

空間的異質性と空間的連鎖性を考慮した マルコフ劣化ハザードモデル

田中 晶大¹・水谷 大二郎²・小濱 健吾³・貝戸 清之⁴

¹学生会員 大阪大学大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: a.tanaka@civil.eng.osaka-u.ac.jp

²正会員 東北大学助教 災害科学国際研究所 (〒 980-0845 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1)

E-mail: mizutani@irides.tohoku.ac.jp

³正会員 大阪大学特任准教授 (常勤) 大学院工学研究科 NEXCO 西日本高速道路学共同研究講座
(〒 565-0871 吹田市山田丘 2-8)

E-mail: k-obama@civil.eng.osaka-u.ac.jp

⁴正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

RC床版の維持管理は、一つの部材を複数の単位に区切り、点検や補修の意思決定を行うことがある。しかしながら、全ての劣化事象が単位ごとに独立して進展するとは考えにくく、各单位が有機的に連動し、劣化事象が進展する場合もあると考えられる。そこで、本研究では、空間的な影響を考慮した劣化過程モデルを提案する。具体的には、空間的異質性と、空間的連鎖性に着目する。空間的異質性は、不可観測な劣化速度の異質性の空間的分布を表し、空間的連鎖性は、隣接する単位から受ける影響を考える。これにより、RC床版の劣化予測精度の向上が図られるため、劣化に起因したリスクの過小評価、過大評価を防ぐことができる。その上、ライフサイクル費用の高精度な算出が可能となり、より合理的な意思決定に資する情報を導出できると考えられる。最後に、高速道路のRC床版の点検データを用いた実証分析を通じて、本研究で提案する手法の有用性について考察する。

Key Words : *spatial correlation, deterioration modeling, Markov chain, RC slab, assetmetrics*

1. はじめに

高速道路ネットワークの途絶を未然に防ぐために、適切な時期に適切な工法により高速道路施設（以下、施設）を維持管理していくことは、国民の生産活動、コミュニケーション活動を高水準に保つために重要となる。施設は多様な部材で構成される。施設の公共性を考えた場合、それら個々の部材に対して合理的判断に基づく適切な維持管理を行うことが求められている。さらに、近年、高度経済成長期に建設された多数の施設の劣化が顕在化してきており、施設を限られた予算で維持管理することの重要性は増加している。

ここでは、施設の部材のうち、RC床版に着目する。RC床版の劣化は利用者のリスク事象を引き起こす要因となるために、施設の管理者はRC床版の劣化状態を定期点検により観測し、その結果に基づき適切な維持管理を実施することに努めている。本研究では、観測された点検データを用いてRC床版の劣化過程を詳細に記述し、RC床版の維持管理における管理者の意思決定を支援するための方法論を開発する。その際、RC床版の個々のパネルの空間的位置情報を考慮した劣化過程モデルを提案し、観測された点検データを用いて提

案したモデルを推定する。

本研究では、空間的異質性と空間的連鎖性に着目し、それら双方を考慮した空間的劣化過程モデルを提案する。空間的異質性は同一スパン内のパネル間における不可観測な劣化速度の異質性の空間的分布を表す。空間的連鎖性は、スパン内のあるパネルに着目し、当該パネルに隣接するパネルの劣化が進展した場合に着目しているパネルの劣化速度が増加するような性質を表す。このように、隣接するパネルから受ける影響や劣化速度の空間的異質性分布を明示的に考慮した劣化過程モデルを用いることにより、RC床版のパネルの劣化予測精度の向上を図る。これにより、劣化予測結果に基づく補修、更新などの意思決定において、劣化に起因したリスクの過小評価、過大評価を防ぎ、ライフサイクル費用の高精度な算出が可能となり、より合理的な意思決定に資する情報を導出できると考える。

以下、**2.**で本研究の基本的な立場を、高速道路橋RC床版のマネジメント、本研究で分析対象とする劣化事象とその空間的性質、関連する既往研究のそれぞれの観点から明確化する。**3.**でマルコフ劣化ハザードモデルのハザード率に空間的異質性項と空間的連鎖性を内

包した空間的劣化過程モデルを定式化し、4. でマルコフ連鎖モンテカルロ法（以下、MCMC 法）に基づくモデルのベイズ推定手法を説明する。5. で実在の高速道路橋 RC 床版で観測された点検データを用いて、本研究で提案する方法論の有用性を実証的に分析する。

2. 本研究の基本的な立場

(1) 高速道路橋 RC 床版のマネジメント

高速道路橋の RC 床版の劣化は、剥離・剥落、押し抜きせん断など利用者にとってのリスク事象を引き起こす要因となる。さらに、合成桁においては、RC 床版内部の鉄筋の腐食により橋梁自体の設計耐力が満足されなくなる可能性がある。道路管理者は RC 床版に対して定期的に点検を実施し、RC 床版の劣化状態をひび割れ、遊離石灰、剥離・剥落の有無、漏水などに着目して観測、記録し、点検結果に基づいて補修、更新などの意思決定を行っている。

ここで、本研究で対象とする高速道路橋 RC 床版の構成を図-1 で説明する。同図の青色網掛け部分を本研究ではスパンと呼び、スパンは隣接する橋脚間の上下線単位を構成単位とし、1つのスパンは複数のパネル（赤色網掛け部分）で構成される。このような RC 床版に対して、点検を通して個々のパネルの健全度が点検日とともに記録される。点検では個々のパネルの健全度に基づいて判定されたスパン単位での損傷度¹⁾も同時に記録されているが、本研究では、RC 床版の劣化過程をより詳細に記述するために、既往研究²⁾の考え方に従い、パネル単位での点検データを用いて劣化予測を行う。

観測された点検データ、それを用いた劣化予測結果に基づいて、高速道路橋 RC 床版の維持管理戦略を策定することができる。本研究の実証分析で対象とする西日本高速道路株式会社（以下、NEXCO 西日本）では、床版に対して、ライフサイクル費用の最小化、予防保全および性能強化の観点から、講ずる対策として、大規模更新（床版架替え）、大規模修繕（高性能床版防水や表面被覆）、通常修繕（部分補修、コンクリート剥離対策）を実施している。本研究では、これらの評価において、隣接するパネル間の劣化過程（劣化速度など）の相関関係、劣化したパネルが隣接するパネルの劣化過程へ与える影響、の双方を考慮するための空間的劣化過程モデルを提案する。

(2) 空間的劣化過程

本研究では、空間的に影響を受ける RC 床版パネルの劣化過程を、空間的異質性と空間的連鎖性に識別して表現する。その上で、空間的異質性、空間的連鎖性

をそれぞれ表現するパラメータを推定し、パラメータの有意性を事後的に検証し、空間的異質性、空間的連鎖性の有無を判断する。以下でそれら 2 種類の性質を説明する。

a) 空間的異質性

本研究では、空間的異質性を、初期不良などに起因した劣化速度の異質性のばらつきの空間的広がり、と定義する。なお、空間統計学の分野では、モデルの誤差項の分散の空間的不均一性が空間的異質性と呼ばれる場合も多い³⁾が、ここでは、劣化速度の異質性の空間的ばらつきを空間的異質性と呼ぶ。RC 床版のパネルは主にセメントと骨材と水によって構成されており、これらの材料の構成割合を均等に打設することは困難であるために、個々のパネルの劣化速度に影響を与える材料の構成割合が空間的に偏りを持っている可能性が否定できない。このとき、隣接するパネルの材料の構成割合には類似性があると考えられ、劣化速度の異質性が空間的に分布している可能性がある。その上、場所打ちコンクリートでは、ほとんどの工程が現地作業となるため、気象条件などの不確実要素の影響も受けやすくなる。

また、床版の構造条件が異質性分布の形状に影響を与える場合も考えられる。例えば、昭和 39 年の鋼道路橋設計示方書で設計された床版では、床版厚の不足の他に、配力鉄筋量を主鉄筋量の 25%とするよう規定されており、配力鉄筋量の不足によるせん断耐荷力不足が指摘されている。配力鉄筋量が少ない床版では、輪荷重による交番せん断力に抵抗する配力鉄筋断面のせん断剛性が低く、主鉄筋方向の貫通ひび割れが発生しやすくなるため、橋軸方向の劣化速度の異質性に相関が表れる可能性があると考えられる。

b) 空間的連鎖性

本研究では、空間的連鎖性を、隣接するパネルの劣化進展に起因した劣化速度の変動、と定義する。塩害を受けやすい RC 床版では、ひび割れなどから侵入する水の影響で塩化物イオンが鉄筋の不動態被膜を破壊して鉄筋腐食が起り、腐食部の膨張によりコンクリートの劣化が進行する。この劣化機構を考慮すると、あるパネルにおけるひび割れの発生が隣接するパネルの鉄筋腐食を誘発する可能性は否定できない。また、床版上面からの雨水の浸透によりコンクリート中の石灰成分が析出され遊離石灰が顕在化したのちに、その面積が時間の経過とともに拡大していくような劣化事象が複数のパネルを跨いで発生する可能性もある。RC 床版に関して、これらの劣化事象が顕著に発生している場合には、空間的連鎖性を明示的に考慮したモデルにより劣化過程をモデル化する必要がある。また、鋼板・コンクリート合成床版では、床版内部に水が侵入する

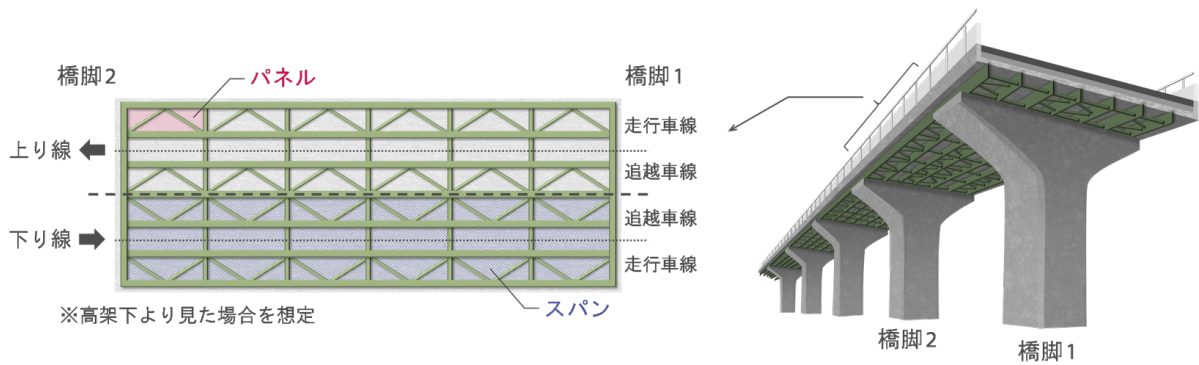


図-1 RC床版の構成

と床版内部が常時滞水状態となり、内部のコンクリートの劣化が促進されるだけでなく、内部鋼材の腐食進行も懸念されるため、上記の塩害の劣化機構と同様に、劣化速度の空間的連鎖性が存在すると考えられる。

(3) 既往研究の概要

社会基盤施設のアセットマネジメントにおいて、点検データを活用した統計的劣化予測モデルが2000年代より盛んに開発されている。津田等により開発されたマルコフ劣化ハザードモデル⁴⁾により、多段階で設定された離散的健全度のデータを活用したマルコフ推移確率の非集計的な推定が可能となり、推定精度が飛躍的に向上した。また、マルコフ劣化ハザードモデルは汎用性が高く、マルコフ劣化ハザードモデルに基づく劣化予測モデルが数多く開発されている^{5)–13)}。しかしながらこれらの劣化予測モデルではある単一の劣化事象に着目した際には個々の施設の劣化速度あるいはその異質性は独立である(水谷等¹²⁾は異なる劣化事象における個々の施設の劣化速度の異質性の相関構造をモデル化しているが単一の劣化事象における隣接する施設間の劣化速度の相関構造はモデル化していない。また、小林等⁷⁾、Nam等⁸⁾、小林等¹¹⁾は、異なる施設の異なる劣化事象に対して、ある施設の劣化が進展すると他の施設の異なる劣化事象の劣化速度が連鎖的に増加する様子をモデル化しているが単一の劣化事象における隣接する施設間の劣化速度の連鎖性はモデル化していない。)と仮定されており、本研究で着目する空間的異質性や空間的連鎖性を評価することはできない。

本研究における空間的異質性に相当する空間的自己相関モデルは、土木計画学の分野でも社会資本整備の便益評価などで研究が蓄積されている^{14)–16)}。また、施設の劣化評価に限っても、奥村等¹⁷⁾は鋼板腐食形状には空間的自己相関を持つ可能性を示唆しており、Lethanh et al.¹⁸⁾は道路舗装の劣化指標の空間的自己相関関係を定量化している。しかしながらこれらの研究は、劣化

過程をモデル化することなく静学的なモデルを用いて劣化状態の空間的自己相関を評価している。一方、劣化過程のモデル化を含めた動学的なモデルにおいて空間的自己相関モデルを用いた研究として、早矢仕等¹⁹⁾の研究があげられる。当該研究でのモデルにおける劣化速度(ハザード率)の自己相関構造は、本研究において用いる空間的異質性項と同一の構造を有している。当該研究との相違点としては、本研究では、多段階の離散的な健全度で劣化状態が評価される状況に対して、健全度ごとに異なる空間的異質性を考慮している点があげられる。当然のことながら、早矢仕等¹⁹⁾のモデルを離散的な多段階の健全度で劣化状態が評価されている場合に直接的に適用しようとすると、多段階の健全度を2値状態に変換する必要があり、それに起因したハザード率自体の推定バイアス、ハザード率の推定バイアスに起因した空間的自己相関構造の推定バイアスがモデル推定結果に残存する可能性がある。また、早矢仕等¹⁹⁾の研究で、空間的連鎖性と呼ばれているのは、本研究における空間的異質性であり、当該研究のモデルでは隣接パネルの劣化に起因した劣化速度の増加(本研究における空間的連鎖性)を考慮することはできない。本研究では、空間的異質性と空間的連鎖性の2種類を考慮し、劣化過程において空間的に相互に及ぼす影響を網羅的に捉えて劣化予測を行うための空間的劣化過程モデルを提案する。本研究における空間的連鎖性については、隣接するパネルの健全度に応じてハザード率を定義するため、隠れマルコフモデルと類似のモデル構造により表現する。近年のベイズ統計学の発展により、隠れマルコフモデルのように複数のレジームを持つようなモデルもマルコフ連鎖モンテカルロ(MCMC)法により推定が可能となり、統計的に正則でないモデルに関してもWidely Applicable Information Criteria(WAIC)²⁰⁾を用いたモデル比較が可能となっている。この点に関しては、4.(1)で説明を加える。

3. 空間的劣化過程モデル

(1) モデル化の前提条件

パネルの劣化過程をマルコフ過程モデルを用いて表現する。いま、2つの時刻間における健全度の推移をマルコフ推移確率で表現する。時刻 τ_A における健全度を状態変数 $h(\tau_A)$ を用いて表す。時刻 τ_A における健全度が i ($i = 1, \dots, I$) であれば $h(\tau_A) = i$ と表せる。なお、健全度の値が大きいほど劣化が進展しているとす。マルコフ推移確率は、時刻 τ_A で観測された健全度 $h(\tau_A) = i$ を与件とし、将来時点 $\tau_B = \tau_A + c$ ($c > 0$) において健全度 $h(\tau_B) = j$ ($j = i, \dots, I$) が生起する条件付確率として定義される。すなわち、

$$\text{Prob}[h(\tau_B) = j | h(\tau_A) = i] = \pi_{i,j}(c) \quad (1)$$

と表せる。このような推移確率を健全度ペア (i, j) に対して求めれば、マルコフ推移確率行列

$$\mathbf{\Pi}(c) = \begin{pmatrix} \pi_{1,1}(c) & \cdots & \pi_{1,I}(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pi_{I,I}(c) \end{pmatrix} \quad (2)$$

を定義できる。マルコフ推移確率 (1) は所与の 2 時点 τ_A, τ_B の間において生じる健全度間の推移確率を示したものである。当然のことながら、対象とする点検間隔 c が異なれば推移確率の値は異なる。補修がない限り常に劣化が進行するので、 $\pi_{i,j}(c) = 0$ ($i > j$) が成立する。また、推移確率の定義より $\sum_{j=i}^I \pi_{i,j}(c) = 1$ が成立する。すなわち、マルコフ推移確率に関して

$$\left. \begin{array}{l} \pi_{i,j}(c) \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, I) \\ \pi_{i,j}(c) = 0 \quad (i > j \text{ のとき}) \\ \sum_{j=i}^I \pi_{i,j}(c) = 1 \end{array} \right\} \quad (3)$$

が成立する。状態 I は、補修のない限りマルコフ過程における吸収状態であり、 $\pi_{I,I}(c) = 1$ が成立する。なお、マルコフ推移確率は過去の劣化履歴とは独立して定義される。マルコフ過程モデルにおいて、点検時刻 τ_A から点検時刻 τ_B の間に推移するマルコフ推移確率は時刻 τ_A における健全度だけに依存するという性質（マルコフ性）を満足する。

(2) マルコフ推移確率の導出

マルコフ推移確率を複数の指数ハザードモデルにより表現する。同モデルの詳細は参考文献⁴⁾に詳しいが、読者の便宜を図るためモデルの概要を説明しておく。いま、健全度 i ($i = 1, \dots, I-1$) の寿命を確率変数 ζ_i で表す。健全度 i の寿命が、確率密度関数 $f_i(\zeta_i)$ 、分布関数 $F_i(\zeta_i)$ に従うと仮定する。ここで、健全度が i に変化した時刻 τ_i ($i = 1, \dots, I-1$) を起点とする時間軸を考える。健全度 i の時間軸上で、時刻 τ_i からの経過時間を y_i と表記する。時刻 τ_i では $y_i = 0$ となる。ここ

で、時刻 τ_i に健全度が i となり、そこから時間 y_i が経過した時刻において健全度が $i+1$ に変化する確率密度をハザード関数^{21),22)} $\lambda_i(y_i)$ を用いて表現する。ハザード関数は、健全度が i となった時刻から、時間 y_i が過ぎる間、健全度が i のまま継続する生存確率 $\tilde{F}_i(y_i)$ を用いて、

$$\lambda_i(y_i)\Delta y_i = \frac{f_i(y_i)\Delta y_i}{\tilde{F}_i(y_i)} \quad (4)$$

と表せる。すなわち、ハザード関数 $\lambda_i(y_i)$ は、初期時刻 τ_i ($y_i = 0$) から時間 y_i が経過するまで健全度 i の状態が継続したという条件の下で、期間 $[y_i, y_i + \Delta y_i]$ 中に健全度 $i+1$ に進展する条件付確率である。ここで、ハザード関数を指数ハザード関数に特定化し、

$$\lambda_i(y_i) = \lambda_i \quad (\lambda_i > 0) \quad (5)$$

とする。指数ハザード関数を用いれば、健全度 i の寿命が y_i 以上となる確率 $\tilde{F}_i(y_i)$ は、

$$\tilde{F}_i(y_i) = \exp(-\lambda_i y_i) \quad (6)$$

と表現できる。ここで、 τ_i を起点とする時間軸上の任意の点 ξ 、すなわち、カレンダー時刻 $\tau_A = \tau_i + \xi$ における点検の結果、健全度が i と判断されたとする。その後、時刻 τ_A から追加的に期間 c ($c \geq 0$) 以上にわたって健全度 i が継続する条件付き確率 $\tilde{F}_i(\xi + c | \zeta_i \geq \xi)$ は、

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i(\xi + c | \zeta_i \geq \xi) &= \text{Prob}\{\zeta_i \geq \xi + c | \zeta_i \geq \xi\} \\ &= \frac{\exp\{-\lambda_i(\xi + c)\}}{\exp(-\lambda_i\xi)} \\ &= \exp(-\lambda_i c) \end{aligned} \quad (7)$$

と ξ とは独立に表される。すなわち、点検時刻 τ_A において健全度が i と判定され、次の点検時刻 $\tau_B = \tau_A + c$ においても健全度が i と判定される確率は、マルコフ推移確率として、

$$\pi_{i,i}(c) = \text{Prob}[h(\tau_B) = i | h(\tau_A) = i] = \exp(-\lambda_i c) \quad (8)$$

と表すことができる。さらに、ハザード関数について $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$) と仮定し、微小期間 $[\tau_A, \tau_A + \Delta\tau]$ で健全度が i から $i+1$ 以外に推移することはないと仮定すると、指数ハザード関数を用いて、点検時刻 τ_A と $\tau_B = \tau_A + c$ の間で健全度が i から j ($j > i$) に推移するマルコフ推移確率 $\pi_{i,j}(c)$ ($i = 1, \dots, I-2; j = i+1, \dots, I-1$) は、

$$\begin{aligned} \pi_{i,j}(c) &= \text{Prob}[h(\tau_B) = j | h(\tau_A) = i] \\ &= \sum_{m=i}^j \prod_{s=i}^{m-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_m} \prod_{s=m}^{j-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_{s+1} - \lambda_m} \exp(-\lambda_m c) \end{aligned} \quad (9)$$

と表すことができる⁴⁾。ただし、表記上の規則として、

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod_{s=i}^{m-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_m} = 1 \quad (m = i \text{ のとき}) \\ \prod_{s=m}^{j-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_{s+1} - \lambda_m} = 1 \quad (m = j \text{ のとき}) \end{array} \right.$$

が成立すると考える。さらに、表記の便宜上、

$$\begin{aligned} & \prod_{s=i, \neq m}^{j-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_m} \exp(-\lambda_m c) \\ &= \prod_{s=i}^{m-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_m} \prod_{s=m}^{j-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_{s+1} - \lambda_m} \exp(-\lambda_m c) \end{aligned}$$

と簡略化する。また、 $\pi_{i,I}(c)$ に関しては、マルコフ推移確率の条件より次式で表すことができる。

$$\pi_{i,I}(c) = 1 - \sum_{j=i}^{I-1} \pi_{i,j}(c) \quad (i = 1, \dots, I-1) \quad (10)$$

このように健全度ごとに設定された指数ハザードモデルを用いたマルコフ推移確率推定モデルをマルコフ劣化ハザードモデルと呼ぶ²³⁾。これらのマルコフ推移確率行列は時間的整合性条件⁴⁾

$$\mathbf{\Pi}(nc) = \{\mathbf{\Pi}(c)\}^n \quad (11)$$

を満足する。ただし、 n は整数である。

マルコフ劣化ハザードモデルを用いることにより、アセットマネジメントのためのリスク管理指標を導出できる。当該健全度にはじめて到達した時点から、劣化が進展して次の健全度に進むまでの期待期間長（以下、期待寿命と呼ぶ）は、生存関数 $\tilde{F}_i(y_i)$ を用いて

$$RMD_i = \int_0^{\infty} \tilde{F}_i(y_i) dy_i \quad (12)$$

と表される²¹⁾。ここで、指数ハザード関数を用いた生存関数 $\tilde{F}_i(y_i)$ が式 (6) で表されることに留意すれば、期待寿命は次式で表される。

$$RMD_i = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda_i y_i) dy_i = \frac{1}{\lambda_i} \quad (13)$$

式 (13) を用いることにより、初期時点からの経過時間と社会基盤施設の平均的な健全度との対応関係を求めることができる。

(3) 空間的劣化過程モデル

離散的時間軸 $t_{z+1} = t_z + a$ ($z = 0, 1, 2, \dots$) を定義し、 t_z を時点と呼びカレンダー時刻と区別する。 $t_z = 0$ であり a は単位期間長である。あるスパンに着目する。当該スパンは、橋軸方向に P 個のパネル、橋軸直角方向に Q 個のパネルで構成されている。個々のパネルに位置 ID(p, q) ($p = 1, \dots, P; q = 1, \dots, Q$) を付与する。パネル (p, q) の健全度 i ($i = 1, \dots, I-1$) の時点 t_z におけるハザード率を、

$$\begin{aligned} & \lambda_{i,p,q,z} \\ &= \exp(\beta_i \mathbf{x}'_{p,q} + u_{i,p,q,z}) \\ & \quad + \rho_1 \{(\lambda_{i,p-1,q,z} - \lambda_{i,p,q,z}) \\ & \quad \quad + (\lambda_{i,p+1,q,z} - \lambda_{i,p,q,z})\} \\ & \quad + \rho_2 \{(\lambda_{i,p,q-1,z} - \lambda_{i,p,q,z}) \\ & \quad \quad + (\lambda_{i,p,q+1,z} - \lambda_{i,p,q,z})\} \quad (14) \end{aligned}$$

と定義する。期間 $[t_z, t_{z+1})$ の劣化過程の推移は期首 t_z のハザード率を用いて表されるとし、ハザード率 $\lambda_{i,p,q,z}$ は期間 $[t_z, t_{z+1})$ で一定と仮定する。 $\mathbf{x}_{p,q} = (x_{p,q,1}, \dots, x_{p,q,M})$ は特性変数ベクトルであり、健全度、時間に関して不変とする。 $\beta_i = (\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,M})$ はパラメータベクトルであり、 $\beta_{i,1}$ は定数項を表すとし、 $x_{p,q,1} = 1$ とする。記号「 $'$ 」は転置操作を表す。 $u_{i,p,q,z}$ はパネル (p, q) に隣接する健全度の影響を表す空間的連鎖項であり、

$$\begin{aligned} & u_{i,p,q,z} \\ &= \sum_{j=i+1}^{I-1} \varepsilon_{p-1,q,j,z} \alpha_j + \varepsilon_{p+1,q,j,z} \alpha_j \\ & \quad + \rho_c (\varepsilon_{p,q-1,j,z} \alpha_j + \varepsilon_{p,q+1,j,z} \alpha_j) \quad (15) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{p+1,q,j,z} = \begin{cases} 1 & (i_{p,q,z} = j) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \quad (16)$$

と定義する。なお、 $i_{p,q,z}$ は、時点 t_z におけるパネル (p, q) の健全度であり、 $\varepsilon_{0,q,j,z} = 0$ 、 $\varepsilon_{P+1,q,j,z} = 0$ 、 $\varepsilon_{p,0,j,z} = 0$ 、 $\varepsilon_{p,Q+1,j,z} = 0$ である。 α_i は健全度 i のパネルが隣接するパネルのハザード率に与える影響を表す空間的連鎖パラメータである。 α_1 は定義されない。 ρ_c は空間的連鎖性の異方性を表すパラメータである。

式 (15) に示すように、本研究では、着目するパネルに隣接するパネルのうち、着目するパネルより健全度が大きいパネルのみが影響を与えると仮定する。また、式 (14) のはハザード率の異質性の空間的分布を表す空間的異質性項である。 ρ_1 は健全度 i のハザード率の橋軸方向の空間的異質性の自己相関係数を、 ρ_2 は橋軸直角方向の空間的異質性分布の自己相関係数をそれぞれ表すパラメータである。ここでは、混合マルコフ劣化ハザードモデル⁶⁾ の考え方を踏襲し、全ての健全度に対して同一かつ定常的な異質性がハザード率に比例的に影響を与えるとし、空間的異質性の自己相関係数を全ての健全度で共通と仮定する。なお、

$$\begin{aligned} & \lambda_{i,p,q,z} = 0 \\ & (p = 0 \cup p = P + 1 \cup q = 0 \cup q = Q + 1) \end{aligned} \quad (17)$$

と仮定する。ここで、橋軸方向、橋軸直角方向それぞれの $PQ \times PQ$ の空間重み付け行列を \mathbf{W}_1 、 \mathbf{W}_2 とし、それらの $a \times b$ 要素を、

$$w_{1,a,b} = \begin{cases} 1 & (a = b \pm 1) \\ 1 & (a = b \cap a = (v-1)Q + 1 \cap 1 \leq v \leq P) \\ 1 & (a = b \cap a = vQ \cap 1 \leq v \leq P) \\ 0 & (Otherwise) \end{cases} \quad (18)$$

$$w_{2,a,b} = \begin{cases} 1 & (a = b \pm Q) \\ 1 & (a = b \cap a \leq Q) \\ 1 & (a = b \cap (P-1)Q \leq a \leq PQ) \\ 0 & (\text{Otherwise}) \end{cases} \quad (19)$$

とし、ハザード率ベクトルを $\lambda_{i,z} = (\lambda_{i,1,1,z}, \dots, \lambda_{i,1,Q,z}, \lambda_{i,2,1,z}, \dots, \lambda_{i,P,Q,z})'$ として、 $(q-1)P+q$ 番目の要素を $\eta_{i,p,q,z} = \exp(\beta_i \mathbf{x}'_{p,q} + u_{i,p,q,z})$ とするベクトル $\eta_{i,z} = (\eta_{i,1,1,z}, \dots, \eta_{i,P,Q,z})'$ を用いて、式 (14) は、

$$\begin{aligned} \lambda_{i,z} &= \eta_{i,z} + \rho_1 (\mathbf{W}_1 \lambda_{i,z} - 2\lambda_{i,z}) \\ &\quad + \rho_2 (\mathbf{W}_2 \lambda_{i,z} - 2\lambda_{i,z}) \end{aligned} \quad (20)$$

と表現することができる。式変形により、

$$\begin{aligned} \lambda_{i,z} &= \{(1 + 2\rho_1 + 2\rho_2)\mathbf{I}_{PQ} - \rho_1 \mathbf{W}_1 - \rho_2 \mathbf{W}_2\}' \eta_{i,z} \end{aligned} \quad (21)$$

が得られる。 \mathbf{I}_a は $a \times a$ の単位行列である。ただし、式 (21) により定義されるハザード率は、 $\lambda_{i,p,q,z} > 0$ を満足するとする。

ここで、時点 t_z と t_{z+1} 間のスパン内の全てのパネルの健全度の集合 $\mathbf{i}_z = (i_{1,1,z}, \dots, i_{1,Q,z}, i_{2,1,z}, \dots, i_{P,Q,z})$ 、 $\mathbf{i}_{z+1} = (i_{1,1,z+1}, \dots, i_{1,Q,z+1}, i_{2,1,z+1}, \dots, i_{P,Q,z+1})$ の推移をとを表すことを考える。 λ_z を式 (21) のハザード率ベクトルを用いて定義されるハザード率集合とし、 $\lambda_z = (\lambda_{1,z}, \dots, \lambda_{I-1,z})$ とする。 $(q-1)P+q$ 番目の要素を式 (8), (9), (10) により定式化されるマルコフ推移確率 $\pi_{i_{p,q,z}, i_{p,q,z+1}}(c)$ とするベクトル $\pi(c, \mathbf{i}_z, \mathbf{i}_{z+1}, \lambda_z)$ を定義する。マルコフ推移確率 $\pi_{i_{p,q,z}, i_{p,q,z+1}}(c)$ は、ハザード率集合の要素 $\lambda_{i_{p,q,z}, p, q, z}, \dots, \lambda_{i_{p,q,z+1}, p, q, z}$ のみを用いて算出できるが、 $\lambda_{i_{p,q,z}, p, q, z}, \dots, \lambda_{i_{p,q,z+1}, p, q, z}$ はハザード率集合の他の要素と相関構造を持つ。このことを明示するために $\pi(c, \mathbf{i}_z, \mathbf{i}_{z+1}, \lambda_z)$ と表している。 \mathbf{i}_z を所与としたときの \mathbf{i}_{z+1} の生起確率は、 $\pi(c, \mathbf{i}_z, \mathbf{i}_{z+1}, \lambda_z)$ の要素の総和となる。

4. ベイズ推定

(1) ベイズ推定の考え方

本研究では、MCMC 法を用いたベイズ推定により空間的劣化過程モデルのパラメータの事後分布からの標本を得る。得られた標本を用いて事後分布の統計量が算出できる。さらに、得られた標本を用いて、パラメータの信用域を正規性を仮定することなく評価できる。さらに、MCMC 法による標本を用いて、汎化誤差の漸近不偏推定量である WAIC²⁰⁾ が算出でき、WAIC が最小

となるようにモデル選択を行うことにより、i) モデルが統計的に正則でない場合、ii) サンプルサイズが十分でない場合にも、モデル推計精度やモデル選択結果を議論することができる²⁰⁾。特に、本研究で提案する空間的劣化過程モデルは、空間的連鎖性を表現するためのモデルが隠れマルコフモデルと同様のモデル構造を持ち、統計的に正則でない。そのため、本研究では、MCMC 法によりモデルパラメータを推定し、MCMC 法の標本を用いた WAIC によりモデルの優位性を議論する。

ここで、未知パラメータベクトルを $\theta = (\beta, \rho, \alpha, \rho_c)$ と整理する。 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{I-1})$ 、 $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ 、 $\alpha = (\alpha_2, \dots, \alpha_I)$ である。 θ が確率変数で、その事前確率密度関数を $\pi(\theta)$ とする。観測データ Ξ が既知であるとき、未知パラメータベクトル θ の同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\Xi)$ は尤度関数 $L(\theta|\Xi)$ と事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ を用いて、ベイズの定理より、

$$\pi(\theta|\Xi) \propto L(\theta|\Xi)\pi(\theta) \quad (22)$$

と表現される。

(2) 尤度関数

スパン k に着目する。スパン k の全てのパネルが同一の経過年数を持ち、それらのパネルに対してはスパン単位で同時に全てのパネルへの点検が実施されている状況を想定する。スパン k の点検時点を表すために、サンプル時間軸 $\bar{t}_{v,k} = \bar{t}_{v-1,k} + a\bar{c}_{v,k}$ ($v = 2, \dots, V_k$) を定義する。なお、 $\bar{t}_{1,k} = 0$ とする。さらに、 V_k はスパン k の点検回数であり、それぞれの点検間隔が単位期間長 a と整数 $\bar{c}_{v,k}$ を用いて $a\bar{c}_{v,k}$ と表せるとする。記号「 $\bar{\cdot}$ 」は観測値を表す。スパン k における可観測情報を $\bar{\Xi}_k = (\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{i}}_k, \bar{\mathbf{c}}_k)$ と整理する。ここに、 $\bar{\mathbf{x}}_k = (\bar{\mathbf{x}}_{k,1,1}, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{k,P_k,Q_k})$ 、 $\bar{\mathbf{i}}_k = (\bar{i}_{k,1,1}, \dots, \bar{i}_{k,P_k,Q_k})$ 、 $\bar{\mathbf{i}}_{k,p,q} = (\bar{i}_{k,p,q,1}, \dots, \bar{i}_{k,p,q,V_k})$ 、 $\bar{\mathbf{c}}_k = (\bar{c}_{2,k}, \dots, \bar{c}_{V_k,k})$ である。空間的劣化過程モデルでは、マルコフ推移確率はハザード関数を通じて相関性を持つ。そのため、尤度関数を定式化する際には、スパン k の時点 $\bar{t}_{v,k}$ での全てのパネルでの健全度 $\bar{\mathbf{i}}_{k,v} = (\bar{i}_{k,1,1,v}, \dots, \bar{i}_{k,P_k,Q_k,v})$ の同時生起確率密度を定式化する必要がある。パラメータ θ を所与として、時点 $\bar{t}_{v-1,k}$ に健全度 $\bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}$ が観測されたときに時点 $\bar{t}_{v,k}$ に健全度 $\bar{\mathbf{i}}_{k,v}$ が観測される確率 $\ell(\bar{\mathbf{i}}_{k,v}, \bar{\mathbf{c}}_{v,k} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \theta)$ は、再帰的に、

$$\begin{aligned} &\ell(\bar{\mathbf{i}}_{k,v}, \bar{\mathbf{c}}_{v,k} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \theta) \\ &= \prod_{f=1}^{P_k Q_k} m_f(\bar{\mathbf{i}}_{k,v}, \bar{\mathbf{c}}_{v,k} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \theta) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 & m(\bar{\mathbf{i}}_{k,v}, \bar{c}_{v,k} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \boldsymbol{\theta}) \\
 = & \sum_{\mathbf{d}_{k,v,1} \in \mathbf{D}_{k,v,1}} \pi(a, \mathbf{d}_{k,v,1} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \boldsymbol{\theta}) \\
 & \cdot \mathbf{h}(a, k, v, 2, \mathbf{d}_{k,v,1} | \boldsymbol{\theta}) \\
 & \mathbf{h}(a, k, v, z, \mathbf{d}_{k,v,z-1} | \boldsymbol{\theta})
 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 = & \sum_{\mathbf{d}_{k,v,z} \in \mathbf{D}_{k,v,z}} \pi(a, \mathbf{d}_{k,v,z} | \bar{\mathbf{d}}_{k,v,z-1}, \boldsymbol{\theta}) \\
 & \cdot \mathbf{h}(a, k, v, z+1, \mathbf{d}_{k,v,z} | \boldsymbol{\theta}) \\
 (2 \leq z \leq \bar{c}_{v,k} - 1)
 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{h}(a, k, v, \bar{c}_{v,k}, \mathbf{d}_{k,v,\bar{c}_{v,k}-1} | \boldsymbol{\theta}) \\
 = & \sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{D}_{k,v,\bar{c}_{v,k}}} \pi(a, \mathbf{d} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v,\bar{c}_{v,k}-1}, \boldsymbol{\theta})
 \end{aligned} \quad (26)$$

と定義できる． $m_f(\bar{\mathbf{i}}_{k,v}, \bar{c}_{v,k} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \boldsymbol{\theta})$ は $m(\bar{\mathbf{i}}_{k,v}, \bar{c}_{v,k} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \boldsymbol{\theta})$ の f ($f = 1, \dots, P_k Q_k$) 番目の要素である．ここに、

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{D}_{k,v,z} \\
 = & \mathbf{D}_{k,v,z,1,1} \times \dots \times \mathbf{D}_{k,v,z,1,Q_k} \times \mathbf{D}_{k,v,z,2,1} \times \\
 & \dots \times \mathbf{D}_{k,v,z,P_k,Q_k} \\
 (1 \leq z \leq \bar{c}_{v,k})
 \end{aligned} \quad (27)$$

であり、

$$\mathbf{D}_{k,v,1,p,q} = \{\bar{i}_{k,p,q,v-1}, \bar{i}_{k,p,q,v-1} + 1, \dots, \bar{i}_{k,p,q,v}\} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_{k,v,z,p,q} &= \{d_{k,v,z-1,p,q}, d_{k,v,z-1,p,q} + 1, \dots, \bar{i}_{k,p,q,v}\} \\
 (2 \leq z \leq \bar{c}_{v,k})
 \end{aligned} \quad (29)$$

である． $d_{k,v,z-1,p,q}$ は $\mathbf{d}_{k,v,z-1}$ の $(q-1)P_k + q$ 番目の要素であり、記号「 \times 」は集合のデカルト積を表す．なお、式(23)から(29)では表記の簡略化のため $\bar{\mathbf{x}}_k$ を省略している．また、式(3)の $\pi(c, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \boldsymbol{\lambda}_{k,z})$ を $\pi(c, \mathbf{i}_2 | \mathbf{i}_1, \boldsymbol{\theta})$ と書き換えている．このとき、全てのスパン k において時点 $\bar{t}_{1,k}$ での健全度の生起確率を 1 と仮定すると、 $\bar{\Xi} = (\bar{\Xi}_1, \dots, \bar{\Xi}_K)$ の同時生起確率は尤度関数として、

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} | \bar{\Xi}) = \prod_{k=1}^K \prod_{v=2}^{V_k} \ell(\bar{\mathbf{i}}_{k,v}, \bar{c}_{v,k} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \boldsymbol{\theta}) \quad (30)$$

と表すことができる．

(3) 完備化尤度関数

式(30)で表される尤度関数は、極めて多くの項を含んでおり、算出の際の計算量が膨大となる．その問題を解消するために、ここでは、尤度関数の完備化操作²⁴⁾を行い、MCMC法によるモデル推定を行う．

時点 $\bar{t}_{v-1,k}$ に健全度 $\bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}$ が観測されたときの時点 $\bar{t}_{v,k}$ での健全度 $\bar{\mathbf{i}}_{k,v}$ への推移過程で、時点 $\bar{t}_{v-1,k} + az$ ($z = 1, \dots, \bar{c}_{v,k} - 1$) におけるパネル (p, q) の健全度 $d_{k,v,z,p,q}$ を確率変数である潜在変数として取り扱い、潜在変数ベクトルを $\tilde{\mathbf{d}}_{k,v} = (\tilde{d}_{k,v,1,1,1}, \dots, \tilde{d}_{k,v,1,1,Q_k}, \tilde{d}_{k,v,1,2,1}, \dots, \tilde{d}_{k,v,1,P_k,Q_k}, \tilde{d}_{k,v,2,1,1}, \dots,$

$\tilde{d}_{k,v,\bar{c}_{v,k}-1,P_k,Q_k})$ と定義する．記号「 \sim 」は潜在変数を表す．潜在変数に関して、

$$\begin{aligned}
 \bar{i}_{k,p,q,v-1} &\leq \tilde{d}_{k,v,1,p,q} \leq \tilde{d}_{k,v,2,p,q} \leq \dots \\
 &\leq \tilde{d}_{k,v,\bar{c}_{v,k}-1,p,q} \leq \bar{i}_{k,p,q,v}
 \end{aligned} \quad (31)$$

が全てのパネル (p, q) において成立する．パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を所与として、時点 $\bar{t}_{v-1,k}$ に健全度 $\bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}$ が観測されたときに、潜在変数ベクトル $\tilde{\mathbf{d}}_{k,v}$ で表される健全度を個々のパネルが個々の時点で経て、時点 $\bar{t}_{v,k}$ に健全度 $\bar{\mathbf{i}}_{k,v}$ が観測される確率 $\ell^*(\bar{\mathbf{i}}_{k,v}, \bar{c}_{v,k}, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \boldsymbol{\theta})$ は、

$$\begin{aligned}
 & \ell^*(\bar{\mathbf{i}}_{k,v}, \bar{c}_{v,k}, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \boldsymbol{\theta}) \\
 = & \prod_{f=1}^{P_k Q_k} m_f^*(\bar{\mathbf{i}}_{k,v}, \bar{c}_{v,k}, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \boldsymbol{\theta}) \\
 & m^*(\bar{\mathbf{i}}_{k,v}, \bar{c}_{v,k}, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \boldsymbol{\theta}) \\
 = & \pi(a, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,1} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \boldsymbol{\theta}) \\
 & \circ \pi(a, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,2} | \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,1}, \boldsymbol{\theta}) \\
 & \circ \pi(a, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,3} | \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,2}, \boldsymbol{\theta}) \circ \dots \\
 & \circ \pi(a, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,\bar{c}_{v,k}-1} | \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,\bar{c}_{v,k}-2}, \boldsymbol{\theta}) \\
 & \circ \pi(a, \bar{\mathbf{i}}_{k,v} | \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,\bar{c}_{v,k}-1}, \boldsymbol{\theta})
 \end{aligned} \quad (32)$$

と表すことができ、完備化尤度関数は、

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}^*(\boldsymbol{\theta} | \bar{\Xi}, \tilde{\mathbf{d}}) \\
 = & \prod_{k=1}^K \prod_{v=2}^{V_k} \ell^*(\bar{\mathbf{i}}_{k,v}, \bar{c}_{v,k}, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \boldsymbol{\theta})
 \end{aligned} \quad (34)$$

と定式化できる．なお、 $m_f^*(\bar{\mathbf{i}}_{k,v}, \bar{c}_{v,k}, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \boldsymbol{\theta})$ は、 $m^*(\bar{\mathbf{i}}_{k,v}, \bar{c}_{v,k}, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v} | \bar{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \boldsymbol{\theta})$ の f ($f = 1, \dots, P_k Q_k$) 番目の要素である．また、 $\tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z} = (\tilde{d}_{k,v,z,1,1}, \dots, \tilde{d}_{k,v,z,1,Q_k}, \tilde{d}_{k,v,z,2,1}, \dots, \tilde{d}_{k,v,z,P_k,Q_k})$ 、 $\tilde{\mathbf{d}} = (\tilde{\mathbf{d}}_{1,2}, \dots, \tilde{\mathbf{d}}_{1,V_1}, \tilde{\mathbf{d}}_{2,1}, \dots, \tilde{\mathbf{d}}_{K,V_K})$ であり、記号「 \circ 」はアダマール積を表す．MCMC法において、式(34)の完備化尤度関数を用いてパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ と潜在変数 $\tilde{\mathbf{d}}$ を同時にサンプリングすることにより推定されるパラメータは、式(30)の尤度関数を用いた推定結果と一致することが知られている²⁵⁾．

(4) 潜在変数の条件付き生起確率

潜在変数をサンプリングするための生起確率を定式化する．ここで、 $\tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z}$ から要素 $\tilde{d}_{k,v,z,p,q}$ を取り除いたベクトルを、 $\tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z,-p,-q}$ とする． $\tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z,-p,-q}$ を既知として、 $\tilde{d}_{k,v,z,p,q}$ を標本空間 $\phi_{k,v,z,p,q} = \{\nu_{k,v,z,p,q,1}, \nu_{k,v,z,p,q,1} + 1, \dots, \nu_{k,v,z,p,q,2}\}$ を持つ確率変数とする．ここに、

$$\nu_{k,v,z,p,q,1} = \begin{cases} \bar{i}_{k,p,q,v-1} & (z = 1) \\ \tilde{d}_{k,v,z-1,p,q} & (\text{Otherwise}) \end{cases} \quad (35)$$

$$\nu_{k,v,z,p,q,2} = \begin{cases} \bar{i}_{k,p,q,v} & (z = \bar{c}_{v,k} - 1) \\ \tilde{d}_{k,v,z+1,p,q} & (\text{Otherwise}) \end{cases} \quad (36)$$

である。さらに、 $\tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z}$ の要素 $\tilde{d}_{k,v,z,p,q}$ を κ ($\kappa \in \phi_{k,v,z,p,q}$) としたベクトルを $\tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z,p,q,\kappa}$ とする。 $\tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z,-p,-q}$, $\tilde{\mathbf{i}}_{k,v-1}$, $\tilde{\mathbf{i}}_{k,v}$, パラメータ θ を所与とした場合の、 κ の条件付き生起確率 $s(\kappa|\tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z,-p,-q}, \tilde{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \tilde{\mathbf{i}}_{k,v}, \theta)$ は、

$$\begin{aligned} & s(\kappa|\tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z,-p,-q}, \tilde{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \tilde{\mathbf{i}}_{k,v}, \theta) \\ &= \frac{\ell^*(\tilde{\mathbf{i}}_{k,v}, \tilde{\mathbf{c}}_{v,k}, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z,p,q,\kappa}|\tilde{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \theta)}{\sum_{\kappa \in \phi_{k,v,z,p,q}} \ell^*(\tilde{\mathbf{i}}_{k,v}, \tilde{\mathbf{c}}_{v,k}, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z,p,q,\kappa}|\tilde{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \theta)} \\ &= \frac{\delta_{(q-1)P_k+q,k,v,z}(a, \kappa|\theta)}{\sum_{\kappa \in \phi_{k,v,z,p,q}} \delta_{(q-1)P_k+q,k,v,z}(a, \kappa|\theta)} \end{aligned} \quad (37)$$

と表現できる。なお、

$$\delta_{f,k,v,z}(a, \kappa|\theta) = \begin{cases} \pi_f(a, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z,p,q,\kappa}|\tilde{\mathbf{i}}_{k,v-1}, \theta) \cdot \pi_f(a, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z+1}|\tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z,p,q,\kappa}, \theta) & (z=1) \\ \pi_f(a, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z,p,q,\kappa}|\tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z-1,p,q,\kappa}, \theta) \cdot \pi_f(a, \tilde{\mathbf{i}}_{k,v}|\tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z,p,q,\kappa}, \theta) & (z=\bar{c}_{v,k}-1) \\ \pi_f(a, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z,p,q,\kappa}|\tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z-1,p,q,\kappa}, \theta) \cdot \pi_f(a, \tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z+1,p,q,\kappa}|\tilde{\mathbf{d}}_{k,v,z,p,q,\kappa}, \theta) & (Otherwise) \end{cases} \quad (38)$$

である。 $\pi_f(\cdot, \cdot, \cdot)$ ($f=1, \dots, P_k Q_k$) は、 $\pi(\cdot, \cdot, \cdot)$ の f 番目の要素を表す。

(5) 同時事後確率密度

式 (34) の完備化尤度関数を用いてパラメータ θ の同時事後確率密度を定式化する。正規分布を用いて、 $\beta_{i,m}$ ($i=1, \dots, I-1; m=1, \dots, M$), ρ_ζ ($\zeta=1, 2$), α_ω ($\omega=2, \dots, I$), ρ_c の事前確率密度を、

$$\pi(\beta_{i,m}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_{\beta_{i,m}})^2} \exp\left\{-\frac{(\beta_{i,m} - \mu_{\beta_{i,m}})^2}{2(\sigma_{\beta_{i,m}})^2}\right\} \quad (39)$$

$$\pi(\rho_\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_{\rho_\zeta})^2} \exp\left\{-\frac{(\rho_\zeta - \mu_{\rho_\zeta})^2}{2(\sigma_{\rho_\zeta})^2}\right\} \quad (40)$$

$$\pi(\alpha_\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_{\alpha_\omega})^2} \exp\left\{-\frac{(\alpha_\omega - \mu_{\alpha_\omega})^2}{2(\sigma_{\alpha_\omega})^2}\right\} \quad (41)$$

$$\pi(\rho_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_{\rho_c})^2} \exp\left\{-\frac{(\rho_c - \mu_{\rho_c})^2}{2(\sigma_{\rho_c})^2}\right\} \quad (42)$$

と特定化する。ここに、 $\mu_{\beta_{i,m}}$, μ_{ρ_ζ} , μ_{α_ω} , μ_{ρ_c} 及び $\sigma_{\beta_{i,m}}$, σ_{ρ_ζ} , σ_{α_ω} , σ_{ρ_c} は個々のパラメータ $\beta_{i,m}$, ρ_ζ , α_ω , ρ_c の事前分布の期待値と標準偏差である。 $\pi(\theta) = \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{m=1}^M \pi(\beta_{i,m}) \prod_{\zeta=1}^2 \pi(\rho_\zeta) \prod_{\omega=2}^I \pi(\alpha_\omega) \pi(\rho_c)$ として、同時事後確率密度は、

$$\pi(\theta|\Xi, \tilde{\mathbf{i}}) \propto \mathcal{L}^*(\theta|\Xi, \tilde{\mathbf{d}})\pi(\theta) \quad (43)$$

となる。式 (37) の潜在変数の条件付き生起確率と式 (43) の同時事後確率密度を用いて、MCMC 法によるパ

ラメータの事後分布のサンプリングが可能となる。具体的には、メトロポリス・ヘイスティングス法とギブスサンプリングを組み合わせた方法により、パラメータおよび潜在変数のサンプリングを行う。

5. おわりに

本研究では、高速道路橋 RC 床版の点検データに対して空間的異質性と空間的連鎖性を考慮した統計的劣化予測モデルを提案した。具体的には、スパン単位における異質性の空間的広がり（空間的異質性）と、一つのパネルの劣化進展が周辺パネルに及ぼす影響度合い（空間的連鎖性）をハザード率において考慮したマルコフ劣化ハザードモデルを定式化した。また、モデル推定方法として MCMC 法を用いた方法論により、WAIC を用いたモデルの比較における理論的正当性を担保しながら、提案するモデルのパラメータおよび潜在変数をサンプリングするための方法論を提案した。

第 57 回土木計画学研究発表会当日には、実在する高速道路 RC 床版の点検データを用いた実証分析結果を示し、本研究で提案する方法論の有用性を議論する。

参考文献

- 1) 中日本高速道路株式会社：点検基準及び資格に関する検討委員会 報告書，2015。
- 2) 水谷大二郎，小濱健吾，貝戸清之，田中晶大：集計的劣化過程モデルによる高速道路橋 RC 床版の劣化総合評価，土木学会論文集 F4, Vol.73, No.3, pp.50-69, 2017。
- 3) 瀬谷創，堤盛人：空間統計学 自然科学から人文・社会科学まで，朝倉書店，2014。
- 4) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集, No.801/I-73, pp.69-82, 2005。
- 5) 小林潔司，貝戸清之，林秀和：測定誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデル，土木学会論文集 D, Vol.64, No.3, pp.493-512, 2008。
- 6) 小濱健吾，岡田貢一，貝戸清之，小林潔司：劣化ハザード率評価とベンチマーキング，土木学会論文集 A, Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008。
- 7) 小林潔司，貝戸清之，江口利幸，大井明，起塚亮輔：舗装構造の階層的隠れマルコフ劣化モデル，土木学会論文集 D3, Vol.67, No.4, pp.422-440, 2011。
- 8) Nam, L. T., 貝戸清之，小林潔司，起塚亮輔：ポアソン隠れマルコフ劣化モデルによる舗装劣化過程のモデル化，土木学会論文集 F4, Vol.68, No.2, pp.62-79, 2012。
- 9) 貝戸清之，坂井康人，塚本成昭，水谷大二郎，小林潔司：多段階層混合マルコフ劣化ハザードモデル：ジョイント劣化評価への適用，土木学会論文集 F4, Vol.71, No.1, pp.1-18, 2015。
- 10) 水谷大二郎，貝戸清之，小林潔司，秀島栄三，山田洋太，平川恵士：判定基準変更を考慮した隠れマルコフ劣化ハザードモデル，土木学会論文集 D3, Vol.71, No.2, pp.70-89, 2015。
- 11) 小林潔司，貝戸清之，大井明，Thao, N. D., 北浦直樹：データ欠損を考慮した複合的隠れマルコフ劣化モデルの推計，土木学会論文集 E1, Vol.71, No.2, pp.63-80, 2015。
- 12) 水谷大二郎，小濱健吾，貝戸清之，小林潔司：社会基盤施

- 設の多元的劣化過程モデル, 土木学会論文集 D3, Vol.72, No.1, pp.34-51, 2016.
- 13) 小林潔司, 貝戸清之, 小濱健吾, 早矢仕廉太郎, 深谷渉: 事業体効率性評価のための確率的劣化フロンティア分析, 土木学会論文集 D3, Vol.72, No.2, pp.173-190, 2016.
 - 14) 塚井誠人, 江尻良, 奥村誠, 小林潔司: 社会資本の生産性とスピルオーバー効果, 土木学会論文集, No.716/IV-57, pp.53-67, 2002.
 - 15) 堤盛人, 瀬谷創: 便益計測への空間ヘドニック・アプローチの適用, 土木学会論文集 D, Vol.66, No.2, pp.178-196, 2005.
 - 16) 堤盛人, 瀬谷創: 土木計画における応用空間統計学の可能性, 土木学会論文集 D, Vol.68, No.5, pp.1-120, 2012.
 - 17) 奥村誠, 藤井堅, 塚井誠人: 空間的自己相関を考慮した鋼板腐食形状のモデル化, 土木学会論文集, No.672/VI-50, pp.109-116, 2001.
 - 18) Lethanh, N., Richmond, C. and Adey, B. T.: Investigation of the ability to estimate values of road section condition indicators based on their spatial correlation, *Journal of Infrastructure Systems*, Vol.22, Issue 3, 04016006, 2016.
 - 19) 早矢仕廉太郎, 小濱健吾, 松岡弘大, 貝戸清之: RC 高欄を対象とした空間的連鎖性を考慮した剥離・剥落発生モデル, コンクリート工学年次論文集, 日本コンクリート工学協会, Vol.36, No.2, pp.1363-1368, 2014.
 - 20) 渡辺澄夫: ベイズ統計の理論と方法, コロナ社, 2012.
 - 21) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
 - 22) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
 - 23) 貝戸清之, 小林潔司: マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定, 土木学会論文集 A, Vol.63, No.2, pp.336-355, 2007.
 - 24) Dempster, A. P., Laird, N. M. and Rubin, D. B.: Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol.39, pp.1-38, 1977.
 - 25) Diebolt, J. and Robert, C. P.: Estimation of Finite Mixture Distributions through Bayesian Sampling, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol.56, pp.363-375, 1994.

(2018. 4. 25 受付)

MARKOV DETERIORATION HAZARD MODEL CONSIDERING SPATIAL HETEROGENEITY AND SPATIAL LINKAGE

Akihiro TANAKA, Daijiro MIZUTANI, Kengo OBAMA and Kiyoyuki KAITO