

個別損傷数量の予測結果に基づく RC 床版橋の大規模更新の優先順位の決定

二宮 陽平¹・貝戸 清之²

¹学生会員 大阪大学大学院博士後期課程 工学研究科地球総合工学専攻 (〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1)
E-mail: y.ninomiya@civil.eng.osaka-u.ac.jp

²正会員 大阪大学大学院准教授 工学研究科地球総合工学専攻 (〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1)
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

近年、老朽化している高速道路橋を対象として、主要部材の取り換え（大規模更新）が計画されている。特に、橋梁の鉄筋コンクリート床版（RC 床版）に関しては、多種多量の損傷が顕在化し、喫緊の対策が必要とされるものもある。このような背景を踏まえ、本研究では、管理する複数の RC 床版橋の中で、大規模更新の優先順位を決定する方法論を提案する。具体的には、RC 床版に対する過去の点検結果を記録したデータに基づき、将来の個別損傷数量を予測できるような統計的方法論および、個別損傷数量から RC 床版の劣化リスクを推定できるような統計的方法論を開発し、リスクに基づいた更新の優先順位を決定する。個別損傷数量の予測に関しては、寿命分布にワイブル分布を設定したワイブル型のハザードモデルを援用する。また、スパン判定の予測に関しては、累積ロジットモデルを援用する。最後に、実在する高速道路 RC 床版のひび割れなどの個別損傷を対象として、本研究で提案する方法論の有用性について考察する。

Key Words : *statistical analysis, logit model, hazard model, asset management*

1. はじめに

1963年に日本初の高速道路である名神高速道路が開通してから、およそ半世紀が経過した。現在に至るまで、日本道路公団から分割民営化された東日本高速道路株式会社、中日本高速道路株式会社、西日本高速道路株式会社（以下、NEXCO 3社）においては、高速道路橋の維持管理が継続して行われている。特に近年では、2015年3月25日、国土交通大臣から道路整備特別措置法に基づく特定更新等工事に係わる事業許可を受け、NEXCO 3社で総額約3兆円の大規模更新等事業がスタートした。この大規模更新等事業では、NEXCO 3社が管理する老朽化している高速道路橋を対象として、主要部材の取り換えが計画されている。特に、橋梁の鉄筋コンクリート床版（以下、RC 床版）に関しては、プレレストコンクリート床版（以下、PC 床版）への取り換えが予定されている¹⁾。本研究では、このような RC 床版の取り換えを更新と呼ぶ。一方で、高速道路は国民生活を支える極めて重要な社会基盤施設であり、大規模更新等事業による社会的な影響を、出来るだけ小さくすることが必要である。そのため、管理する複数の高速道路橋 RC 床版に対して、一斉に更新を実施するのではなく、更新を実施する優先順位を決め、順次更新を実施するのが望ましい。

以上の背景を踏まえ、NEXCO 3社においては、RC

床版の状態を評価する指標として、スパン別床版（支間×幅員）の健全度評価（以下、スパン判定）を策定し²⁾、更新の優先順位を付けている。しかし、NEXCO 3社が設定する現行の RC 床版のスパン判定は、RC 床版の劣化の将来予測結果を考慮されておらず、将来的にスパン判定が逆転する可能性があることが指摘されている³⁾。さらに、RC 床版の劣化の将来予測を精緻に行うためには、点検結果として記録されている劣化の最小単位である個別損傷に着目して、劣化予測を行う必要がある。

そこで、本研究では、RC 床版橋の劣化の将来予測結果を考慮した個別損傷数量に基づく、スパン単位の更新の優先順位を決定する方法論を構築する。具体的には、1) RC 床版の最新の点検結果に基づいて、個別損傷からスパン判定を確率的に決定するための統計モデルを推定し、2) 過去に蓄積されている RC 床版の点検データに基づいて、個別損傷数量の将来的な増加過程を予測するための統計モデルを推定し、最後に 1)、2) の統計モデルを組み合わせることで、現在の個別損傷数量から将来的なスパンの劣化リスクを推定できるモデルを作成し、スパン単位の更新の優先順位を決定する。

以下、2. では、本研究の基本的な考え方を述べる。3. では、個別損傷数量からスパン判定を推定する累積ロジットモデルおよび個別損傷数量の将来予測を行うための損傷数生起確率モデルを定式化する。4. では、モ

デルのパラメータの推定手法を詳述する。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 高速道路橋 RC 床版の更新の優先順位付け

高速道路橋 RC 床版の大規模更新事業を円滑に推進するためには、RC 床版の状態を評価し、更新の優先順位を決定することが重要となる。表-1 には、NEXCO 3 社の RC 床版の更新の優先順位付けの基準となっているスパン判定の判定基準を示す。同表に示すように、NEXCO 3 社で現在策定されているスパン判定基準は、スパンに存在する全てのパネルの現在のパネル判定結果を集計した指標となっている。一方で、RC 床版のパネルのパネル判定は、RC 床版に発生している個別損傷の直近の点検結果をもとに決定される。

以上のように、スパンの更新の優先順位はスパンの現在の劣化状況に基いて決定される。例えば、いま 2 つのスパン（スパン S_1 およびスパン S_2 ）の更新の優先順位を考えよう。最新の点検によって、スパン S_1 に発生している損傷数量の方が、スパン S_2 に発生している損傷数量よりも多いことが判明していたとする。現行のスパン判定基準に基いて、2 つのスパンを評価すれば、当然のことながら、スパン S_1 の方がスパン S_2 よりも悪く評価され、スパン S_1 を優先的に更新するという意思決定がなされるであろう。一方で、スパンの更新の優先順位付けがされてから、すぐにスパンの更新が実施されるのではなく、意思決定から実際にスパンが更新されるまでには、ある程度の期間が必要であると考えられる。さらに、スパン S_2 の方がスパン S_1 よりも劣化速度が速くなる条件下にあり、2 つのスパンの将来的な損傷の発生予測を行うと、実際に RC 床版が更新される時点で、スパン S_2 に発生している損傷数量の方が、スパン S_1 に発生している損傷数量を上回ることが示唆されているとする。そこで、スパンの現在の劣化状況に、このような劣化予測結果を加味して、スパンの更新の優先順位を考えると、スパン S_2 を優先的に更新するという意思決定が合理的であると考えられる。このように、スパンの更新の優先順位付けを行う際には、対象となるスパン群においてスパン間の劣化速度に有意な差が存在する場合、スパンの現在の状態に、劣化予測結果を加味することが望ましいと言える。

(2) 既往研究の概要

スパンの更新の優先順位付けを行っている過去の研究には、水谷らの研究がある³⁾。水谷らは、RC 床版を構成するパネルを劣化予測単位とし、RC 床版に対するパネル判定データを集計的劣化過程モデルによって統計的に解析し、スパンがあるスパン判定に達する確率

を推定している。さらに、その確率をリスクと定義し、そのリスクに基いて、スパンの更新・修繕の優先順位付けを行っている。水谷らの研究においては、劣化予測指標がパネル判定という多段階離散的指標である。本研究でも、スパンの更新・修繕の優先順位付けを行うまでのアプローチとして、基本的には水谷らの方法論を踏襲することとするが、劣化予測単位がパネル単位ではなく、個別損傷単位であることに本研究の特徴がある。さらに、予測された個別損傷数量に基づいてスパン判定を推定する点に本研究の新規性がある。

そこで、本研究では、個別損傷数量に基づいてスパン判定を推定する分析を行う必要がある。対象に関する多次元の観測値に基いて、その対象を複数の群のいずれに属するかを判定する分析を、統計学では判別分析と呼ぶ。判別分析の中でも多数の手法がこれまでに提案されているが、その代表的なものに、Mahalanobis が提案したマハラノビスの距離 (Mahalanobis' Distance) を用いた判別分析がある⁴⁾。具体的には、判別したい観測値が 2 つの群 G_1 、 G_2 のどちらに属するかを考えると、観測値が群 G_1 および群 G_2 の中心からどれくらい離れているかを示す距離をマハラノビスの距離と考え、双方の距離の小さい方に観測値を判別する方法である。また、観測値が多次元の場合にも用いることができる方法である。判別分析の中には他にも、Fisher が提案した線形判別分析や Hastie and Tibshirani が提案した混合判別分析がある^{5),6)}。一方で、これらの手法はいずれも、1) 各群に属する多次元の観測値が、いずれも多変量正規分布に従うこと、2) 各群に属する多次元の観測値が、それぞれ同じ共分散行列（等分散性）をもつこと、を前提としている。

本研究では、Cox の提案したロジスティック回帰分析を用いる。ロジスティック回帰分析は、ロジスティック関数の逆関数であるロジット関数を連結関数として用いた一般化線形分析の一種である⁷⁾。この手法には、先に述べた観測値の正規分布性や等分散性の仮定を外しているという特徴がある。さらに、観測値を確率的に判別できるという特徴がある。判別する目的変数が、3 種類以上である場合、ロジスティック回帰分析は特に、多項ロジスティック回帰分析と呼ばれる。また、判別する目的変数が 3 種類以上かつ順序尺度である場合、ロジスティック回帰分析は特に、順序ロジスティック回帰分析と呼ばれる。本研究においては、目的変数を順序尺度であるスパン判定、説明変数を個別損傷数量とした順序ロジスティック回帰分析を行う。順序ロジスティック回帰分析では、累積ロジットモデルが援用される。

表-1 現行のスパン別床版（支間 × 幅員）の健全度評価（スパン判定）

スパン判定	床版の状況	判定の基準
1	床版パネルの 30%未満に DD 以上の劣化がある。	変状が著しい。
2	床版パネルの 30%以上に DD 以上の劣化がある。	変状が大きい。
3	床版パネルの 40%以上に DD 以上の劣化がある。	変状は大きくなりつつある。
4	床版パネルの 30%以上に BB 以上の劣化がある。	変状は少ない。
5	床版パネルの 40%以上に BB 以上の劣化がある。	変状は少ない。

注) 参考文献²⁾より引用。

(3) 本研究が採用するアプローチ

本研究では、個別損傷数量を表現する指標として、?? に示すように、1) 損傷個数、2) スパン 1m² あたりの損傷個数、3) 損傷面積、4) スパン 1m² あたりの損傷面積、といった 4 つの指標を候補とした。これら複数の指標を説明変数として累積ロジットモデルに同時に考慮し、個別損傷数量からスパン判定の推定を行うことも可能であるが、スパンの更新の優先順位付けを行うためには、採用したすべての説明変数の将来予測を実施しなければならず、劣化予測手法が非常に煩雑になる。これを避けるために本研究では、累積ロジットモデルに採用する個別損傷数量を表現する指標を 1 つに絞ることとした。その 1 つの個別損傷数量を表現する指標を決定する手法として、スパン判定および 4 つの個別損傷数量を表現する指標それぞれのスピアマンの順位相関係数を計算し、その係数が最も高い個別損傷数量を表現する指標を累積ロジットモデルに採用する指標および将来予測を行う指標とすることとした。

その結果、スパン 1m² あたりの損傷個数およびスパン判定のスピアマンの順位相関係数が最も高い値となったため、本研究においては、スパン 1m² あたりの損傷個数のみを説明変数として累積ロジットモデルに採用することとし、損傷個数の将来予測を行うこととした。

(4) パネル単位の劣化予測とスパン単位の劣化予測

図-1 に既往研究の位置づけと本研究の位置づけの違いを示す。同図に示すように、本研究では、個別損傷単位の将来予測を行った後、その結果をスパン単位で集計することにより、スパン判定を推定する。そして、将来的にスパン判定がある閾値に達する確率をスパンのリスクと定義することにより、このリスクの大小に応じてスパンの更新の最適化（スパンの更新の優先順位決定）を行う。

具体的に、本研究でのスパンの更新優先順位付けまでの作業フローを図-2 に示す。本研究では、個別損傷数量からスパン判定を推定するために累積ロジットモデルを援用する。一方で、個別損傷数量の将来予測を

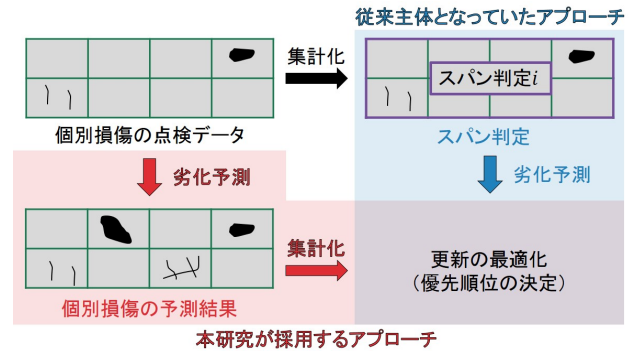


図-1 既往研究と本研究の立場

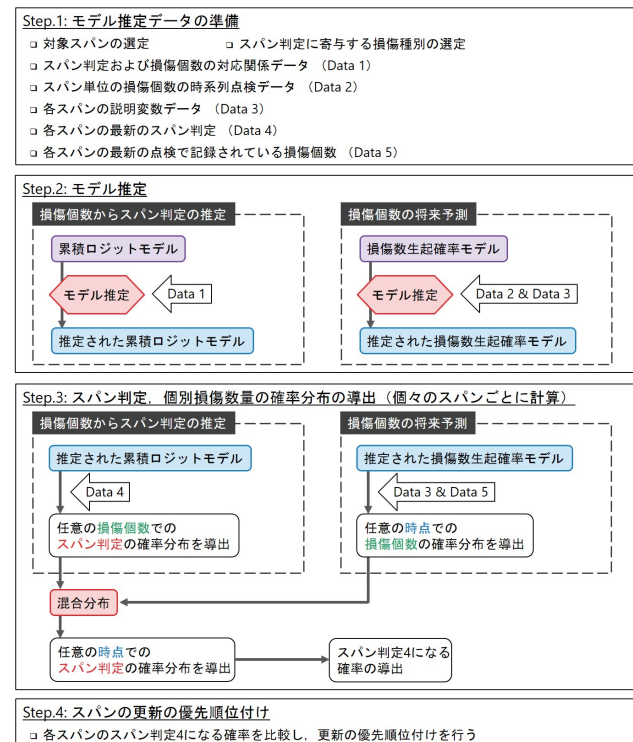


図-2 スパンの更新優先順位付けまでの作業フロー

行うために、損傷数生起確率モデルを援用する。累積ロジットモデルの推定のためのデータには、個別損傷

数とスパン判定の関係を記録した複数の個別損傷数とスパン判定の対応関係データを用いる。一方で、損傷数生起確率モデルの推定のためのデータには、供用開始時点からの経過時間とそのときに観測された個別損傷数を記録したスパン単位の個別損傷数の時系列点検データを用いる。双方のモデルを推定した後、個々のスパンごとに、任意の損傷数量でのスパン判定の確率分布および任意の将来時点での損傷数量の確率分布を導出する。そして、それら 2 つの分布を混合分布として考え、任意の将来時点でのスパン判定の確率分布を導出し、任意のスパン判定に達する確率が高いスパンから優先的に更新を適用するといった提案を行う。

3. モデルの定式化

(1) 累積ロジットモデル

個別損傷数量からスパン判定をするために、累積ロジットモデルを定式化する。いま、任意の 1 つのスパンに着目する。ただし、スパン判定の値が大きくなるほど、スパンの劣化が進行している様子を表現する。

損傷数量が任意の $x (\geq 0)$ であるスパンの損傷判定が任意の $i (= 1, \dots, I-1)$ 以下となる確率 $p_i(x)$ のロジット $\text{logit}\{p_i(x)\}$ は、

$$\text{logit}\{p_i(x)\} = \ln \left\{ \frac{p_i(x)}{1-p_i(x)} \right\} \quad (1)$$

$$(i = 1, \dots, I-1; x \geq 0)$$

となる。本研究では、このロジット $\text{logit}\{p_i(x)\}$ を、未知パラメータ $\beta_{1,0}, \beta_{1,1}, \dots, \beta_{I-1,0}, \beta_{I-1,1} (= \beta_1, \dots, \beta_{I-1})$ を導入し、

$$\text{logit}\{p_i(x|\beta_i)\} = \beta_{i,0} + x\beta_{i,1} \quad (2)$$

$$(i = 1, \dots, I-1; x \geq 0)$$

のように線形回帰モデルで表現する。式 (1) および式 (2) をまとめると確率 $p_i(x|\beta_i)$ は、

$$p_i(x|\beta_i) = \frac{1}{1 + \exp(-h_i(x|\beta_i))} \quad (3)$$

$$(i = 1, \dots, I-1; x \geq 0)$$

と表現できる。ただし、 $h_i(x|\beta_i) = \beta_{i,0} + x\beta_{i,1}$ ($i = 1, \dots, I-1; x \geq 0$) である。さらに、任意の $x (\geq 0)$ に関して、

$$p_0(x|\beta_0) = 0 \quad (4a)$$

$$p_I(x|\beta_I) = 1 \quad (4b)$$

$$(x \geq 0)$$

と定義する。ただし、 $\beta_0 = \beta_I = \emptyset$ とする。損傷数量が任意の $x (\geq 0)$ であるスパンの損傷判定が任意の

$i (= 1, \dots, I)$ となる確率 $pp_i(x|\beta_i, \beta_{i-1})$ は、

$$pp_i(x|\beta_i, \beta_{i-1}) = p_i(x|\beta_i) - p_{i-1}(x|\beta_{i-1}) \quad (5)$$

$$(i = 1, \dots, I; x \geq 0)$$

と表現できる。

(2) 損傷数生起確率モデル

a) 状態空間クラスの定式化

RC床版の潜在的損傷数 n を与件としたとき、当該の RC床版において生起しうる潜在的損傷の添字の集合を $A^n = (1, \dots, n)$ と表す。潜在的損傷数 n は確率変数であり、 n の実現値が変われば潜在損傷集合 A^n も変化する。潜在損傷集合 A^n に含まれる潜在的損傷の添え字を $a \in A^n$ で表す。ある時点の目視点検において観測される損傷 $a \in A^n$ の状態を、状態変数 $s_a \in \Delta_a$ ($a \in A^n$) により記述する。ここに、 s_a は潜在的損傷 $a \in A^n$ が目視点検時点までに顕在化したかどうかを表す 0-1 変数であり、

$$s_a = \begin{cases} 0 & \text{顕在化していない} \\ 1 & \text{顕在化した} \end{cases} \quad (6)$$

と定義される。 Δ_a は損傷 a の状態空間である。ここで、 n を与件とした潜在的損傷の条件付き状態空間 Δ^n を、損傷 $a \in A^n$ の個別状態空間 Δ_a の直積空間

$$\Delta^n = \prod_{a \in A^n} \Delta_a \quad (7)$$

で表す。このとき、条件付き状態空間 Δ^n 上で定義される状態空間 ω^n を

$$\omega^n = (s_1, \dots, s_n) \quad (8)$$

と記述する。状態空間 Δ^n を構成する個別状態空間 Δ_a $a \in A^n$ ごとに $s_a = 0, s_a = 1$ といふ 2 通りの状態を定義できる。条件付き状態空間 Δ^n で定義される状態変数は n 個の個別状態の組として定義されるため、合計 2^n 個の状態変数が存在する。また、状態空間 Δ^n 上で定義される状態変数 ω^n の集合を Ω^n と表す。

以上の議論では n を与件と考えていたが、つぎに n を確率変数と考える。このとき、潜在的損傷の状態空間の集合（以下、状態空間クラスと呼ぶ）を

$$\Omega = \bigcup_{n \in Z_+} \Omega^n \quad (9)$$

と表す。 Z_+ は非負整数集合である。 n が既知のとき、 Ω^n は潜在的損傷を n とする有限状態空間となる。 n が観測不可能であるため、潜在的損傷の状態空間 Ω^n のクラス Ω を考え、その要素を $\omega \in \Omega$ と表現する。 Ω^n ($n = 1, \dots, n, \dots$) は潜在的損傷数が n となるような状態空間を表す。状態空間 Ω^0 は潜在的損傷数が 0 である場合であり、null 要素 \emptyset のみで構成される。状態空間クラスは、すべての個別状態空間に含まれるす

すべての要素の集合として定義される。さらに、状態空間クラス Ω 上で定義される確率関数 $\pi: \Omega \rightarrow [0, 1]$ を考える。関数 $\pi(\omega)$ は状態空間クラス Ω の中から、その要素 ω が実現する確率を表す。関数 π の無名性 (s_a の任意の置換に対する不変性) を仮定する。このとき、 (π, Ω) は確率空間を形成する。すなわち、状態空間クラスの中から、自然によりある特定の状態空間に含まれる状態 ω が標本として選択され、状態 ω により記述されるような損傷が顕在化する⁸⁾。

b) 潜在的損傷数分布モデル

潜在的損傷数 n を与件とし、供用開始後のある時点において目視点検が実施された場合を考える。状態空間 Ω^n から抽出した標本 $\omega^n = (s_1, \dots, s_n)$ に対して、

$$m(\omega^n) = |\{a: s_a = 1, a \in A\}|, \quad \omega^n = (s_1, \dots, s_n) \quad (10)$$

を定義する。記号 $|\cdot|$ は集合の要素数を表す。 $m(\omega^n)$ は状態空間 Ω^n から、標本 $\omega^n = (s_1, \dots, s_n)$ が抽出されたとき、標本の中に含まれる顕在化された損傷の個数を表す。状態空間クラス (π, Ω) に含まれる任意の要素 $\omega = \omega^n$ に対して定義される関数 $\pi(\omega^n)$ が以下の条件を満足すると仮定する。

$$\pi(\omega^n) = \zeta(n) \prod_{a=1}^n \rho(s_a) \quad (11)$$

ただし、 $\pi(\omega^n) = \text{Prob}(\omega^n \in \Omega)$ 、 $\rho(s_a) = \text{Prob}(s_a \in \Delta_a)$ である。また、 $\zeta(n) = \sum_{\omega^n \in \Omega^n} \pi(\omega^n)$ は、状態空間 Ω^n の生起確率を意味する。条件式 (11) は、1) 各時点における損傷の顕在化する確率がそれぞれ独立かつ一定であり、2) 損傷の顕在化する確率が潜在的損傷数に依存しないことを意味する。状態空間 Ω^n に着目する。 Ω^n の各要素は潜在的損傷数を n とする状態変数ベクトルを意味している。これらの各要素に対して、顕在化している損傷数を式 (10) を用いて定義することができる。 $m(\omega^n) = m$ となるような状態の集合 Θ_m^n を定義する。このように、状態空間 Ω^n において、 m 個の損傷が顕在化しているような状態変数の集合 Θ_m^n を、

$$\Theta_m^n = \{\omega^n \in \Omega^n \mid m(\omega^n) = m\} \quad (12)$$

と定義する。損傷の無名性を仮定すれば、集合に含まれる状態の数は組み合わせにより ${}_n C_m$ 個存在することが理解できる。

一方、潜在的損傷数は観測不可能であり、管理者には、対象とする RC 床版に対して、どの状態空間 Ω^n が生起しているかを特定できない。状態空間 Ω^n に隣接する状態空間 Ω^{n-1} に着目する。状態空間 Ω^{n-1} に対しても、顕在化した損傷数が m となるような状態の集合 Θ_m^n を定義できる。ただし、状態空間 $\Omega^0, \dots, \Omega^{m-1}$ に対しては、状態集合 Θ_m^n を定義できない。いま、状態空間クラスに含まれる状態 $\omega \in \Omega$ に関して、各状態

が生起する確率関数 π が与えられたと考える。さらに、潜在的損傷数が n であり、潜在的損傷数が n 個であり、そのうち m 個の損傷が顕在化する確率 $P_{n,m}$ および顕在化した損傷数が m 個となる確率 P_m はそれぞれ、

$$P_{n,m} = \sum_{\omega^n \in \Theta_m^n} \pi(\omega^n) \quad (13a)$$

$$P_m = \sum_{n=m}^{\infty} P_{n,m} \quad (13b)$$

と定義できる。さらに、潜在的損傷が顕在化する確率が、すべての潜在的損傷に関して同一であり $\rho(s_a = 1) = P$ と表せると考える。このとき、潜在的損傷が顕在化しない確率は $\rho(s_a = 0) = 1 - P$ となる。

$$\begin{aligned} P_{n,m} &= \zeta(n) \sum_{\omega^n \in \Theta_m^n} \prod_{a=1}^n \rho(s_a) \\ &= \zeta(n) \binom{n}{m} (P)^m (1-P)^{n-m} \end{aligned} \quad (14)$$

と書き換えることができる。 $\zeta(n)$ は潜在的損傷数 n が生起する確率である。いま、RC 床版が無間に多くの同質な基本単位で構成されていると考え、各基本単位において損傷が顕在化する確率が一定であれば、潜在的損傷数 n の確率分布をポアソン分布により表現できる。すなわち、潜在的損傷数が任意の n となる確率 $\zeta(n)$ は、

$$\zeta(n) = \frac{(\lambda A)^n}{n!} \exp(-\lambda A) \quad (15)$$

と表現できる。ただし、 A は RC 床版の面積である。この式 (15) は RC 床版に介在する潜在的損傷数の確率分布を表しており、本研究では潜在的損傷数分布モデルと呼ぶ。ここで、 m 個の損傷が顕在化する確率は、

$$P_m = \sum_{n=m}^{\infty} \zeta(n) \binom{n}{m} (P)^m (1-P)^{n-m} \quad (16)$$

と表される。若干の計算により、

$$P_m = \frac{(\lambda A P)^m}{m!} \exp(-\lambda A P) \quad (17)$$

となる。

c) 潜在的損傷顕在化確率モデル

いま、任意の RC 床版内に存在する任意の単一の潜在的損傷に着目する。当該 RC 床版の供用開始から、当該損傷が顕在化するまでの経過時間 (以下、寿命と呼ぶ) を確率変数 z と考え、確率密度関数 $f(z)$ 、累積分布関数 $F(z)$ に従うとする。ただし、確率変数 z の定義域は $[0, \infty)$ とする。当該 RC 床版の供用開始から任意の時間 z が経過した時点で、当該損傷が顕在化していない確率 (以下、生存確率と呼ぶ) $\tilde{F}(z)$ は、同時点までに当該損傷が顕在化している確率 $F(z)$ を用いて、

$$\tilde{F}(z) = 1 - F(z) \quad (18)$$

と定義できる。ここで、当該 RC 床版の供用開始から任意の時点 z まで当該損傷が顕在化せず、かつ微小期

間 $[z, z + \Delta z]$ の間に当該損傷が顕在化する条件付き確率は,

$$\chi(z)\delta z = \frac{f(z)\Delta z}{\tilde{F}(z)} \quad (19)$$

と表現できる. この式 (19) 中の $\chi(z)$ は一般にハザード関数と呼ばれる. ここで, 式 (18) の両辺を z に関して微分すると,

$$\frac{d\tilde{F}(z)}{dz} = -f(z) \quad (20)$$

となる. このとき式 (19) は,

$$\chi(z) = \frac{f(z)}{\tilde{F}(z)} = \frac{d}{dz} \{-\ln \tilde{F}(z)\} \quad (21)$$

と変形できる. ここで, $\tilde{F}(0) = 1 - F(0) = 1$ を考慮し, 式 (21) の両辺を積分すれば,

$$\int_0^z \chi(u)du = -\ln \tilde{F}(z) \quad (22)$$

を得る. よって, 生存確率 $\tilde{F}(z)$ は,

$$\tilde{F}(z) = \exp \left\{ -\int_0^z \chi(u)du \right\} \quad (23)$$

と表現できる. 本研究では, ハザード関数 $\chi(z)$ に,

$$\chi(z) = \mu\alpha z^{\alpha-1} \quad (24)$$

と定義されるワイブル分布を設定する. このとき, 確率密度関数 $f(z)$ および生存確率 $\tilde{F}(z)$ はそれぞれ,

$$f(z) = \mu\alpha z^{\alpha-1} \exp(-\mu z^\alpha) \quad (25a)$$

$$\tilde{F}(z) = \exp(-\mu z^\alpha) \quad (25b)$$

となる.

いま, 供用開始から任意の時間 τ が経過したとき, 任意の潜在的損傷が経過時間 τ までに顕在化している確率 $P(\tau)$ は,

$$\begin{aligned} P(\tau) &= 1 - \tilde{F}(\tau) \\ &= 1 - \exp(-\mu\tau^\alpha) \end{aligned} \quad (26)$$

と表現できる. この式 (26) を本研究では, 潜在的損傷顕在化確率モデルと呼ぶ.

式 (17) を用いると, 供用開始から時間 τ が経過後に累積 m 個の損傷が発生する確率 $P_m(\tau)$ は,

$$P_m(\tau) = \frac{[\lambda A \{1 - \tilde{F}(\tau)\}]^m}{m!} \exp[-\lambda A \{1 - \tilde{F}(\tau)\}] \quad (27)$$

と表現できる. この式 (27) を本研究では, 損傷数生起確率モデルと呼ぶ.

4. パラメータの推定手法

(1) 累積ロジットモデルの尤度関数の定式化

提案したモデルのパラメータを推定するために, 最尤推定法を援用する. 本研究では, モデルを推定するための情報は, RC 床版に対する点検結果を記録した点検データとなる. そこで, パラメータ推定に用いる点検

データが生起する確率を, 尤度関数として定式化する. いま, S 個のスパンの点検データを対象とする. 個々のスパンそれぞれに, 番号 $1, \dots, S$ を付与する.

ここで, 任意のスパン s ($= 1, \dots, S$) に着目する. 当該スパンに関して, 利用可能なスパン判定および個別損傷数量の対応関係データが K_s 回あるとする. 個々の対応関係データそれぞれに, 番号 $1, \dots, K_s$ を付与する. さらに, 任意の対応関係データ k_s ($k_s = 1, \dots, K_s$) に着目する. 当該対応関係データに関して, スパン判定 $\bar{i}_{s,k}$ および損傷個数 $\bar{x}_{s,k}$ の数値が利用可能である. よって, (1) で定式化した累積ロジットモデル (5) を用いれば, スパン判定 $\bar{i}_{s,k}$ および損傷個数 $\bar{x}_{s,k}$ が生起する確率 $pp_{\bar{i}_{s,k}}(\bar{x}_{s,k} | \beta_{\bar{i}_{s,k}}, \beta_{\bar{i}_{s,k}-1})$ を定式化できる. さらに, 対象とする全てのスパンの全ての対応関係データが独立に生起していると考えると, それらの同時確率を計算することにより, データ全体 $\bar{\Xi}_1 = (\bar{i}_{1,1}, \bar{x}_{1,1}, \dots, \bar{i}_{S,K_S}, \bar{x}_{S,K_S})$ の尤度関数 $\mathcal{L}_1(\beta | \bar{\Xi}_1)$ を定義できる. したがって,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_1(\beta | \bar{\Xi}_1) \\ &= \prod_{s=1}^S \prod_{k=1}^{K_s} \left[\frac{1}{1 + \exp \left\{ -h_{\bar{i}_{s,k}}(\bar{x}_{s,k} | \beta_{\bar{i}_{s,k}}) \right\}} \right]^{\delta_{\bar{i}_{s,k},1}} \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{1 + \exp \left\{ -h_{\bar{i}_{s,k}}(\bar{x}_{s,k} | \beta_{\bar{i}_{s,k}}) \right\}} \right] \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{1 + \exp \left\{ -h_{\bar{i}_{s,k}-1}(\bar{x}_{s,k} | \beta_{\bar{i}_{s,k}-1}) \right\}} \right]^{\sum_{j=2}^{I-1} \delta_{\bar{i}_{s,k},j}} \\ &\quad \cdot \left[1 - \frac{1}{1 + \exp \left\{ -h_{\bar{i}_{s,k}-1}(\bar{x}_{s,k} | \beta_{\bar{i}_{s,k}-1}) \right\}} \right]^{\delta_{\bar{i}_{s,k},I}} \end{aligned} \quad (28)$$

と表現できる. ただし, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{I-1})$, $h_i(x | \beta_i) = \beta_{i,0} + x\beta_{i,1}$ ($i = 0, \dots, I-1$) である. また, $\delta_{i,j}$ は, $i = j$ の場合に 1, $i \neq j$ の場合に 0 をとるダミー変数である. さらに, 式 (28) の両辺の対数をと

れば,

$$\begin{aligned}
 & \ln\{\mathcal{L}_1(\beta|\bar{\Xi}_1)\} \\
 &= \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^{K_s} -\delta_{\bar{i}_s,k,1} \ln\left\{1 + \exp(-\beta_{\bar{i}_s,k,0} - \bar{x}_{s,k}\beta_{\bar{i}_s,k,1})\right\} \\
 &+ \sum_{j=2}^{I-1} \delta_{\bar{i}_s,k,j} \left(\ln\left\{\exp(-\beta_{\bar{i}_s,k-1,0} - \bar{x}_{s,k}\beta_{\bar{i}_s,k-1,1})\right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \exp(-\beta_{\bar{i}_s,k,0} - \bar{x}_{s,k}\beta_{\bar{i}_s,k,1})\right\} \right. \\
 &\quad \left. - \ln\left[\left\{1 + \exp(-\beta_{\bar{i}_s,k,0} - \bar{x}_{s,k}\beta_{\bar{i}_s,k,1})\right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left\{1 + \exp(-\beta_{\bar{i}_s,k-1,0} - \bar{x}_{s,k}\beta_{\bar{i}_s,k-1,1})\right\}\right]\right) \\
 &+ \delta_{\bar{i}_s,k,I} \left[-\beta_{\bar{i}_s,k,0} - \bar{x}_{s,k}\beta_{\bar{i}_s,k,1} \right. \\
 &\quad \left. - \ln\left\{1 + \exp(-\beta_{\bar{i}_s,k,0} - \bar{x}_{s,k}\beta_{\bar{i}_s,k,1})\right\} \right] \quad (29)
 \end{aligned}$$

と対数尤度関数が表現できる。

(2) 損傷数生起確率モデルの尤度関数の定式化

再び, 任意のスパン $s (= 1, \dots, S)$ に着目する. 当該スパンの面積 \bar{A}_s および当該スパンの潜在的損傷数に影響を及ぼす説明変数 $\bar{\mathbf{y}}_s = (y_{s,0}, y_{s,1}, \dots, y_{s,B})$ のデータが利用可能であるとする. さらに, 当該スパンに関しては, E_s 回の点検データが記録されており, 各回の点検 $1, \dots, E_s$ ではそれぞれ, 1) スパン s の供用開始から点検実施までの経過時間 $\bar{\tau}_{s,1}, \dots, \bar{\tau}_{s,E_s}$, 2) 点検で観測された累積損傷数 $\bar{m}_{s,1}, \dots, \bar{m}_{s,E_s}$ のデータが利用可能である. 以上のような, スパン s に関するデータを $\bar{\xi}_s = (\bar{A}_s, \bar{\mathbf{y}}_s, \bar{\tau}_{s,1}, \dots, \bar{\tau}_{s,E_s}, \bar{m}_{s,1}, \dots, \bar{m}_{s,E_s})$ と表す. 対象とする全てのスパン $1, \dots, S$ に対してもそれぞれ, 同様のデータ $\bar{\Xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_S)$ が利用可能であると考えられる.

点検データ全体の尤度関数 $\mathcal{L}(\theta|\bar{\Xi})$ は, 対象とする全てのスパンにおいて実施された点検データが全て独立に生起していると考えられると, それらの同時確率を計算することにより定義できる. よって,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}(\theta|\bar{\Xi}) \\
 &= \prod_{s=1}^S \prod_{e=1}^{E_s} \frac{(\bar{\mathbf{y}}_s \boldsymbol{\gamma}' \bar{A}_s)^{\bar{m}_{s,e}}}{\bar{m}_{s,e}!} \exp(-\bar{\mathbf{y}}_s \boldsymbol{\gamma}' \bar{A}_s) \\
 &\quad \{1 - \tilde{F}(\bar{\tau}_{s,e})\}^{\bar{m}_{s,e}} \exp\{\bar{\mathbf{y}}_s \boldsymbol{\gamma}' \bar{A}_s \tilde{F}(\bar{\tau}_{s,e})\} \quad (30)
 \end{aligned}$$

と表現できる. ただし, $\tilde{F}(\bar{\tau}_{s,e}) = \exp(-\mu \bar{\tau}_{s,e}^\alpha)$ である. さらに, 式 (30) の両辺の対数をとれば,

$$\begin{aligned}
 & \ln\{\mathcal{L}(\theta|\bar{\Xi})\} \\
 &= \sum_{s=1}^S \sum_{e=1}^{E_s} \bar{m}_{s,e} [\ln(\bar{\mathbf{y}}_s \boldsymbol{\gamma}' \bar{A}_s) + \ln\{1 - \exp(-\mu \bar{\tau}_{s,e}^\alpha)\}] \\
 &\quad - \bar{\mathbf{y}}_s \boldsymbol{\gamma}' \bar{A}_s + \bar{\mathbf{y}}_s \boldsymbol{\gamma}' \bar{A}_s \exp(-\mu \bar{\tau}_{s,e}^\alpha) \quad (31)
 \end{aligned}$$

と対数尤度関数を表現できる.

(3) パラメータの最尤推定値

パラメータ β および θ それぞれの最尤推定値 $\hat{\beta}$ および $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\mu}, \hat{\gamma})$ は, 対数尤度関数 (29) および対数尤度関数 (31) をそれぞれ最大にするような β および θ , すなわち,

$$\frac{\partial \ln\{\mathcal{L}_1(\beta|\bar{\Xi}_1)\}}{\partial \beta} = 0 \quad (32a)$$

$$\frac{\partial \ln\{\mathcal{L}_2(\theta|\bar{\Xi}_2)\}}{\partial \theta} = 0 \quad (32b)$$

をそれぞれ満足するような β および θ として与えられる. さらに, パラメータ $\hat{\beta}$ および $\hat{\theta}$ それぞれの漸近的な共分散行列の推定値 $\hat{\Sigma}_1(\hat{\beta})$ および $\hat{\Sigma}_2(\hat{\theta})$ は,

$$\hat{\Sigma}_1(\hat{\beta}) = \left[\frac{\partial^2 \ln\{\mathcal{L}_1(\beta|\bar{\Xi}_1)\}}{\partial \beta \partial \beta'} \right]^{-1} \quad (33a)$$

$$\hat{\Sigma}_2(\hat{\theta}) = \left[\frac{\partial^2 \ln\{\mathcal{L}_2(\theta|\bar{\Xi}_2)\}}{\partial \theta \partial \theta'} \right]^{-1} \quad (33b)$$

と表現できる. ただし, 式 (33-a) および式 (33-b) の右辺の逆行列はそれぞれ, $\partial^2 \ln\{\mathcal{L}_1(\beta|\bar{\Xi}_1)\} / \partial \beta_i \partial \beta_{i'}$ を要素とする $2(I-1) \times 2(I-1)$ 次および $\partial^2 \ln\{\mathcal{L}_2(\theta|\bar{\Xi}_2)\} / \partial \theta_i \partial \theta_{i'}$ を要素とする $(2+B) \times (2+B)$ 次の Fisher 情報行列⁹⁾ の逆行列である. 共分散行列の推定値 $\hat{\Sigma}_1(\hat{\beta})$ および $\hat{\Sigma}_2(\hat{\theta})$ を用いて, t 検定統計量を推定できる.

5. おわりに

本研究では, 複数の高速道路 RC 床版橋に対する大規模更新の優先順位を決定する方法論を提案した. 具体的には, RC 床版に対する過去の点検結果を記録したデータに基づき, 将来の個別損傷数量を予測できるような統計的方法論および, 個別損傷数量から RC 床版の劣化リスクを推定できるような統計的方法論を開発し, リスクに基づいた更新の優先順位を決定した. 個別損傷数量の予測に関しては, 寿命分布にワイブル分布を設定したワイブル型のハザードモデルを援用した. また, スパン判定の予測に関しては, 累積ロジットモデルを援用した. パネル判定やスパン判定といった多段階離散的指標を劣化予測指標とせず, 個別損傷そのものを予測している点に本研究の特徴がある. なお, 本研究で提案した方法論を高速道路橋の点検データに適用した実証分析に関しては, 研究発表会当日に発表する予定である.

参考文献

- 1) 小笹浩司: NEXCO 西日本の橋梁の長期保全に向けた取り組み, 材料と環境, No.64, Vol.10, pp.429-437, 2015.
- 2) 西日本高速道路株式会社: 保全点検要領, 構造物編, 2015.
- 3) 水谷大二郎, 小濱健吾, 貝戸清之, 田中晶大: 集計的劣化過程モデルによる高速道路橋 RC 床版の劣化総合評価, 土木学会論文集 F4, Vol.73, No.3, pp.50-69, 2017.

- 4) Mahalanobis, Prasanta Chandra: On the generalised distance in statistics, *Proceedings of the National Institute of Sciences of India*, No.2, Vol.1, pp.49-55, 1936.
- 5) Fisher, R. A.: The use of multiple measurements in taxonomic problems, *Annals of Eugenics*, No.7, Vol.2, pp.179-188, 1936.
- 6) Trevor Hastie and Robert Tibshirani: Discriminant Analysis by Gaussian Mixtures, *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, No.58, Vol.1, pp.155-176, 1996.
- 7) Cox, DR.: The regression analysis of binary sequences, *J Roy Stat Soc B*, No.20, pp.215-242, 1958.
- 8) J. P. クライン, M. L. メシュベルガー (内波守 訳): 生存時間解析, 丸善出版, 2012.
- 9) 森棟公夫: 計量経済学, 東洋経済新報社, 1999.