とする。そのため、前章の議論を踏まえ、本章で用いる各行列・ベクトル変数は全て縮約ネットワーク上で定義されたものであるとする。

#### (1) 巨視的な状態変数の表現

トリップ完了流率の解析の準備のため、巨視的な状態変数を DUE の記述に使われた変数を用いて表す：

$$A_{od}(t) = Q_{od}(t), \quad (28)$$

$$D_{od}(t) = Q_{od}(t - C_{od}^*(t)), \quad (29)$$

$$n_{od}(t) = A_{od}(t) - D_{od}(t). \quad (30)$$

これらは、起終点別に区別された、ネットワークへの累積流入交通量、累積流出交通量、及び車両存在台数である。なお、(29) が成立するのは、DUE 状態においては、OD 間で FIFO 条件が成立するためである。これらの巨視的な変数が微分可能であるとする、ネットワーク内の車両存在台数のダイナミクスは、次のように表される：

$$\frac{dn_{od}(p_d(s))}{dt} = \lambda_{od}(p_d(s)) - f_{od}(p_d(s)) \quad \forall od \in \mathcal{W}, \quad (31)$$

$$\text{where } \lambda_{od}(p_d(s)) \equiv \frac{dA_{od}(p_d(s))}{dt} = \frac{dQ_{od}(p_d(s))}{dt} \quad (32)$$

$$f_{od}(p_d(s)) \equiv \frac{dD_{od}(p_d(s))}{dt} = \frac{dQ_{od}(p_o(s))}{dt} \quad (33)$$

ここで、式 (32)、(33) は、それぞれ起終点毎のネットワークへの流入交通流率、流出交通流率 (トリップ完

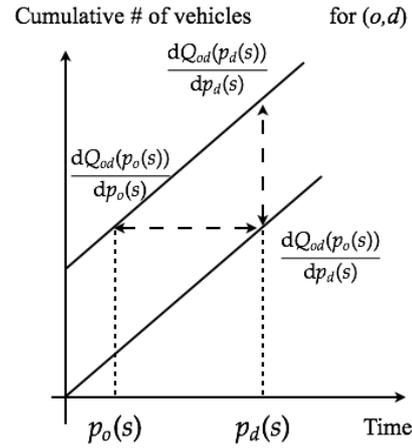


図-2 累積図上での定常状態における各変数の関係

了流率) を表している。

#### (2) トリップ完了流率の解析的評価

以上の準備の下、UN におけるトリップ完了流率を解析的に評価する。具体的には、DUE 状態 (23) の逆問題を定式化し、その問題を解くことにより、トリップ完了流率の解析式を導出する。

この逆問題の入力は渋滞パターンであり、縮約ネットワークにより表現される：縮約ネットワークのノード・リンク接続行列  $\mathbf{A}$  (i.e., 縮約ネットワークのトポロジー)、及びリンク容量行列  $\mathbf{M}$  (i.e., 縮約ネットワークの容量パターン) が入力となる。本稿では、この縮約ネットワークのトポロジーについて次の仮定をおく：全ての OD で起終点ノードが 1 つのノードに集約されていない。この仮定は、ある起終点間の旅行時間が自由旅行時間となり、OD 需要がそのままネットワークを流出する状況を排除するためのものである。なぜならば、こうした状況では、需要条件でトリップ完了流率が決まっており、渋滞パターン (や供給条件) はトリップ完了流率に影響をおよぼさないためである。

一方で、この逆問題の出力となるのは、DUE 配分で外生的に与えられていた OD 交通流率である。通常の逆問題と同様に、この出力を一意に定めるためには、なんらかの追加的な条件 (e.g., エントロピー最大化) が必要となる。本稿では、この条件として周期境界条件を採用する。この条件は、ある一定台数の車両がネットワーク内を走行する定常状態におけるトリップ完了流率を求めるために、従来研究<sup>22),23)</sup> でしばしば用いられるものである。より具体的には、各起終点ペア毎に、

$$\frac{dn_{od}(p_d(s))}{dt} \Leftrightarrow \frac{dQ_{od}(p_d(s))}{dt} = \frac{dQ_{od}(p_o(s))}{dt}, \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \dot{Q}_{od}(p_d(s)) \dot{p}_d(s) = \dot{Q}_{od}(p_o(s)) \dot{p}_o(s) \quad (35)$$

が成立する。また、定常状態を考えるために、流入・流

出交通流率が一定であることを仮定すると、

$$\dot{Q}_{od}(p_d(s)) = \dot{Q}_{od}(p_o(s)), \quad (36)$$

が成立する (図-2)。ここで、(35) と (36) を連立させることにより、次の関係式を得る：

$$\dot{p}_o(s) = \dot{p}_d(s). \quad (37)$$

さらに、 $o = o_{REF}$  において  $\dot{p}_o(s) = 1$  であることを考えると、UN における定常条件式は次の関係式に帰着することがわかる：

$$\dot{p}_o(s) = \dot{p}_d(s) = 1. \quad (38)$$

これは、ある終点  $d$  における定常的なトリップ完了流率  $f_d$  は、ネットワークへの流入交通流率  $\lambda_d = \sum_o \lambda_{od}$ 、あるいは OD 交通流率  $\sum_o \dot{Q}_{od}(s)$  に一致することを意味している。

結果として、定常条件 (38) と DUE 条件 (23) を用いることにより、提案逆問題は以下のように表される：

$$\begin{cases} \mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^T\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}_{o-}^T\mathbf{1} \\ \dot{\mathbf{p}} = [\dot{\mathbf{p}}_i | \dot{\mathbf{p}}_d]^T = [\dot{\mathbf{p}}_i | \mathbf{1}]^T \end{cases} \quad (39)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{p}}_i$ 、 $\dot{\mathbf{p}}_d$  は、それぞれ通過ノード集合  $\mathcal{N}_i$ 、終点ノード集合  $\mathcal{N}_d$  に対応する  $\dot{\mathbf{p}}$  の部分ベクトルを表す。また、(39) の第一式は、OD 交通流率  $\dot{\mathbf{Q}}(s)\dot{\mathbf{p}}_o(s)$  をトリップ完了流率  $\mathbf{f}$  で置き換え、かつ渋滞パターンを与件とした DUE 均衡条件式である。そして、この問題を解くことにより、終点別のトリップ完了流率  $f_d$  についての、以下の命題が得られる：

**命題 1.** (Unidirectional network におけるトリップ完了流率の解析式) Unidirectional network において渋滞パターン  $(\mathbf{A}, \mathbf{M})$  が与えられたとする。このとき、車両存在台数が一定となる定常状態における終点別のトリップ完了流率  $f_d$  は、以下の解析式で与えられる：

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{V}_{dd}\mathbf{1} + \mathbf{V}_{do}\mathbf{1} - \mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1}[\mathbf{V}_{io}\mathbf{1} + \mathbf{V}_{id}\mathbf{1}]. \quad (40)$$

$$\text{where } \mathbf{V}_{ab} = \mathbf{A}_a\mathbf{M}\mathbf{A}_{b-}^T. \quad (41)$$

証明. (39) について、通過ノードと終点ノードを区別してブロック表示することにより、次の関係式を得る：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{io}\mathbf{1} \\ \mathbf{V}_{do}\mathbf{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{ii} & \mathbf{V}_{id} \\ \mathbf{V}_{di} & \mathbf{V}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_i \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{V}_{ii}\dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{V}_{io}\mathbf{1} + \mathbf{V}_{id}\mathbf{1} \\ \mathbf{f}_d = \mathbf{V}_{dd}\mathbf{1} + \mathbf{V}_{do}\mathbf{1} + \mathbf{V}_{di}\dot{\mathbf{p}}_i \end{cases} \quad (43)$$

ここで、(43) の第一式の  $\mathbf{V}_{ii}$  は純湧き出しノードを含まない行列であり、必ず逆行列を持つ<sup>19),8)</sup>。従って、

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -(\mathbf{V}_{ii})^{-1}[\mathbf{V}_{io}\mathbf{1} + \mathbf{V}_{id}\mathbf{1}]. \quad (44)$$

が成立する。この式を (43) の第二式に代入すれば、(40) が得られる。(証明終)

この命題より、単一起点ネットワークと同様に、定常状態におけるトリップ完了流率は、OD 分布 (起終点ノードの位置)、渋滞リンク同士の接続構造、及びそれらの容量 (縮約ネットワーク) から決まることがわかる。

なお、(40) の意味は、単一起点ネットワークにおける解析式と同様に、縮約ネットワーク上の各終点ノードについてのフロー保存則に相当するものとして解釈できる。より具体的には、(40) の各項の行  $d$  の要素をまとめたもの (終点  $d$  のトリップ完了流率) は、次のように表される：

$$\sum_{k \in \mathcal{N} \cap I(d)} \mu_{dk} - \sum_{k \in \mathcal{N} \cap O(d)} \mu_{dk}\dot{p}_k. \quad (45)$$

ここで、 $I(k)$  はノード  $k$  に流入するリンクの始点となるノードの集合、 $O(k)$  はノード  $k$  から流出するリンクの終点となるノードの集合である。すなわち、式 (45) の第一項は終点  $d$  への総流入フローを示しており、第二項は終点  $d$  からネットワーク上の他のノードへと流出するフローを示している。

ただし、このフロー保存則は、渋滞パターンと DUE 配分原理 (i.e., 経路選択行動) により構造化された、より「グローバル」なフロー保存則である；(45) 中の  $\dot{p}_k$  は、(44) によって表される DUE の配分原理から決まる従属変数であり、経路選択行動に影響しうる、この終点に直接接続していないリンクの影響も反映される。そのため、(40) による渋滞パターンの解析により、トリップ完了流率の構造 (i.e., ネットワーク上のローカルな各リンクの交通状態と、グローバルなネットワーク性能の関係) を、理論的に考察することができる。

### (3) 単一起点の解析式との関係

本節では、和田・佐津川<sup>8)</sup> の、単一起点ネットワークを対象としたトリップ完了流率の解析式との比較考察を行う。具体的には、以下に示す解析式との構造比較を通して、単一起点と UN におけるトリップ完了流率の感度 (i.e., あるリンクの容量変化に対するトリップ完了流率の変化の正負) の関係について考察する：

**命題 2.** (単一起点ネットワークにおけるトリップ完了流率の解析式<sup>8)</sup>) 1 起点多終点ネットワークにおいて渋滞パターン  $(\mathbf{A}, \mathbf{M})$  が与えられたとする。このとき、車両存在台数が一定となる定常状態における終点別のトリップ完了流率  $g_d$  は以下の解析式で与えられる：

$$\mathbf{g}_d = \mathbf{V}_{dd}\mathbf{1} - (\mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1}[\mathbf{V}_{id}\mathbf{1} - \delta_i] + \delta_d). \quad (46)$$

なお、 $\delta$  は、唯一の起点に接続するリンクについて、リンクの上流ノードに対応する要素にリンク容量値を持つベクトルであり、下付き添字  $i, d$  は、それぞれ通過、終点ノードに関する要素を抽出していることを意味する。

比較のために、(40)における起点に関する行列  $\mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_0^T \mathbf{1}$  と  $\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_0^T \mathbf{1}$  を起点別に分解しよう。そのためまず、 $\mathbf{A}_0^T$  を次のようにブロック表示する：

$$\mathbf{A}_0^T = \left[ \cdots \mid \mathbf{A}_{dec;k-}^T \mid \cdots \right]. \quad (47)$$

$\mathbf{A}_{dec;k-}^T$  は、 $\mathbf{A}_0^T$  の  $k$  列目と等しい  $\mathcal{L}$  次元の列ベクトルである。これを  $\mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_0^T \mathbf{1}$ 、 $\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_0^T \mathbf{1}$  に代入すると、次の関係式が成立することがわかる：

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_0^T \mathbf{1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{M} \left[ \cdots \mid \mathbf{A}_{dec;i-}^T \mid \cdots \right] \mathbf{1} \\ &= \sum_{k \in N_0} \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{dec;k-}^T \end{aligned} \quad (48)$$

$$\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_0^T \mathbf{1} = \sum_{k \in N_0} \mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{dec;k-}^T. \quad (49)$$

ここで、 $\mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{dec;k-}^T$  ( $\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{dec;k-}^T$ ) は、 $\mathbf{A}_{dec;k-}^T$  と同様に  $\mathcal{L}$  次元の列ベクトルであり、ある終点ノード  $d$  (または、通過ノード  $i$ ) から起点  $k$  へ流入するリンクがあるとき、対応する行  $d$  にそのリンクの容量値に  $-1$  を掛けたものを要素として持つ。すなわち、これらは単一起点における  $\delta_d$ 、 $\delta_i$  と同じ構造である。そして、これらを代入すると、UN におけるトリップ完了流率の解析式は、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_d &= \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_d^T \mathbf{1} - \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_i^T (\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_i^T)^{-1} \mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_d^T \mathbf{1} \\ &+ \sum_{k \in N_0} \left[ \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{dec;k-}^T - \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_i^T (\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_i^T)^{-1} \mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{dec;k-}^T \right] \end{aligned} \quad (50)$$

と表される。

式 (50) を見るとわかるように、UN でのトリップ完了流率の解析式において、起点に関する行列は各起点別の行列の線形和で表すことができる。さらにこの行列式は、単一起点での解析式 (40) の対応する部分と同じ構造を持つ。すなわち、UN 上のある起点に接続するリンク容量変化に対するトリップ完了流率の感度は、単一起点におけるものと同様であることがわかる。加えて、(50) での起点と関わらない行列式は、明らかに単一起点と同じ構造を持つ；起点に関係しないリンク容量変化に対するトリップ完了流率の感度も正負は同様。

以上から、UN における解析式は、単一起点における解析式の単純な重ね合わせではないものの、その構造、及びネットワーク上の各リンクがトリップ完了流率に与える影響構造は同様であることがわかる。この事実は、単一起点ネットワークにおける解析から明らかにされたトリップ完了流率の低下メカニズムが、多起点多終点ネットワークにおいても同様に発現することを示すものである。すなわち、トリップ完了流率の変化は、待ち行列の延伸による終点流入フローのブロッキング ((45) の第一項の変化)、及び経路選択行動による終点流入リンク容量に占める通過交通量の変化 ((45) の第二項の変化) といった、異なる終点を持つフローの相互作用により特徴づけられる。

上記の単一起点と多起点構造の比較考察からは、多起点構造は単一起点構造に大きな影響を与えないことがわかる。これは、(45) の各項から次のように解釈することができる：ある終点に流入するフローを表す第一項は、それらフローの構成要素 (e.g., どの起点からのフローであるか) に関わらず容量値と同一となる。一方で、流出するフローを表す第二項は DUE 均衡解  $\hat{p}_i$  が関与しており、その終点から他の終点に対しどのように向かうのか (i.e., 終点同士の接続構造；ある終点から別の終点への経路、及び経路を構成するリンク) により大きく影響されうる<sup>8</sup>。こうした特性はより一般的な多起点多終点構造のネットワークを想定しても発現するものと考えられ、次章で行う一般構造ネットワークの UN 構造への近似変換手法の構築にあたり手がかりとなりうるものである。

#### 4. 提案手法の一般構造ネットワークへの拡張

ここまでは、UN を対象として定常状態におけるトリップ完了流率の構造、及びその特徴について考察した。一方で現実のネットワークについては、UN 構造を持つネットワークとして解析できるものは限られている。そこで本章では、前節までの議論を一般的な構造を持つネットワークに対して適用するための手法について考察する。具体的には、一般構造ネットワークを UN へと近似変換する手法について考察する。そして、近似変換されたネットワークに前章で構築した解析式を適用することで、トリップ完了流率を近似解析する。

以下ではまず、ネットワークの近似変換のアイデアについて概説する。そして、近似変換の具体的な手法を説明し、その特性について考察を行う。

##### (1) 近似変換の基本的なアイデア

本稿で提案する近似変換手法の基本的なアイデアは、一般構造ネットワーク上の有向・無向のループ構造を、単一起点構造へと変換することである。より具体的には、ループ構造に含まれる複数の起点ノード、及びループ構造へと流入するリンクの上流ノードを、一つの仮想的な起点へと集約する (図-3)。そして、これを全てのループに適用することで、単一起点構造が仮想的な起点を通して組み合わさった、polytree 構造 (図-1) へとネットワークを変換する。以下では、この近似変換のアイデアについて説明する。

トリップ完了流率を解析するためのループ構造の近似変換にあたっては、重要な点は二つ存在する。一つ

<sup>8</sup> この解釈と関連する議論として、Akamatsu and Heydecker<sup>20)</sup> は、単一起点の (ループのない) 飽和ネットワークにおいて、あるノードにおける DUE 均衡解が、そのノードより下流側の終点に流出するフローによって特徴づけられることを示している。

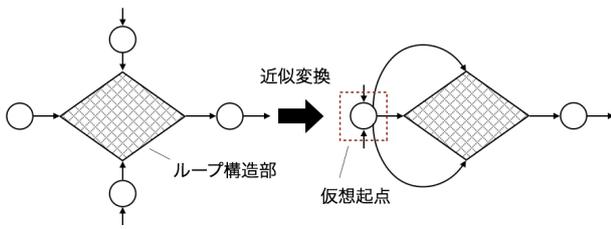


図-3 ループ構造部と、複数起点の集約のイメージ

は、変換前後でトリップ完了流率の値が一致していることである。これは、ループ構造への流入フローが、変換前後で変わらないことを要求するものである。なぜならば、本稿で解析対象とする定常状態では、ループ構造からの流出フローの総和 (i.e., ループ構造部内の終点におけるトリップ完了流率と、ループ構造を通過する交通量の和) は、流入フローと一致するためである。そのため、ループ構造から他のノードへの接続構造 (ループ構造からの流出構造) を変えない場合は、ループ構造に含まれる起点から流入するフロー、及びループ構造へと流入するリンクの交通状態 (i.e., フロー、渋滞・非渋滞状態) が同一となるような変換が必要となる。

一方でより重要なことは、近似変換前後でトリップ完了流率の感度が同一であることである。すなわち、前節で議論したような異なる終点を持つフローの相互作用 (i.e., ブロッキング現象、終点通過交通量の増加) が、変換後のネットワークでも同様に発現している必要がある。ここで、トリップ完了流率を一致させるために、ループ構造への流入フローが一致する変換を行うとき、ループ構造部内の終点への流入フロー (i.e., (45) の第一項) は変換前後で整合するものと考えられる；すなわち、ブロッキング現象は適切に表現される。そのため、感度を整合させるためには、ある終点から他の終点へと流出する終点通過フロー (i.e., (45) の第二項) を適切に表現する必要がある。具体的には、ある終点から別の終点に向かうフローの経路選択肢、及びその経路を構成するリンクといった、終点同士の接続関係が、変換前後で保存されている必要があると考えられる。

こうした変換の鍵となるのが、本節のはじめに説明した、ループ構造の単一起点化である。この変換では、ループ構造部へと流入するフローは全て仮想的な起点から流出するものとしているが、変換前でのループ構造部への流入フローを持つノード (ループ構造部内の起点ノード、またはループ構造へと流入するリンクの下流ノード) へとリンクを接続すれば、ループ構造部への流入フローの総量は変換前後で一致する。加えて、ループ構造部から流出構造を変化させていないため、ループ構造内の各終点を流出するフローの、他の終点への経路構造は保存されている。すなわち、ループ構造部

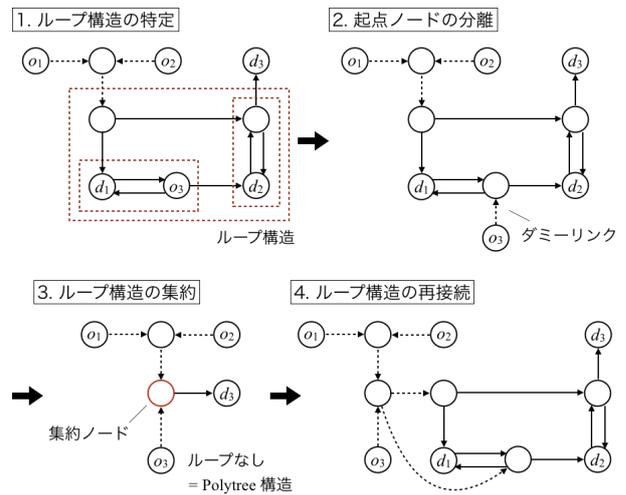


図-4 一般構造の UN 構造への変換 (点線：非渋滞リンク、実線：渋滞リンク)

内の終点に関して、トリップ完了流率の値を一致させるとともに、その感度を変換前のものと整合的に解析できると考えた。

## (2) 近似変換アルゴリズム

前節の議論を踏まえ、本節では、一般構造ネットワークのループ構造を単一起点構造へと変換することによる、UN 構造への近似変換手法を構築する。以下ではまず、手法の説明に先立ち、本節で用いる変数の定義について説明する。次に、UN 構造への近似変換アルゴリズムを示す。

まず、ある渋滞パターン  $(\mathbf{A}, \mathbf{M})$  におけるループ構造の集合を  $CG(\mathbf{A}, \mathbf{M})$  と表す。あるループ構造  $CG_i \in CG(\mathbf{A}, \mathbf{M})$  は、始点・終点ノードが同一である無向の経路、及びその経路に含まれるノードから構成されている。ここで無向の経路とは、有向・無向ループの両方について考えるための、有向リンクを無向リンクと考えたときの経路である、i.e., 有向リンクについて下流ノードから上流ノードへとノードを辿ることを許す。  $CG_i$  はノードの集合ともみなす (e.g., ノード  $a \in \mathcal{N}$  がループ構造  $CG_i$  に含まれているとき、 $a \in CG_i$ )。あるノードは複数のループ構造に共通して含まれる場合もある (e.g.,  $a \in CG_i \cap a \in CG_j, i \neq j$ )。なお、フローが流れていないリンクについては、削除して考える。

以上の準備の下、次の手順を踏むことにより、polytree 構造を基本構造としてもつネットワークを構築する (変換の手順を具体的なネットワークで表したものを図-4 に示す)：

### UN 構造への近似変換アルゴリズム

1. 渋滞パターン上のループ構造の特定：渋滞パターン  $(\mathbf{A}, \mathbf{M})$  のループ構造集合  $CG(\mathbf{A}, \mathbf{M})$  を特定する。
2. 起点ノードの分離：ループ構造  $CG_i \in CG(\mathbf{A}, \mathbf{M}), \forall i$

に起点ノード  $n$  が含まれる場合、この起点をループ構造から分離する。具体的には、非渋滞状態であるダミーリンクを作成し、この上流に純起点として接続し直す<sup>9</sup>。

3. ループ構造の集約：ループ構造  $CG_i$  を一つのノードへと集約する。また、集約されたノードが他のループに含まれるとき、このループも同一のノードに集約する。集約後のノードを  $CN$  と表し<sup>10</sup>、あるループ構造  $CG_i$  がこのノードに集約されていることを  $CG_i \in CN$  と表す。
4. ループ構造の再接続：集約ノード  $CN$  に、集約された構造  $CG_i \in CN$  を、ループ構造へ流入するリンクを用いて接続する。具体的には、あるループ構造  $CG_i \in CN$  に属する構造以外から流入するリンク  $l$  について、同一の交通状態（渋滞、非渋滞）・フロー・容量を持つリンクを作成し、このリンクの上流に  $CN$ 、下流に変換前のネットワークにおいて  $l$  が下流に持つノードを接続する。なお、集約したノードから流出するリンクについては、変換前の構造と同じノードを上流に持つように接続し直す。

このようにして変換されたネットワークでは、集約ノード  $CN$  があるループ構造  $CG_i \in CN$  にとっての（単一の）起点ノードとなる。結果として、変換後のネットワークは単一構造が集約ノードを介して polytree の構造で接続する構造となり、これは UN である。よって、このネットワークを渋滞パターンに基づき縮約し、解析式 (40) を適用すれば、トリップ完了流率の構造を近似的に求めることができる。

この近似変換アルゴリズムにおいて、変換後のネットワークが一意であることを示す次の定理をあげる：

**定理 1.**（近似変換されたネットワークの一意性）UN 構造への近似変換アルゴリズムにおいて、変換後のネットワークの構造は一意である。

**証明.** UN 構造への近似変換アルゴリズムの「ループ構造の集約」において、どのような順番でループ構造を集約しても、ある集約ノード  $CN$  に含まれるループ構造が一意であることを示せば良い。ここであるループ構造  $CG_i$  が他のループ構造と共通するノードを持たないとき、 $CG_i$  はそれぞれ単独で一つのノード  $CN$  に集約されることは自明。そのため、共通するノードを持つループが複数存在するときに、集約の順番によってループの集約先が変化しないことを示せば十分である。このために、集約に関する次の性質を示す：

<sup>9</sup> このダミーリンクは、後で行う渋滞パターンの縮約の際に除去されるため、トリップ完了流率の構造に影響をあたえることはない。

<sup>10</sup> なお、 $CN$  は複数存在しうる、i.e., 全てのループが一つのノードへと集約されるとは限らない。

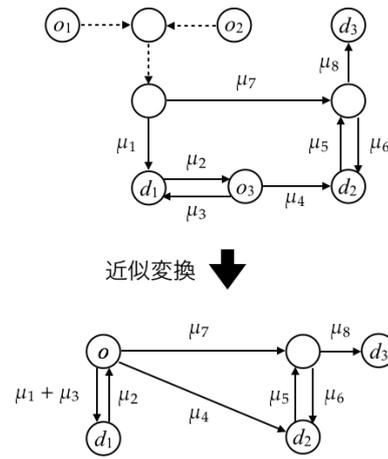


図-5 変換後の渋滞パターンに対応する縮約ネットワーク

**性質 1.** ある二つのループ  $CG_i, CG_j$  が存在し、これらが変換前のネットワークにおいて少なくとも一つのノードを共通して持つものとする。このとき、 $CG_a, (a = \{i, j\})$  を集約したノード  $CN$  は、 $CG_b, (b = \{i, j; b \neq a\})$  を構成するノードの一部となるか、 $CG_b$  を含む  $\therefore CG_i, CG_j$  は集約の順番に関わらず、ノード  $CN$  に集約される。

この性質から、集約の順番によらず変換前のネットワークにおけるループ構造のみから、集約先のノードが決まることがわかる。よって、これをネットワーク上の全てのループに適用すれば、集約の順番によらず、ループの集約先が決まることは明らか。よって証明。（証明終）

**具体例**

図-5に示す、図-4の変換後の渋滞パターンに対応する縮約ネットワークを用いて、トリップ完了流率の計算例を示す。このネットワークは1起点3終点のネットワークであり、ノード  $\{o\}$  が起点、ノード  $\{d_1, d_2, d_3\}$  が終点ノードである。各リンク  $l$  の容量は図に示すとおりである。

このとき、(40)の要素となる行列、ベクトルは以下のように表される：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{dd} &= \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 + \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_7 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{ii} = \begin{bmatrix} \mu_4 + \mu_6 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{V}_{io} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{id} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu_5 & -\mu_7 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{V}_{do} &= \begin{bmatrix} -\mu_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{di} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu_4 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

そして、これらを式 (40) に代入することにより、各終

点のトリップ完了流率が求まる：

$$\mathbf{f}_d = \begin{bmatrix} f_{d_1} \\ f_{d_2} \\ f_{d_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_3 + \mu_5 - \frac{\mu_5 + \mu_7}{\mu_4 + \mu_6} \mu_4 \\ \mu_7 \end{bmatrix}$$

最後に、 $\mathbf{f}_d$  の要素の和をとれば、ネットワーク全体のトリップ完了流率  $F$  が求まる：

$$F = \mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7 - \mu_2 - \frac{\mu_4}{\mu_4 + \mu_6}(\mu_5 + \mu_7). \quad (52)$$

なお分数部分が、近似変換後のネットワークにおける DUE 均衡解  $\hat{p}_i$  であり、車両の経路選択行動を反映したものである。

定常状態におけるローカルな保存則から導出されるトリップ完了流率と比較してみよう。定常状態において、各終点のトリップ完了流率は流入するリンクの容量から流出するリンクの容量を引いたものと等しい。従って、

$$F = \mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7 - \mu_2 - \mu_4. \quad (53)$$

が成立することがわかる。これは、一見 (52) とは異なるが、定常状態における通過ノードでの保存則  $\mu_4 + \mu_6 = \mu_5 + \mu_7$  を考慮すると、

$$\frac{\mu_4}{\mu_4 + \mu_6}(\mu_5 + \mu_7) = \mu_4 \quad (54)$$

が成立することがわかる。これを (52) に代入すると、二つのトリップ完了流率は同一であることがわかる。

この例からも、定常状態におけるトリップ完了流率は、誤差なく推定できうるということがわかる。加えて、(52) の解析解からは、終点ノードには直接接続しないリンク 6 が、車両の経路選択行動に関わるリンクとして、トリップ完了流率に影響を及ぼしていることがわかる。

### (3) 近似変換アルゴリズムの誤差について

本稿で提案する近似変換手法は、ループ構造部内、及びその下流の構造は変化させていないため、これらの構造部に位置する終点のトリップ完了流率の感度については、オリジナルのものと整合的に解析することができる。一方で、ループ構造部の「上流」に位置する終点に関しては、トリップ完了流率の感度は変換前後で異なる可能性がある。これは、ループ構造部に流入する全てのフローが通る集約ノードが構築されることで、ループ構造部中のあるリンク容量の変化によるフローの変化が、集約ノードを介して本来影響し得なかった上流側のネットワークに影響を及ぼすようになるためである。

こうしたことが起こる状況を示すネットワークのイメージから、それを簡単に確かめてみよう。図-6 に、二起点多終点の、UN でないネットワークを示す。このネットワークでは、起点  $o_1, o_2$  から出発したフローは、

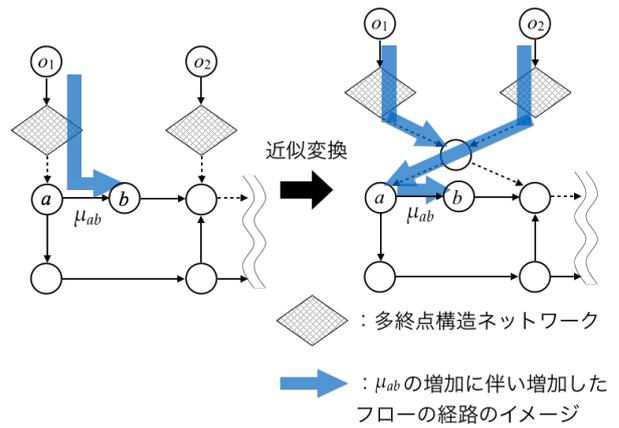


図-6 ループ構造部上流の感度が異なるネットワークイメージ

多終点構造を持つネットワークを通った後にループ構造に流入する。このネットワークに前述した近似変換アルゴリズムを適用すると、図中の右図のような UN 構造が構築される。

ここで、リンク  $(a, b)$  の容量  $\mu_{ab}$  を増強したときの、フロー・パターンの変化を見てみよう。まず、オリジナル・ネットワークでは、この容量増強に伴い、ノード  $a$  からの流出フローが増加する；そして、定常状態におけるフロー保存則から、このノード  $a$  への流入フローも増加することになる、i.e.,  $o_1$  下流の多終点構造を通過するフローが増加する。すなわち、このリンクの容量変化によるフロー・パターンの変化から、 $o_1$  下流の多終点構造内に位置する終点におけるトリップ完了流率のみが変化しうるということがわかる。

一方で、近似変換されたネットワークでは、ノード  $a, b$  の上流に、どちらのネットワークからの流出フローも通る集約ノードが構築される。そして、ノード  $a$  からの流出フローの増加の影響は、まず集約ノードからノード  $a$  への流出フローの増加として記述され、その後集約ノード上のフロー保存則から、集約ノードに接続する両方のリンク上のフローの変化として記述される。この結果として、元々片方のネットワークのみにしか影響しなかったリンク容量の変化が、両方のネットワークのトリップ完了流率を変化させうるということがわかる。すなわち、トリップ完了流率の感度はオリジナルのものと異なりうるということがわかる。

このように、本近似手法では、本来ループ部へと流入するリンクの上下流ノード個別で考えなければいけなかったフロー保存則が、集約ノードで集計的に取り扱われてしまう。その結果、ループ構造部中のあるリンクのフローが変化したときの影響が、ループ上流側に適切に伝わらないことが起こりうる。こうした本来あるリンクのフロー変化に連動しないはずのリンク上のフローが変化するという現象が、一般構造ネット

ワークの UN 構造への近似変換にあたっての、近似誤差となる。そのため、ループ構造部内、及び下流の終点のみに着目して感度分析を行う、などのように、トリップ完了流率の感度分析にあたっては、このような近似誤差を踏まえた工夫が必要となる。

## 5. おわりに

本稿では、渋滞パターンを与件とするネットワーク性能解析手法を、一般構造のネットワークへと拡張した。具体的には、まず、単一起点ネットワークでのトリップ完了流率の解析手法を、UN を対象に拡張した。そして、一般構造のネットワークを、UN 構造へと近似変換する手法を提案した。これにより、一般構造のネットワークでも渋滞パターンを与件とすることで、トリップ完了流率の構造を近似的に解析することが可能となった。

本稿で提案する近似変換手法は、ネットワーク全体の定常的なトリップ完了流率の値、及びループ構造部内とその下流に位置する終点でのトリップ完了流率の感度は、適切に推定することができる。一方で本文中で指摘したように、ループ構造部上流については、ループ部内のリンク容量変化に対して本来変化しないはずのリンク上のフローが、集約ノードを介して変化することが示されている；ループ部上流の終点の感度は異なりうる。この感度の誤差については、原理的には起こりうることは分かっているものの、今のところ一般的な知見は存在しない。そのため、詳細な理論解析、及び系統的な数値計算からこれを明らかにしていくことは、大きな課題である。これについては、改めて、別の機会に報告したい。

## 付録 I Unidirectional network における縮約ネットワークの構築

本章では、UN 構造を持つ非飽和ネットワークにおける DUE 均衡解  $\mathbf{p}(s)$  について、オリジナル・ネットワーク上で導出される均衡解と縮約ネットワーク上で導出される解の等価性について証明する。

まず、オリジナル・ネットワーク上で DUE 均衡解が満たすべき条件式を、渋滞リンクと非渋滞リンクを区別して導出しよう。ネットワーク上に渋滞リンクと非渋滞リンクが混在しているとき、リンク流入交通流率とリンク旅行時間に関するベクトル変数  $\mathbf{y}$ ,  $\dot{\mathbf{c}}$ , リンク容量行列  $\mathbf{M}$ , ノード・リンク接続行列  $\mathbf{A}^*$  (起点についての行を削除していない行列、以下では \* は省略している) は、リンクの渋滞状態に応じて次のようにブロック表示を行うことができる (なお、以下では (s) を省略

している) :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_Q \\ \mathbf{y}_F \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{c}}_Q \\ \dot{\mathbf{c}}_F \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_Q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_F \end{bmatrix}, \quad (\text{I.1})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_Q & \mathbf{A}_F \end{bmatrix}. \quad (\text{I.2})$$

ここで、下付き添字  $Q, F$  のついたベクトル・行列は、それぞれノード・リンク接続行列の渋滞リンク、非渋滞リンクに対応する部分ベクトル・行列を表す。また、それぞれのリンク集合を  $\mathcal{L}_Q, \mathcal{L}_F$  で表す。この行列、及び  $\dot{\mathbf{p}}^*, \dot{\mathbf{Q}}^*$  を用いて (以下では \* は省略している)、基準時刻別の DUE 配分は以下の式により表される :

- ・リンク旅行費用関数

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{c}}_Q = \mathbf{M}_Q^{-1} \mathbf{y}_Q - \mathbf{A}_{Q+}^T \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{c}}_F = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

- ・フロー保存則

$$\mathbf{A}_Q \mathbf{y}_Q + \mathbf{A}_F \mathbf{y}_F = -\dot{\mathbf{Q}} \dot{\mathbf{p}}_0 \quad (\text{I.4})$$

- ・最短経路選択条件

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{c}}_Q + \mathbf{A}_{Q+}^T \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{c}}_F + \mathbf{A}_F^T \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

これらをまとめると、次の均衡条件式が導かれる :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_Q \mathbf{M}_Q \mathbf{A}_{Q+}^T \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{A}_F \mathbf{y}_F = \dot{\mathbf{Q}} \dot{\mathbf{p}}_0 \\ \mathbf{A}_F^T \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

次に、縮約ネットワーク上で定義される DUE 均衡条件式を示す :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_R \mathbf{M}_R \mathbf{A}_{R-}^T \dot{\mathbf{p}}_R = \dot{\mathbf{Q}}_R \dot{\mathbf{p}}_{R,0}(s) \\ \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{p}}_R, \mathbf{R} \mathbf{A}_Q = \mathbf{A}_R, \mathbf{R} \mathbf{A}_{Q-} = \mathbf{A}_{R-}, \\ \mathbf{R} \mathbf{A}_F = \mathbf{0}, \mathbf{M}_Q = \mathbf{M}_R. \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

ここで、 $\mathbf{R}$  は  $(\mathcal{N} - \mathcal{L}_F) \times \mathcal{N}$  の行列であり、縮約ネットワーク上のノード  $i \in \mathcal{N}_R$  がオリジナル・ネットワーク上のノード  $j \in \mathcal{N}$  に対応していれば  $i$  行  $j$  列要素が 1、それ以外の要素は 0 となる。特に、 $\dot{\mathbf{Q}}$  の縮約について、以下が成立する :

$$\mathbf{R} \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{R}^T = \dot{\mathbf{Q}}_R, \quad (\text{I.8})$$

$\mathbf{R}_0$  は  $(\mathcal{N} - \mathcal{L}_F) \times \mathcal{N}_0$  の行列であり、縮約ネットワーク上のノード  $i \in \mathcal{N}_R$  がオリジナル・ネットワーク上の起点ノード  $j \in \mathcal{N}_0$  に対応していれば  $i$  行  $j$  列要素が 1、それ以外の要素は 0 となる。なお、この  $\mathbf{R}_0^T$  について次が成立する :

$$\dot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{R}_0^T \dot{\mathbf{p}}_{R,0} \quad (\text{I.9})$$

これらを用いて、(I.6) と (I.7) によって導かれる DUE 均衡解  $\dot{\mathbf{p}}$  が、いかなる  $\mathbf{y}_F$  のパターンにおいても等価であることを示す。まず、正則である行列  $[\mathbf{R}^T \ \mathbf{R}]$  と

$[\mathbf{R}\mathbf{R}^T]$ を考えよう。これらを用いることにより、以下が成立することがわかる：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_R = [\mathbf{R}\mathbf{R}^T]^{-1}\mathbf{R}\dot{\mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}}_{R,o} = [\mathbf{R}_o\mathbf{R}_o^T]^{-1}\mathbf{R}_o\dot{\mathbf{p}}_o, \\ \dot{\mathbf{Q}} = [\mathbf{R}^T\mathbf{R}]^{-1}\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{Q}}_R\mathbf{R}_o[\mathbf{R}_o^T\mathbf{R}_o]^{-1}, \\ \mathbf{A}_Q = [\mathbf{R}^T\mathbf{R}]^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{A}_R, \\ \mathbf{A}_{Q-}^T = \mathbf{A}_{R-}^T\mathbf{R}[\mathbf{R}^T\mathbf{R}]^{-1}. \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

また、

$$\mathbf{R}\mathbf{A}_Q = \mathbf{R}[\mathbf{R}^T\mathbf{R}]^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{A}_R = \mathbf{A}_R \quad (\text{I.11})$$

より、 $\mathbf{R}[\mathbf{R}^T\mathbf{R}]^{-1}\mathbf{R}^T \equiv \mathbf{I}$ である(単位行列)。これは、起点に関する縮約の行列  $\mathbf{R}_o$  においても成立する。

ここで、行列  $[\mathbf{R}^T\mathbf{R}]$  を (I.6) の両辺に右側からかけると、

$$[\mathbf{R}^T\mathbf{R}]\{\mathbf{A}_Q\mathbf{M}_Q\mathbf{A}_{Q-}^T\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{A}_F\mathbf{y}_F\} = [\mathbf{R}^T\mathbf{R}]\dot{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{p}}_o \quad (\text{I.12})$$

となる。ここで、(I.12) の左側を変形すると、

$$\begin{aligned} & [\mathbf{R}^T\mathbf{R}]\{\mathbf{A}_Q\mathbf{M}_Q\mathbf{A}_{Q-}^T\dot{\mathbf{p}}\} - [\mathbf{R}^T\mathbf{R}]\{\mathbf{A}_F\mathbf{y}_F\} \\ &= [\mathbf{R}^T\mathbf{R}]\{[\mathbf{R}^T\mathbf{R}]^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{A}_R\mathbf{M}_Q\mathbf{A}_{Q-}^T\}\{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{p}}_R\} - \mathbf{0} \\ &= \mathbf{R}^T\{\mathbf{A}_R\mathbf{M}_R\mathbf{A}_{R-}^T\mathbf{R}[\mathbf{R}^T\mathbf{R}]^{-1}\}\{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{p}}_R\} \\ &= \mathbf{R}^T\{\mathbf{A}_R\mathbf{M}_R\mathbf{A}_{R-}^T\dot{\mathbf{p}}_R\}, \end{aligned}$$

が成立する。また、(I.12) の右側を変形すると、

$$\begin{aligned} & [\mathbf{R}^T\mathbf{R}][\mathbf{R}^T\mathbf{R}]^{-1}\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{Q}}_R\mathbf{R}_o[\mathbf{R}_o^T\mathbf{R}_o]^{-1}\dot{\mathbf{p}}_o \\ &= \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{Q}}_R\mathbf{R}_o[\mathbf{R}_o^T\mathbf{R}_o]^{-1}\dot{\mathbf{p}}_o \\ &= \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{Q}}_R\mathbf{R}_o[\mathbf{R}_o^T\mathbf{R}_o]^{-1}\mathbf{R}_o^T\dot{\mathbf{p}}_{R,o} \\ &= \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{Q}}_R\dot{\mathbf{p}}_{R,o} \end{aligned}$$

が成立する。

よって、(I.12) は、次の式によって表される：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T\{\mathbf{A}_R\mathbf{M}_R\mathbf{A}_{R-}^T\dot{\mathbf{p}}_R\} &= \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{Q}}_R\dot{\mathbf{p}}_{R,o} \\ \Rightarrow \mathbf{A}_R\mathbf{M}_R\mathbf{A}_{R-}^T\dot{\mathbf{p}}_R &= \dot{\mathbf{Q}}_R\dot{\mathbf{p}}_{R,o}. \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

これは、(I.7) と等価である。よって、(I.6) を満たす DUE 均衡解と (I.7) を満たす DUE 均衡解は等しいことがわかる(証明終)。

#### 参考文献

- 1) Iryo, T. and Smith, M. J.: On the uniqueness of equilibrated dynamic traffic flow patterns in unidirectional networks, *Transportation Research Part B: Methodological*, pp. 1–17, 2017.
- 2) Daganzo, C. F.: Urban gridlock: Macroscopic modeling and mitigation approaches, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.41, No.1, pp.49–62, 2007.
- 3) Geroliminis, N. and Daganzo, C. F.: Existence of urban-scale macroscopic fundamental diagrams: Some experimental findings, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.42, No.9, pp.759–770, 2008.
- 4) Geroliminis, N. and Sun, J.: Properties of a well-defined macroscopic fundamental diagram for urban traffic, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.45, No.3, pp.605–617, 2011.
- 5) Mazloumian, A., Geroliminis, N., and Helbing, D.: The spatial variability of vehicle densities as determinant of urban network capacity, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol.368, No.1928, pp.4627–4647, 2010.
- 6) Daganzo, C. F., Gayah, V. V., and Gonzales, E. J.: Macroscopic relations of urban traffic variables: Bifurcations, multivaluedness and instability, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.45, No.1, pp.278–288, 2011.
- 7) Ramezani, M., Haddad, J., and Geroliminis, N.: Dynamics of heterogeneity in urban networks: Aggregated traffic modeling and hierarchical control, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.74, pp.1–19, 2015.
- 8) 和田健太郎 and 佐津川功季: 動的配分理論による道路ネットワークの交通性能解析, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.73, No.1, pp.56–72, 2017.
- 9) Wada, K., Satsukawa, K., Smith, M. J., and Akamatsu, T.: Network throughput under dynamic user equilibrium: Queue spillback, paradox and traffic control, *Transportation Research Part B: Methodological, forthcoming*, 2018.
- 10) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic equilibrium assignment with queues for a one-to-many OD pattern, *Proceedings of the 12th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, (Ed. by C. F. Daganzo), pp. 185–204, Berkeley, 1993, Elsevier.
- 11) 赤松隆 and 桑原雅夫: 渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分—1 起点・多終点および多起点・1 終点 od ペアの場合, 土木学会論文集, No.488/IV-23, pp.21–30, 1994.
- 12) 赤松隆 and 和田健太郎: 動的な交通ネットワーク流問題, *Proceedings of the Twenty-Sixth RAMP Symposium*, Hosei University, Tokyo, 2014.
- 13) Akamatsu, T., Wada, K., and Hayashi, S.: The corridor problem with discrete multiple bottlenecks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.81, No.3, pp.808–829, 2015.
- 14) Akamatsu, T.: A dynamic traffic equilibrium assignment paradox, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.34, No.6, pp.515–531, 2000.
- 15) Akamatsu, T.: An efficient algorithm for dynamic traffic equilibrium assignment with queues, *Transportation Science*, Vol.35, No.4, pp.389–404, 2001.
- 16) Waller, S. T. and Ziliaskopoulos, A. K.: A combinatorial user optimal dynamic traffic assignment algorithm, *Annals of Operations Research*, Vol.144, No.1, pp.249–261, 2006.
- 17) Iryo, T.: Solution algorithm of Nash equilibrium in dynamic traffic assignment with discretised vehicles, *Journal of JSCE*, Vol.67, No.1, pp.70–83, 2011.
- 18) Satsukawa, K. and Wada, K.: A note on the solution algorithm of Nash equilibrium in dynamic traffic assignment for single destination networks, *Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. D3 (Infrastructure Planning and Management)*, Vol.73, No.1, pp.103–108, 2017.
- 19) 赤松隆 and 高松望: 動的な交通ネットワーク・フローと od 構造の関係に関する理論的考察, 土木学会論文集, No.618/IV-43, pp.39–51, 1999.
- 20) Akamatsu, T. and Heydecker, B.: Detecting dynamic traffic assignment capacity paradoxes in saturated networks, *Transportation Science*, Vol.37, No.2, pp.123–138, may 2003.
- 21) Akamatsu, T. and Heydecker, B.: Detecting dynamic traffic assignment capacity paradoxes Analysis of Non-saturated networks, 2003.

- 22) Daganzo, C. F. and Geroliminis, N.: An analytical approximation for the macroscopic fundamental diagram of urban traffic, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.42, No.9, pp.771–781, 2008.
- 23) Leclercq, L. and Geroliminis, N.: Estimating MFDs in simple networks with route choice, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.57, pp.468–484, 2013.

(2018. 4. 26 受付)

An analytical approximation of trip completion rates in general networks based on reduced congestion patterns

Koki SATSUKAWA, Kentaro WADA, and Takashi OGUCHI