

群論的スペクトル解析による 空間集積抽出手法の高度化

恩田 幹久¹・村上 大輔²・池田 清宏³・高山 雄貴⁴・大澤 実⁵・木暮 洋介⁶

¹学生会員 東北大学 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: mikihisa.onda.p8@dc.tohoku.ac.jp

²正会員 統計数理研究所助教 モデリング研究系 (〒 190-8562 東京都立川市緑町 10-3)

E-mail: dmuraka@ism.ac.jp

³正会員 東北大学教授 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: kiyohiro.ikedate@tohoku.ac.jp

⁴正会員 金沢大学准教授 理工研究域 (〒 920-1192 石川県金沢市角間町)

E-mail: ytakayama@se.kanazawa-u.ac.jp

⁵正会員 東北大学助教 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: minoru.osawa.a5@tohoku.ac.jp

⁶学生会員 東北大学 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: yosuke.kogure.t2@dc.tohoku.ac.jp

集積地が正六角形状の空間パターンをなすという Christaller¹⁾ の中心地理論は、経済地理学において古くから知られているものの、実データにおける正六角形パターンを定量化・検定する方法は、十分に確立されてこなかった。Ikeda 他²⁾ は正六角形状の集積パターンを検出する手法を開発したものの、彼らの手法にもまた次の課題が残されている：(i) 対象領域の取り方に分析結果が依存する点、(ii) 検出されたパターンの有意性が不明である点。そこで本稿では、課題 (i)、(ii) に対処することで、中心地理論に裏付けられた空間集積パターンをより客観的に解析するための手法を開発する。(i) を解消するために、対象領域を探索する最適化問題を作成する。(ii) の解消のために、permutation test による統計的な検定を導入する。また、提案手法を南ドイツ・東アメリカの人口データに適用することで、実空間における中心地理論の妥当性を検証する。

Key Words: *central place theory, group theory, genetic algorithm, permutation test, population distribution*

1. はじめに

地理空間上での集中現象の分析は地理学における最も基本的なトピックの一つであり、人口集中、産業集積、生態群衆、疫病集積を含むあらゆる集中現象に対して膨大な研究が蓄積されてきた。それに呼応する形で空間集積の抽出手法もまた数多く提案されてきた(2章参照)。既存の集積抽出手法の多くは、データの空間パターンから集積域を特定しようという data-driven なアプローチをとる。data-driven な集積抽出手法は汎用的であり探索的な空間解析ツールとして幅広く用いられてきた(Exploratory spatial data analysis³⁾)。しかしながら、それらのアプローチでは空間集積の背後にあるメカニズムを考慮できない。その意味で、data-driven なアプローチは探索的解析手法の域を出ない。

一方、経済地理学ではミクロ経済理論に裏付けられた theory/model-driven な空間集積メカニズムの研究が活発である。経済理論に基づく数理モデルは、特に人口・産業集積の背後にあるメカニズムを理解・解明する上で有益といえよう。しかしながら、不均質かつ多地域

からなる実空間へ生産要素の地域間移動を考慮したモデルを応用する試みは、近年始められたばかりであり(Quantitative spatial economics⁴⁾)、実データへの応用の観点からは課題が残されている。

Theory/model-driven な研究には、人口や経済集積の配置は正六角形状の周期的なパターンを階層的に形成するという Christaller¹⁾ の中心地理論がある。この配置パターンは輸送費用の低下に伴う分岐現象を契機に内生的に形成・拡大していくことが明らかにされている。ここで分岐現象とは、理想化された均質な空間に発生する数理的概念であり、対称性が崩れるとともに均衡解の安定性と数に変化をもたらす現象である。Akamatsu 他⁵⁾ は均質な空間である円周経済(円周上に等間隔に立地点が配置された空間)上での分岐特性を解明し、NEGモデルの体系化を行っている。また、均質な空間上の分岐挙動の分析は、より実態に近い不均質な空間における集積メカニズムを理解する上でも重要となる。実際に Ikeda 他^{6),7)} は、線分経済、境界を持った正三角形格子といった不均質な空間の集積挙動が、円周経済や周期性を仮定した正三角形格子といった均質な空間

の分岐挙動との類似を示している。

分岐理論を実データの階層性や空間的周期性の検出に応用した研究が一定数存在する。例えば大澤他⁸⁾は、円周経済上での分岐現象を踏まえ、在来線沿線の人口分布に着目した 1 次元スペクトル分解を実施した。これにより、都市の人口規模に内在する空間周期性及と階層性を検出した。また、Ikeda 他²⁾は、周期性を仮定した正三角形格子状における分岐現象から得られるスペクトル情報を用いて、実データにも容易に適用可能な空間集積抽出手法を開発した。そして、この手法を南ドイツや米国東部の人口データに適用し、中心地理論と整合する空間周期性的の強さを実データから評価した。

以上のように、分岐理論に基づくスペクトル解析法は中心地理論と実空間上での空間集積を紐づける唯一のアプローチである。しかしながら、Ikeda 他²⁾の手法にはいくつかの重要な課題が残されている。まず、(i) 解析対象となる領域を恣意的に選択せざるを得ないのが現状である。解析結果がこの領域に依存するため、慎重に選ばねばならないが客観的な選定手法は確立されていない。また、(ii) 抽出された配置パターンの有意性を検定する方法が確立されていないため、仮に領域が適切に選定されたとしても、解析結果の解釈は恣意的になる。

そこで本研究では、課題 (i)、(ii) を改善し、中心地理論に裏付けられた空間集積パターンを客観的に抽出する手法を提案する。具体的には、(i) を解消するために、隣接行列の固有値による基準をもとに目的関数を設定し、対象領域を探索する最適化問題を作成する。(ii) を解消するために、permutation test による統計的な検定を導入する。そして、同手法を実データに適用し、実空間における中心地理論の妥当性を再検証する。

本論文の構成は以下のとおりである。第 2 章では関連研究を概観する。第 3 章では 2 次元平面上に発現する分岐パターンの解析手法について説明する。第 4 章では、課題 (i)、(ii) に対処しながら実データの六角形状パターンを解析する方法を新規に開発する。第 5 章で、南ドイツにおける 2011 年、東アメリカにおける 2014 年人口データを対象に解析を行う。最後に第 6 章で結果を要約する。

2. 関連研究

(1) 空間集積の抽出法

人口・産業の集積測度は古くから議論されており、例えばジニ係数や特化係数などがある。しかしながら、それらの多くは「位置」の概念が捨象された非空間測度であり、集中の空間的パターンを区別できないという限界がある⁹⁾。

そのような背景のもと、“空間的”な集積を検出しようという試みがさまざまな分野 (e.g., 経済学, 地理学, 土木計画学) で活発化してきている^{10),11),12)}。例えば Monte Carlo (MC) simulation によって尤もらしい空間集積域を特定しようという空間スキャン統計量¹³⁾は空間疫学, 生態学, 地理学などの幅広い分野で応用されてきた。NEG においても産業の階層的な空間集積パターンを MC simulation を用いて探査する方法を Mori & Smith¹⁴⁾が開発しており、類似の手法¹⁵⁾も提案されている。一方、近傍情報から空間集積の度合いを定量化しようという Local Indicators of Spatial Association (LISA)¹⁶⁾も幅広い分野で用いられてきた(瀬谷・堤¹⁷⁾参照)。G*統計量¹⁸⁾, Local Moran 統計量¹⁶⁾, Tango 統計量¹⁹⁾などは LISA の一種とみなせる。

(2) スペクトル情報に基づく空間集積の抽出法

(1) 節で紹介した各統計量は近傍情報から空間集積を判定する手法であり、例えば中心地理論の予測にある正六角形パターンという集積地同士の相対的な位置関係の解析には向かない。Ikeda 他²⁾のスペクトル解析法は、この「相対的」な位置関係を捉える点でユニークである。

なお、スペクトル情報を用いた(相対的な)空間パターンの解析手法は Ikeda 他²⁾以外にも存在する。例えば鶴飼・栗田^{20),21)}は鉄道駅間の近接行列のスペクトル情報を用いて地利値(アクセシビリティ指標の一種)の空間・時間パターンや階層性を解析した。生態学においても近接行列のスペクトル情報を用いて生物群集の空間階層パターンを解析する Moran's eigenvector mapping が広く用いられてきた(例えば Peres-Neto & Legendre²²⁾)。しかしながら、以上の解析手法は探索的な解析を目的としており、Ikeda 他²⁾のように分岐現象という空間集積の背後にあるメカニズムを考慮できない。

筆者らの知る限り、経済地理学の理論に立脚したスペクトル解析手法の試みは Ikeda 他²⁾のみである。この方法の高度化は、中心地理論と整合する形で空間階層性や周期性を解析するうえで重要である。

3. 群論的分岐理論による正六角形パターンの定式化

本章では、群論的分岐理論の応用による中心地理論に裏付けられた正六角形パターンの定式化を説明する(群論的分岐理論の詳細は、Ikeda & Murota²³⁾を参照)。

Ikeda 他²⁾にならい、解析対象地域は、2次元平面を覆う無限格子(中心地理論で仮定される等方性の平野に相当)の部分集合として定義される N 節点を持つ有

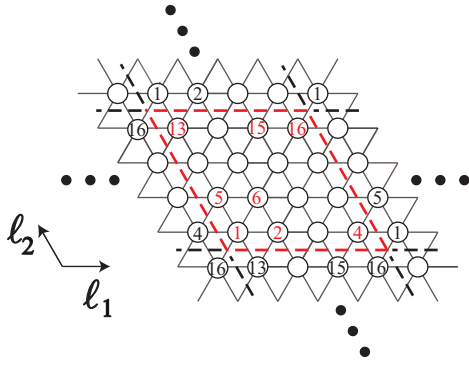


図-1 有限格子 \mathcal{H}_4 (数字は節点番号を表す)

有限格子 \mathcal{H}_n で与える:

$$\mathcal{H}_n = \{n'_1 \ell_1 + n'_2 \ell_2 \mid n_i \in \mathbb{Z} (i = 1, 2)\} \quad (1)$$

$$n'_1 \equiv n_1 \pmod{n}, \quad n'_2 \equiv n_2 \pmod{n} \quad (2)$$

$$n = \sqrt{N}.$$

ℓ_1 と ℓ_2 は座標軸, (n_1, n_2) は両軸で定義される節点座標を表す. 図-1 に示すように 2 軸は 120 度傾いているが, これは一辺が 120 度である正六角形パターンを定式化するためである. また, 式 (2) は 2 次元の周期境界を与える条件であり, 赤点線で示した平行四辺形を 1 単位とし, 無限平面を疑似的に表現している. このため, 例えば節点 1 は節点 2, 5, 6 の他に赤色で示した節点 4, 13, 16 とも連結している.

(1) 支配方程式の対称性

節点 $i \in \mathcal{H}_n$ における人口を λ_i として, 格子上における人口分布ベクトルを $\lambda = [\lambda_i] \in \mathbb{R}^N$ とする.

ある空間経済モデルによる均衡状態の安定性は,

$$\dot{\lambda} = \mathbf{F}(\lambda, \tau) \quad (3)$$

で示す調整ダイナミクスの定常状態の安定性により調べることができる. ここで $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^N$ の各成分は各節点に対応し, τ は分岐パラメータ (e.g., 輸送費用パラメータ) を表す. 定常状態とは支配方程式

$$\mathbf{F}(\lambda, \tau) = \mathbf{0} \quad (4)$$

を満たす解である. この定常状態の局所的な漸近安定性は Jacobi 行列の固有値, 分岐方向の固有ベクトルにより調べることができる. そして, 分岐パラメータ τ の変化により, Jacobi 行列 $J = \partial \mathbf{F} / \partial \lambda$ のある固有値がゼロとなる特異点 (λ_c, τ_c) に達した時, 分岐が発生し様々な幾何学パターンが発現する.

一様分布 $\lambda_i = \lambda_j, (\forall i, j)$ は均衡状態である. この一様分布を仮定したとき, 人口分布ベクトル λ は \mathcal{H}_n の対称性を表す群 G^1 に対し, 同変性

$$T(g)\lambda = \lambda, \quad g \in G \quad (5)$$

¹ \mathcal{H}_n の対称性を表す群 G の具体形は, $G = \langle r, s, p_1, p_2 \rangle$ である. ここで r は $\pi/3$ の時計周りの回転変換, s は ℓ_1 軸に関する鏡映変換, p_1, p_2 は ℓ_1, ℓ_2 軸に沿う並進変換を表す.

を持つ. ここで $T(g) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ は群 G の元 g の表現 (置換) 行列である. これにより支配方程式 \mathbf{F} が同変性

$$T(g)\mathbf{F}(\lambda, \tau) = \mathbf{F}(T(g)\lambda, \tau), \quad g \in G \quad (6)$$

を満たし, 群 G に対する支配方程式の対称性が具体的に表される. このとき, 支配方程式の Jacobi 行列 J は, 以下に示す対称条件 (可換性) を満たす:

$$T(g)J(\lambda, \tau) = J(\lambda, \tau)T(g), \quad g \in G. \quad (7)$$

(2) 座標変換行列

\mathcal{H}_n の群 G に対する $T(g)$ をもとに, Jacobi 行列 J を対角化する座標変換行列 $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ を導出できる. この行列 Q は, 直交性を有し ($Q^{-1}Q = E$), Jacobi 行列 J のように対称条件 (式 (7)) を満たす行列をブロック対角化する行列であり,

$$Q = [\dots, Q^\mu, \dots], \quad \mu \in R(G) \quad (8)$$

と群 G の既約表現 μ に対応するブロック行列 $Q^\mu \in \mathbb{R}^{N \times M}$ で構成される. ここで, 既約表現 μ は $\mu = (M)$ または $\mu = (M; k, \ell)$ と表し, M は既約表現 μ に対応した多重度, k と ℓ はそれぞれ波数を表す. $R(G)$ は既約表現 μ の集合全体を表す. 多重度 M とは, 群対称性の意味で等価な固有ベクトルの数であり, 対応する特異点におけるゼロ固有値の数と一致する値である.

また, Q の部分行列 Q^μ は

$$T(g)Q^\mu = Q^\mu T^\mu(g), \quad g \in G \quad (9)$$

により導出される. ここで $T^\mu(g) \in \mathbb{R}^{M \times M}$ は既約表現 μ の表現行列である. 既約表現 μ が同一の Q^μ の列ベクトル q_i^μ は対称性が同じである. 正三角形格子 \mathcal{H}_n の Q^μ の具体形は付録 1 にまとめる. このベクトル q_i^μ の分布を $\mu = (12; 2, 1)$ を例に図-2 に示す.

この座標変換行列と式 (7) を用いて, 式 (7) を満たす Jacobi 行列 J を

$$Q^{-1}JQ = \begin{bmatrix} \ddots & & & O \\ & J^\mu & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad J^\mu = \eta^\mu E \in \mathbb{R}^{M \times M} \quad (10)$$

と対角化できる. ここで, η^μ は既約表現 μ に対応した J の固有値である. このとき各ブロック行列 J^μ が特異となる点として, 分岐点を分類できる. Jacobi 行列 J の固有ベクトルは, $T(g)$ をもとに導出される Q の列ベクトル q_i^μ であるため, 支配方程式 \mathbf{F} を定義するモデルの子細によらず, \mathcal{H}_n の対称性を表す群 G のみに依存する.

(3) 一様分布より発現する分岐パターン

分岐点の多重度 $M \geq 2$ となる場合, ゼロ固有値に対応する固有ベクトルの線形結合の方向が分岐解の方向

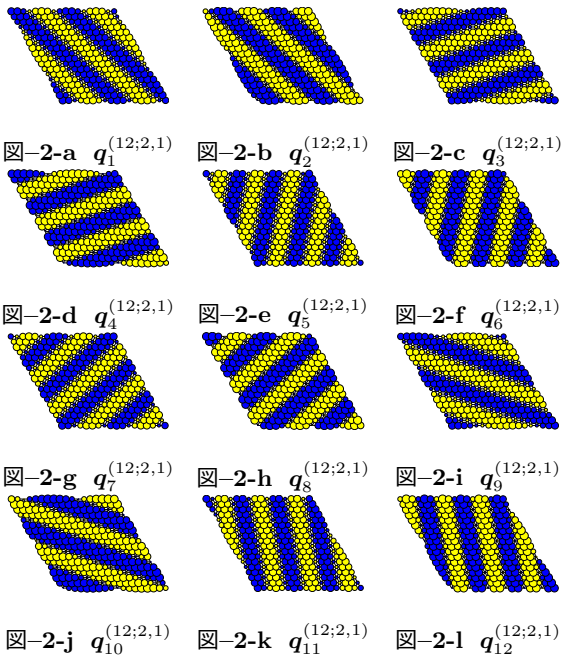


図-2 既約表現が同一なベクトル q_i^μ ($\mu = (12; 2, 1)$ の場合)

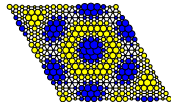


図-3 一様分布より発現する分岐パターン q^μ ($\mu = (12; 2, 1)$ の場合)

の候補となる。ここで、群 G に対する同変性 (式 (6)) を持つ支配方程式の分岐点に対して、群論的分岐理論を用いて分岐解を特定できる²³⁾。正三角形格子 \mathcal{H}_n 上において、一様分布状態から発現する分岐解として、正六角形パターンを示す理論分布 q^μ の発現が証明されており、多重度 M ごとに、以下のように表される：

$$q^\mu = \begin{cases} q_1^\mu & \text{for } M = 1 \\ q_1^\mu & \text{for } M = 2 \\ q_1^\mu + q_2^\mu + q_3^\mu & \text{for } M = 3 \\ q_1^\mu + q_3^\mu + q_5^\mu & \text{for } M = 6 \\ \sum_{i=1}^6 q_{2i-1}^\mu & \text{for } M = 12 \end{cases} \quad (11)$$

q^μ の具体的な分布形状を既約表現 $\mu = (12; 2, 1)$ を例に図-3 に示す。ここで、各節点の円の大きさが分岐パターンの要素の絶対値、青色が正、黄色が負を表す。

4. 群論的スペクトル解析の高度化

3章では格子空間上で正六角形パターンを記述するスペクトル情報を整理した。本章では客観的に同スペクトル情報を解析する方法を新規に開発する。

(1) 人口分布のスペクトル分解 (級数展開)

本節では、Ikeda 他²⁾と同様にスペクトル分解について説明する。格子領域内の各都市の人口を、各都市から最も近い格子の節点に割り当て、それによって得られる節点別人口からなるベクトルを λ とする。

この λ は、付録 I に示す座標変換行列 Q により、以下のようにスペクトル分解できる。

$$\lambda = \sum_{\mu} \sum_i c_i^\mu q_i^\mu \quad (12)$$

ここで、 q_i^μ は分岐パターンを既約表現することで得られる基底ベクトルであり、3章で導出したものである。 c_i^μ は重み係数 (振幅) であり、下式で推定する：

$$c_i^\mu = q_i^\mu \cdot \lambda \quad (13)$$

理論分布 (式 (11)) と同様に、各基底 (既約表現) $\mu \in R(G)$ に対する線形和を

$$q^\mu = \sum_i c_i^\mu q_i^\mu \quad (14)$$

とおくと、式 (12) は、以下のように書き直される：

$$\lambda = \sum_{\mu} q^\mu. \quad (15)$$

本論文ではパワースペクトルを

$$P^\mu = \|q^\mu\|^2 / \sum_{\nu \in R(G)} \|q^\nu\|^2 \quad (16)$$

と定義する。式 (14) の q^μ は、 c_i^μ を適切にとると式 (11) で示した分布となるベクトルである。

(2) 格子領域の探索法

1章で述べた様に、格子領域の選択は分析者に委ねられており、その選び方に分析結果が依存するという問題点がある。本論文では、人口分布の配置パターンを最も精度良く説明する格子領域を探索する。ただし、スペクトルの数は標本数 (接点数) に等しいため、全てのスペクトル情報を用いて精度を評価できない (必ず誤差は 0 となる)。そこで、隣接行列の正の固有値に対応する基底 (既約表現 μ) のみを用いた場合に精度が最大となる領域を探索する。(a) 固有値が正の基底 (既約表現 μ) は空間周期性の情報が集約された主成分、(b) 0 以下の基底 (既約表現 μ) は情報が縮減されたいわば冗長成分を示す。

周期境界を持つ有限格子 \mathcal{H}_n の隣接行列は、一様分布を仮定した Jacobi 行列と同様に、群 G の表現行列 $T(g)$ に対して群対称条件 (式 (7)) を満たす。このため、隣接行列は座標変換行列 Q でブロック対角化でき、固有ベクトルは q_i^μ である。固有値 η^μ が正となる基底 (既約表現 μ) を表-1 に、式 (11) の固有ベクトルの線形和 q^μ を図-4 に示す²⁾。以降では節点数 $N=324$ とする。この時、既約表現の総数は 37 である。

²⁾ そのほかの分布は、付録 II の図-10 にまとめる。

表-1 隣接行列 D の正の固有値

順位	μ	η^μ	順位	μ	η^μ
1	(1)	6.00	8	(12;3,1)	3.23
2	(6;1,0)	5.76	9	(6;4,0)	2.69
3	(6;1,1)	5.29	10	(12;3,2)	2.18
4	(6;2,0)	5.06	11	(12;4,1)	1.88
5	(12;2,1)	4.41	12	(6;5,0)	1.31
6	(6;3,0)	4.00	13	(6;3,3)	1.00
7	(6;2,2)	3.41	14	(12;4,2)	0.88
			15	(12;5,1)	0.53

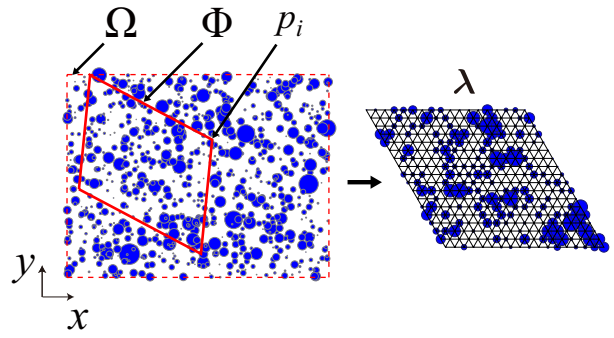


図-5 格子領域 Φ の探索

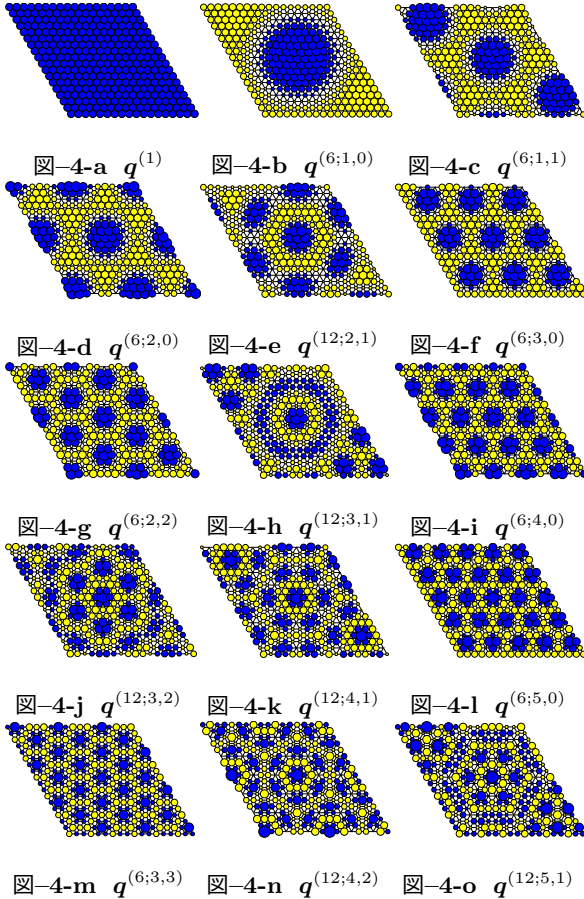


図-4 固有値が正の分岐パターン q^μ

この正の固有値をとる基底（既約表現 μ ）の集合を $R(G)_+$ とすると、格子領域の探索問題は次の通りに定式化される：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}^* &= \arg \max_{\mathbf{p} \in \Omega} f(\lambda(\mathbf{p})) & (17) \\
 f(\lambda(\mathbf{p})) &= \sum_{\mu \in R(G)_+} P^\mu \\
 &= \sum_{\mu \in R(G)_+} \|q^\mu\|^2 / \sum_{\nu \in R(G)} \|q^\nu\|^2 \\
 \mathbf{p} &= (p_1(x_1, y_1), \dots, p_4(x_4, y_4))
 \end{aligned}$$

ここで、 $\Omega = \{(x, y) \mid x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, y_{\min} \leq y \leq y_{\max}\}$ は図-5 に示す四角い探索領域を表す。また、 $p_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) は格子領域における各頂点を表し、位置座標 (x_i, y_i) を持つ。格子の形状は固定されているので、格子領域を決定するのは対角に位置する 2 点であり、1 つの節点はそれぞれ (x_i, y_i) を持つので変数の数は 4 となる。また、 \mathbf{p} が作る格子領域 Φ 内の人口データを最も近い格子節点 $n_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, \dots, N$) に集計することで、人口ベクトル λ が得られる。関数 $f(\lambda(\mathbf{p}))$ は [(a) 主成分]/[(a) 主成分+(b) 冗長成分] となっており、この最大化により、人口分布の配置パターンを最も精度良く説明する領域が探索できる。

格子領域の最適化問題には多数の局所解の存在が予想され、最適解を得ることが必ずしも容易ではない。そこで本稿では、遺伝的アルゴリズム²⁴⁾による大域探索を複数回行い、最適解に十分に近いと考えられる格子領域 Φ を探索する。遺伝的アルゴリズムにおいて、世代交代モデルには親個体群と子個体群が完全に入れ替わる Just Generation Gap を、交叉モデルには多親交叉を一般化した $\text{REX}(\mathcal{N}(0, \sigma^2), l)$ を用いる。ここで、 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ は平均 0、分散 $\sigma^2 = 1/l$ に従う正規分布を、 $l = 10$ は親個体群より生成する子個体の数を表す。そして初期世代は、探索領域 Ω 内に一様乱数で 80 体発生させ、600 世代で交叉を行う。これらは、小林²⁵⁾ の提案に準拠した値である。

(3) パワースペクトルの有意性検定

本章では、(2) の方法で得た群論的スペクトル解析結果の統計的な有意性を検定する手法を開発する。ここでは Permutation test²⁶⁾ を用いる。Permutation test とは標本の復元抽出 (sampling with replacement) で複数の疑似標本を生成し、実際の標本から得られる統計量が、疑似標本から得られる統計量に比べてどの程度逸脱しているかにより統計量の有意性を検定する手法である。

本研究における Permutation test の手順は以下の通りである。

- 1) 格子領域 Φ において、格子節点上に射影した人口分布ベクトル (標本) λ^* とし、人口ベクトルの各要素の集合 $A = \{x \mid x = \lambda_i^*, \forall i = 1, \dots, N\}$ を考える。また、人口分布ベクトル λ^* のスペクトルを $q^{\mu,*}$ とし、パワースペクトルを $P^{\mu,*}$ とする。
- 2) iteration $k = 1$ から 300 まで 3), 4) を繰り返す。
- 3) iteration k において集合 A から復元抽出により、検定用の人口ベクトル (疑似標本) $\lambda_k^{\text{test}} = [\lambda_{i,k}^{\text{test}}]$, $\lambda_{i,k}^{\text{test}} \in A$ を生成する。
- 4) λ_k^{test} をスペクトル分解したパワースペクトル $P^{\mu,\text{test}}$ を検出する。
- 5) $P^{\mu,*} > P^{\mu,\text{test}}$ となる試行回数で有意性を検定する。具体的には、 $P^{\mu,*} > P^{\mu,\text{test}}$ となる試行回数が 270 回以上であれば 10% ($0.10 = 1 - 270/300$) 水準で、275 回以上であれば 5% 水準で、290 回以上であれば 1% 水準で、統計的に正に有意となる。

Permutation test による組み合わせは N^N (本稿の解析では 324^{324}) 通りあるが、全てに対する解析は現実的ではない。このため、疑似標本数を 100, 200, 300, 500, 1000 とした予備解析を比較し、解析結果の変動が小さいことから疑似標本数を 300 とした。

5. 空間周期性の抽出

本章では、2011 年の南ドイツ、2014 年の東アメリカの人口データに対して提案手法を適用する。用いる都市人口データは各国の国勢調査²⁷⁾ から、各都市の緯度経度は地図情報ウェブサイト Open Street Map²⁸⁾ から、それぞれ収集した。

緯度経度は各都市の幾何的重心で与えたが、十分大きな探索領域を仮定しているため都市をポイントの置き換えによる誤差は十分に小さいと考えられる。また平面直角座標系ではなく地理座標系 (緯度経度) を用いるために都市間距離には誤差が生じるが、本論文の解析範囲内において緯度の違いによる都市間距離の歪みは 7% 未満であり影響は大きくない。

(1) 南ドイツ人口データへの適用

a) Köln 周辺の空間周期

図-6-a に赤点線で示す解析領域 Ω_1 内において、5 回解析した。各解析における目的関数 $f(x)$ の値を比べると、赤実線で示す格子領域 Φ_1 において $f(x) = 0.850$ が最大であった。なお、この他の領域は黒実線で示しており、 Φ_1 と近い領域を示している。格子領域 Φ_1 において、人口データを格子節点上に射影した人口分布ベクトル λ^* は図-6-b に示す主成分分布 $\sum_{\mu \in R(G)_+} q^\mu$ と冗長成分 $\sum_{\mu \in R(G) \setminus R(G)_+} q^\mu$ に分解でき、主成分分布は人口分布ベクトルの定性的特徴を有している。また、人口分

布ベクトル λ^* は図-6-c に示すパワースペクトル割合 $P^{\mu,*}$ により構成される。この人口分布ベクトル λ^* を基に Permutation test を行った結果、図-6-c において赤で示している基底が 10% 水準で統計的に有意であった。この内、0% 水準で有意な分布 $q^{\mu,*}$ のみ図-6-d に示す。

各分布 $q^{\mu,*}$ は、図-4 に示した分岐パターンから崩れたり、中心の位置がシフトした形状をしている。 $q^{(6;1,0)}$ の分布をみると Köln を中心とした一極集中のスペクトルを捉えている。

b) Stuttgart 周辺の空間周期

解析領域 Ω_1 の結果で大きく表れていた Köln 周辺の集積の影響が小さくなるように領域を狭めた解析領域 Ω_2 で解析する。この結果を図-7 に示す。解析した結果、格子領域 Φ_2 において $f(x) = 0.759$ が最大となった。今回の解析では、5 回中 4 回は格子領域 Φ_2 に近い領域であったのに対して、残り 1 回は Φ_2 と大きく異なった領域であった。

Permutation test により 0% 水準で有意となった分布を見ると、 $q^{(6;1,0)}$ は単峰状の形状から崩れ Köln, Frankfurt, Stuttgart が格子領域の片側に並んだ周期を捉えている。また、 $q^{(12;2,1)}$ を見ると、Köln, Frankfurt, Stuttgart, Nürnberg, München といった主要都市の周期を捉えている。

(2) 東アメリカ人口データへの適用

a) Atlanta 周辺の空間周期

解析領域 Ω_3 内において、解析した結果を図-8 に示す。その結果、格子領域 Φ_3 において $f(x) = 0.801$ が最大となった。

Permutation test により 0% 水準で有意となった分布を見ると、 $q^{(6;1,0)}$ は Atlanta 周辺の単峰状の周期を捉えている。また、 $q^{(12;2,1)}$ を見ると、図-8-b に示す人口ベクトルや主成分分布の形状からは判断しづらいが、六角形に近い形状の周期を捉えている。

b) Dallas 周辺の空間周期

解析領域 Ω_3 の結果で大きく表れていた Atlant 周辺の集積の影響が小さくなるように領域を狭めた解析領域 Ω_4 で解析する。この結果を図-9 に示す。

Permutation test により 0% 水準で有意となった分布を見ると、 $q^{(6;1,0)}$ は Dallas 周辺の単峰状の周期を捉えている。また、 $q^{(12;2,1)}$ を見ると、図-8-b に示す人口ベクトルや主成分分布の形状からは判断しづらいが、六角形に近い形状の周期を捉えている。

(3) 考察

本章では 4 ケースに提案手法を適用した。人口分布を最も精度良く説明するような格子領域を探索

し、統計的有意性を検定した結果、全ケースで $\mu = (6; 1, 0), (12; 2, 1)$ の 2 つの基底が 0% 水準で統計的に有意であった。座標変換行列 Q の主成分と整合的な分布を探索しているため、一様分布 $\mu = (1)$ 以外の基底の内、空間周期性の情報が最も集約された一極集中 $\mu = (6; 1, 0)$ の基底の検出は妥当である。しかし、 $\mu = (6; 1, 0)$ の次に空間周期性の情報が集約された $\mu = (6; 1, 1), (6; 2, 0)$ ではなく、一極集中とその周りに分布する衛星都市を表す正六角形状の基底 $\mu = (12; 2, 1)$ の検出は、人口分布が中心地理論における正六角形状の分布を内在することを示唆する。そして、中心地理論の例とされた Stuttgart 周辺 (5.(1)b)) では、 $\mu = (12; 2, 1)$ の基底が最も顕著に卓越した。

6. おわりに

本研究では、中心地理論に裏付けられた空間集積の解析手法を高度化した。具体的には、最初に正六角形パターンの強度に基づいて対象領域を選定する手法を確立した。次に、同領域内で検出された正六角形パターンの統計的な有意性を検定するための Permutation test を導入した。最後に、提案した手法を南ドイツにおける人口データに適用することで、中心地理論で提唱される正六角状の空間パターンが、南ドイツの人口分布には確かに内在することを確認した。また、東アメリカにも同様に適用した結果、同一種類の空間パターンが検出された。

人口や産業の空間分布が空間周期性を持つか否かについての考察をより深めるためには、本稿で解析対象とした南ドイツや東アメリカといった広大な平野が広がる、より多くの地域・時点（時代）で頑健性を確認する必要がある (Ikeda 他²⁾ 参照)。また、本スペクトル解析手法は対象地域の空間的な等質性を暗に仮定しており、居住に適さない山間部や砂漠の存在や、交通路、河川などの影響は考慮できていない。集積地間の時間距離や移動費用などの時空間情報により地図を変形することでそれらを考慮できる可能性がある。より柔軟にスペクトル情報を捉えるために、六角形のサイズを場所毎に変えたり、地形に応じて形状を歪めたりすることもまた必要である。そのような高度化には、Kernel convolution²⁹⁾ や Approximate Bayesian computation³⁰⁾、遺伝的アルゴリズムのような柔軟な統計・機械学習手法が役に立つ可能性がある。経済地理学的な理論との整合性を保ちつつ統計・機械学習手法を駆使して空間集積を柔軟に抽出することは、地理学全般における data-driven な空間集積手法の議論と、経済地理学の theory/model-driven な集積メカニズムの議論を融合する上でも重要となる。

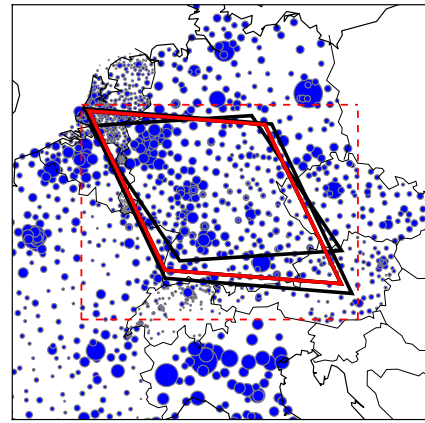


図-6-a 解析領域 Ω_1 (点線領域) と格子領域 Φ_1 (赤実線領域). 5 回の予備解析の目的関数値が、最大である領域を赤実線、その他を黒実線で示す。

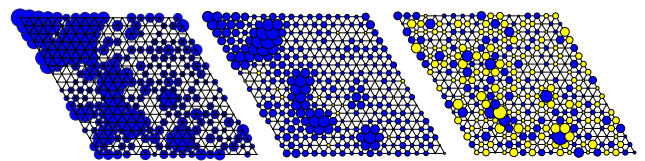


図-6-b 左から人口ベクトル λ^* , 主成分分布 ($f(x) = 0.850$), 冗長成分分布 ($1 - f(x) = 0.150$)

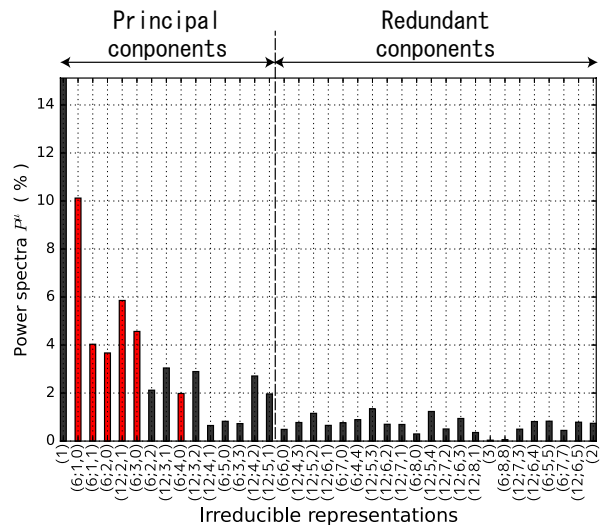


図-6-c 格子領域 Φ_1 のスペクトル図 ($P^{(1)} = 0.398$)

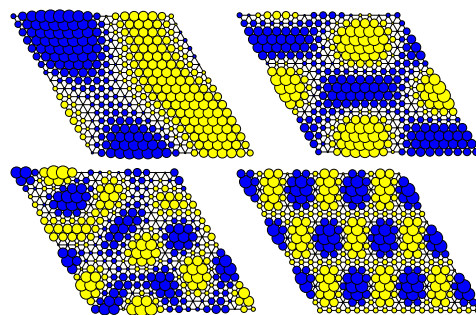


図-6-d 0%水準で有意な分布 $q^{(6;1,0)}$ (左上), $q^{(6;1,1)}$ (右上), $q^{(12;2,1)}$ (左下), $q^{(6;3,0)}$ (右下)

図-6 解析領域 Ω_1 における結果

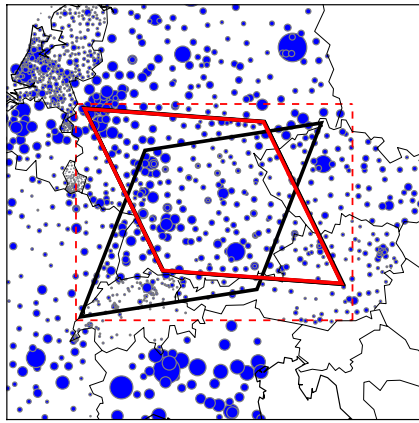


図-7-a 解析領域 Ω_2 (点線領域) と格子領域 Φ_2 (赤実線領域). 5 回の予備解析の目的関数値が, 最大である領域を赤実線, その他を黒実線で示す.

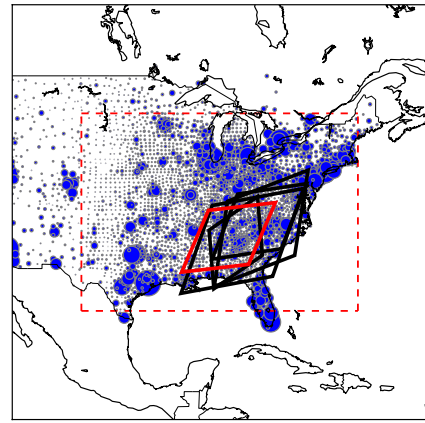


図-8-a 解析領域 Ω_3 (点線領域) と格子領域 Φ_3 (赤実線領域). 5 回の予備解析の目的関数値が, 最大である領域を赤実線, その他を黒実線で示す.

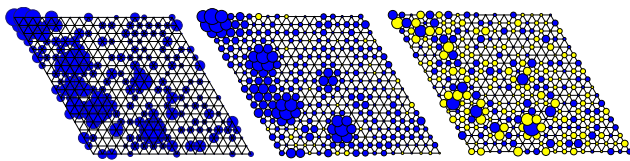


図-7-b 左から人口ベクトル λ^* , 主成分分布 ($f(x) = 0.759$), 冗長成分分布 ($1 - f(x) = 0.241$)

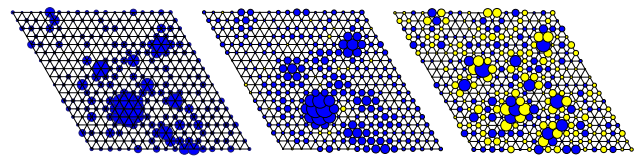


図-8-b 左から人口ベクトル λ^* , 主成分分布 ($f(x) = 0.801$), 冗長成分分布 ($1 - f(x) = 0.199$)

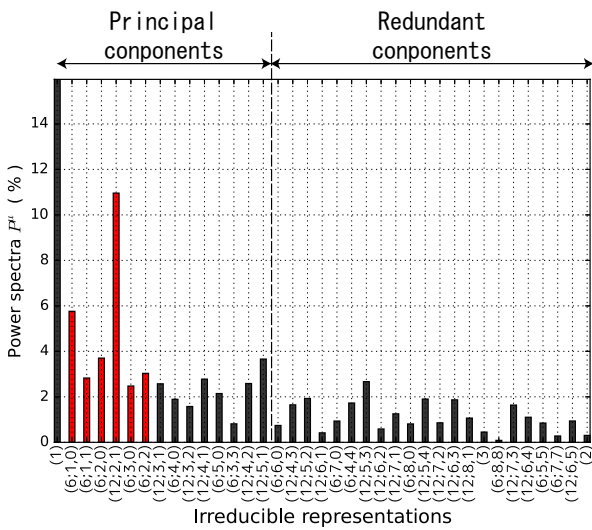


図-7-c 格子領域 Φ_2 のスペクトル図 ($P^{(1)} = 0.291$)

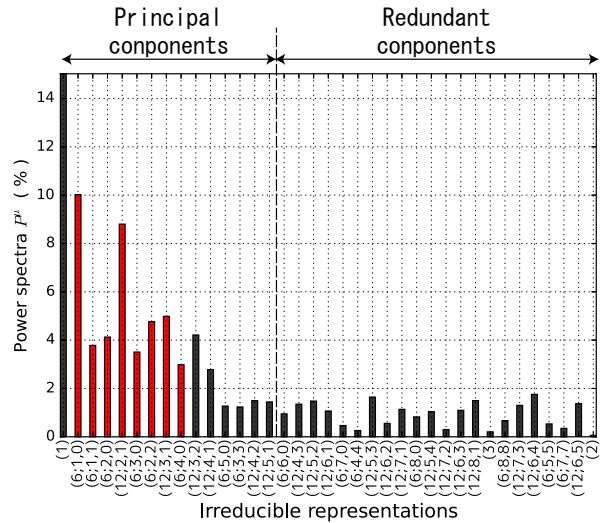


図-8-c 格子領域 Φ_3 のスペクトル図 ($P^{(1)} = 0.247$)

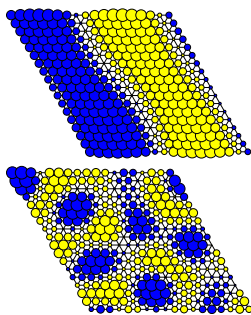


図-7-d 0%水準で有意な分布 $q^{(6;1,0)}$ (上), $q^{(12;2,1)}$ (下)

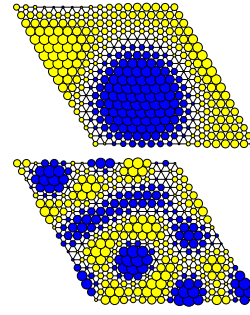


図-8-d 0%水準で有意な分布 $q^{(6;1,0)}$ (上), $q^{(12;2,1)}$ (下)

図-7 解析領域 Ω_2 における結果

図-8 解析領域 Ω_3 における結果

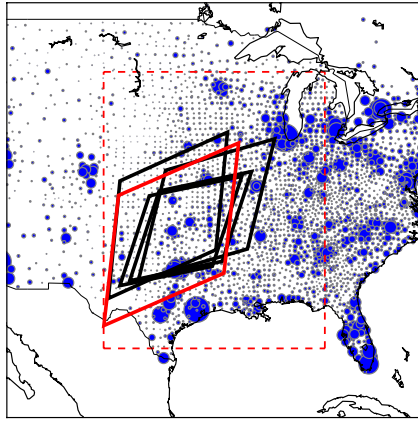


図-9-a 解析領域 Ω_4 (点線領域) と格子領域 Φ_4 (赤実線領域). 5 回の予備解析の目的関数値が, 最大である領域を赤実線, その他を黒実線で示す.

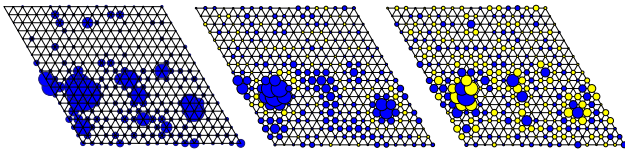


図-9-b 左から人口ベクトル λ^* , 主成分分布 ($f(x) = 0.791$), 冗長成分分布 ($1 - f(x) = 0.209$)

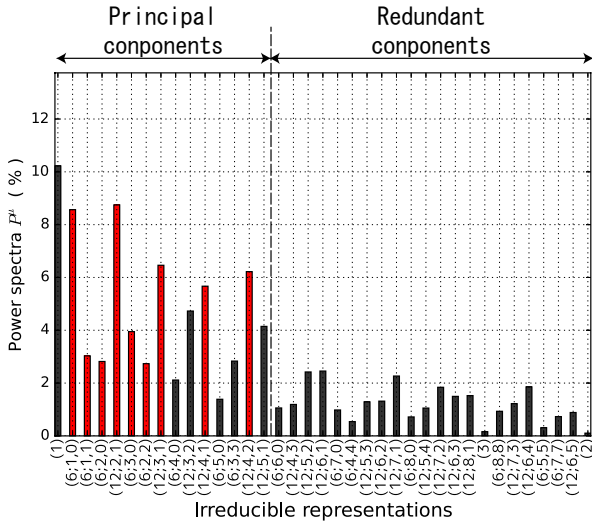


図-9-c 格子領域 Φ_4 のスペクトル図 ($P^{(1)} = 0.102$)

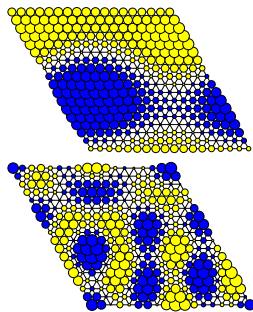


図-9-d 0%水準で有意な分布 $q^{(6;1,0)}$ (上), $q^{(12;2,1)}$ (下)

図-9 解析領域 Ω_4 における結果

付録 I 正三角格子の座標変換行列

ここでは, 正三角形格子の座標変換行列を導入する. 格子上的 (n_1, n_2) 成分が $g(n_1, n_2)$ により与えられるベクトルを以下のように正規化する.

$$\langle g(n_1, n_2) \rangle = (g(n_1, n_2) / (\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} g(i, j)^2)^{1/2}) \quad (I.1)$$

既約表現 μ に対するブロック行列 Q^μ を次式にまとめた ($[\cdot]$ はガウス記号を表す).

$$Q^{(1)} = \frac{1}{n} (1, \dots, 1)^\top = \langle 1 \rangle \quad (I.2)$$

$$Q^{(2)} = \begin{cases} [\langle \cos(2\pi(n_1 - n_2)/3) \rangle, \langle \sin(2\pi(n_1 - n_2)/3) \rangle] & n \in 3\mathbb{Z} \\ \text{missing} & n \notin 3\mathbb{Z} \end{cases} \quad (I.3)$$

$$Q^{(3)} = \begin{cases} [\langle \cos(\pi n_1) \rangle, \langle \cos(\pi n_2) \rangle, \langle \cos(\pi(n_1 - n_2)) \rangle] & n \in 2\mathbb{Z} \\ \text{missing} & n \notin 2\mathbb{Z} \end{cases} \quad (I.4)$$

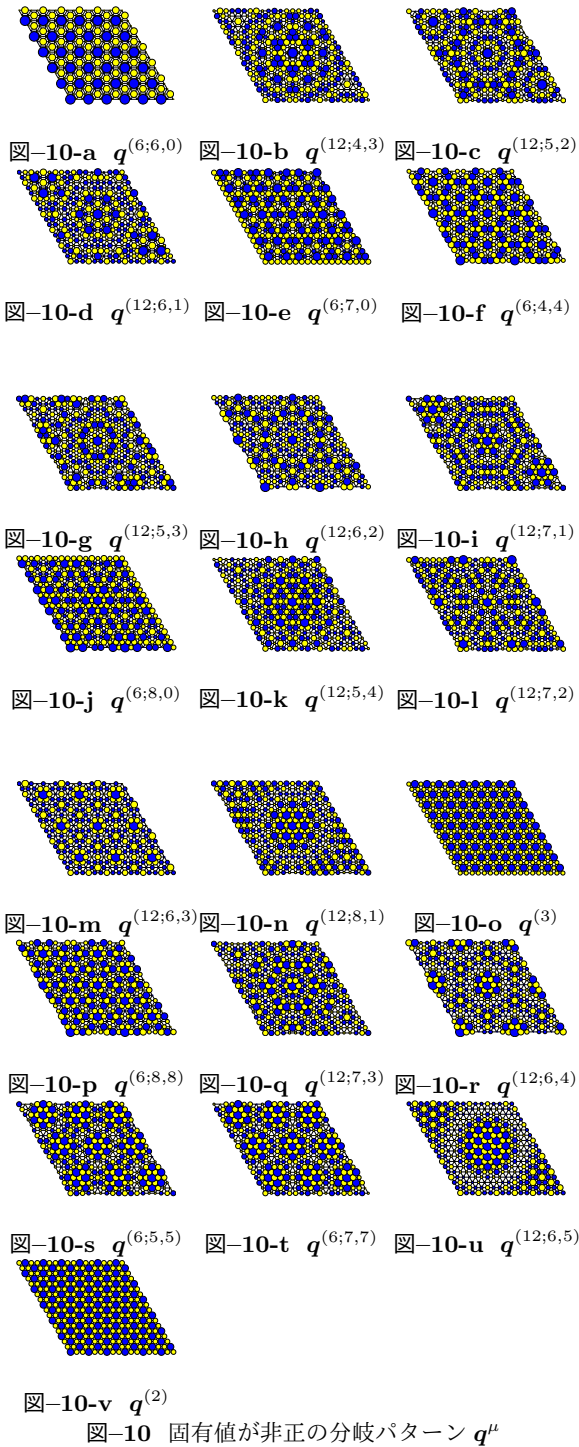
$$Q^{(6;k,0)} = \begin{aligned} &[\langle \cos(2\pi k n_1/n) \rangle, \langle \sin(2\pi k n_1/n) \rangle, \\ &\langle \cos(2\pi k(-n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi k(-n_2)/n) \rangle, \\ &\langle \cos(2\pi k(-n_1 + n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi k(-n_1 + n_2)/n) \rangle] \\ &1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \end{aligned} \quad (I.5)$$

$$Q^{(6;k,k)} = \begin{aligned} &[\langle \cos(2\pi k(n_1 + n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi k(n_1 + n_2)/n) \rangle, \\ &\langle \cos(2\pi k(n_1 - 2n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi k(n_1 - 2n_2)/n) \rangle, \\ &\langle \cos(2\pi k(-2n_1 + n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi k(-2n_1 + n_2)/n) \rangle] \\ &1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, k \neq \frac{n}{3} \end{aligned} \quad (I.6)$$

$$Q^{(12;k,\ell)} = \begin{aligned} &[\langle \cos(2\pi(kn_1 + \ell n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi(kn_1 + \ell n_2)/n) \rangle, \\ &\langle \cos(2\pi(\ell n_1 - (k + \ell)n_2)/n) \rangle, \\ &\langle \sin(2\pi(\ell n_1 - (k + \ell)n_2)/n) \rangle, \\ &\langle \cos(2\pi(-(k + \ell)n_1 + kn_2)/n) \rangle, \\ &\langle \sin(2\pi(-(k + \ell)n_1 + kn_2)/n) \rangle, \\ &\langle \cos(2\pi(kn_1 - (k + \ell)n_2)/n) \rangle, \\ &\langle \sin(2\pi(kn_1 - (k + \ell)n_2)/n) \rangle, \\ &\langle \cos(2\pi(\ell n_1 + kn_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi(\ell n_1 + kn_2)/n) \rangle, \\ &\langle \cos(2\pi(-(k + \ell)n_1 + \ell n_2)/n) \rangle, \\ &\langle \sin(2\pi(-(k + \ell)n_1 + \ell n_2)/n) \rangle] \\ &1 \leq \ell \leq k - 1, 2k + \ell \leq n - 1 \end{aligned} \quad (I.7)$$

付録 II 一様分布より発現する分岐パターン

隣接行列の負の固有値に対応する基底の線形和 q^μ を図-10 に示す。



参考文献

1) Christaller, W. : *Die zentralen Orte in Süddeutschland*, Gustav Fischer, Jena, 1933. English translation: *Central Places in Southern Germany*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966.
 2) Ikeda, K., Murota, K., Takayama, Y. and Kamei, M. : Group-theoretic spectrum analysis of hexagonal city distributions in Southern Germany and Eastern USA,

MPRA Paper 74567, University Library of Munich, Germany, 2016.
 3) Anselin, L. : Interactive techniques and exploratory spatial data analysis. In: Longley, P.A., Goodchild, M.F., Maguire, D.J., and Rhind, D.W. (eds), *Geographical Information Systems: Principles, Techniques, Management and Applications*, Wiley, NY, pp. 251-264, 1999.
 4) Redding, S. J. and Rossi-Hansberg, E. : Quantitative spatial economics. *Annual Review of Economics*, Vol.9, pp.21-58, 2017.
 5) Akamatsu, T., Mori, T., Osawa, M., and Takayama, Y. : Spatial scale of agglomeration and dispersion: Theoretical foundations and empirical implications, *MPRA paper*, No. 84145, 2018.
 6) Ikeda, K., Murota, K., Akamatsu, T. and Takayama, Y. : Agglomeration patterns in a long narrow economy of a new economic geography model: Analogy to a racetrack economy, *International Journal of Economic Theory*, Vol. 13, No. 1, pp.113-145, 2017.
 7) Ikeda, K., Murota, K. and Takayama, Y. : Stable economic agglomeration patterns in two dimensions: beyond the scope of central place theory, *Journal of Regional Science*, Vol.57, pp.132-172, 2017.
 8) 大澤実, 高山雄貴, 恩田幹久, 浅川遼, 池田清宏 : 带状都市群の人口分布の空間周波数解析, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.74, No.1, pp. 50-63, 2018.
 9) 山形与志樹, 村上大輔, 瀬谷創, 堤盛人 : 業務交通トリップデータを用いた東京都区部における産業集積の空間分布, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.70, No.5, pp.343-351, 2014.
 10) 奥村誠, 小林潔司, 山室良徳 : 輸送費用の減少が都市群システムに及ぼす影響のシミュレーション分析, *土木学会論文集*, No.604/V-41, pp.23-34, 1998.
 11) 上田孝行, 松葉保孝 : 都市群システムにおける構造の安定性と変化に関するモデル分析, *土木学会論文集*, No.542/IV-32, pp. 33-44, 1996.
 12) 中村良平 : 都市・地域における経済集積の測度 (上), *岡山大学経済学会雑誌*, Vol.39, No.4, pp.99-121, 2008.
 13) Kulldorff, M. : A spatial scan statistic, *Communications in Statistics-Theory and Method*, Vol.26, No.6, pp.191-204, 1997.
 14) Mori, T. and Smith, T. E. : A probabilistic modeling approach to the detection of industrial agglomeration, *Journal of Economic Geography*, Vol.14, No.3, pp.547-588, 2013.
 15) 氏家晃仁, 福本潤也 : 厳格な連結性を仮定しない産業集積検出手法の開発, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.72, No.5, pp.317-329, 2016.
 16) Anselin, L.: Local indicators of spatial association-LISA, *Geographical Analysis*, Vol.27, No.2, pp.93-115, 1995.
 17) 瀬谷創, 堤盛人 : 空間統計学-自然科学から人文・社会科学まで-, 朝倉書店, 東京, 2014.
 18) Getis, A. and Ord, J. K. : The analysis of spatial association by use of distance statistics, *Geographical Analysis*, Vol.24, No.3, pp.189-206, 1992.
 19) Tango, T.: A test for spatial disease clustering adjusted for multiple testing, *Statistics in Medicine*, Vol.19, No.2, pp.191-204, 2000.
 20) 鶴飼考盛, 栗田治 : 交通網により生成される都市平面上の地利値分布, *都市計画論文集第 38 回学術研究論文発表会*, pp. 28-28, 2003.
 21) 鶴飼考盛, 栗田治 : 地域間の相互作用に基づく地理的重要

- 度の理論, 日本建築学会計画系論文集, Vol.72, No.616, pp. 129-135, 2007.
- 22) Peres-Neto, P. R. and Legendre, P. : Estimating and controlling for spatial structure in the study of ecological communities, *Global Ecology and Biogeography*, Vol.19, No.2, pp. 174-184, 2010.
- 23) Ikeda, K. and Murota, K. : *Bifurcation Theory for Hexagonal Agglomeration in Economic Geography*, Springer-Verlag, Tokyo, 2014.
- 24) Holland, J. H. : Genetic algorithms, *Scientific American*, Vol.267, No.1, pp.66-73, 1992.
- 25) 小林重信 : 実数値 GA のフロンティア, 人工知能学会論文誌, Vol. 24, No. 1, pp.147-162, 2009.
- 26) Good, P. : *A Practical Guide to Resampling Methods for Testing Hypotheses*, Springer Science & Business Media, 2013.
- 27) City Population (2017):
<https://citypopulation.de/>
- 28) Open Street Map (2017):
<https://openstreetmap.jp/>
- 29) Higdon, D. : A process-convolution approach to modelling temperatures in the North Atlantic Ocean, *Environmental and Ecological Statistics*, Vol.5, No.2, pp.173-190, 1998.
- 30) Csillry, K., Blum, M. G., Gaggiotti, O. E., and François, O. : Approximate Bayesian computation (ABC) in practice, *Trends in ecology & evolution*, Vol.25, No.7, pp.410-418, 2010.

(2018.3.5 受付)

AN ENHANCEMENT OF GROUP-THEORITIC SPECTRUM ANALYSIS FOR DETECTING SPATIAL AGGLOMERATION

Mikihisa ONDA, Daisuke MURAKAMI, Kiyohiro IKEDA, Yuki TAKAYAMA,
Minoru OSAWA and Yosuke KOGURE

Central place theory¹⁾ envisaged that economic agglomerations form regular hexagonal patterns. A long-standing issue is a lack of quantitative method for assessing emergence of such regularities in the actual data. Ikeda et al.²⁾ introduced a group-theoretic spectrum analysis as the first attempt to develop a quantitative approach to detect hexagonal patterns. However, there has been several technical issues to be settled in their method: (i) How to select domain that crucially affect the result? (ii) How to select predominant spectrum? To settle these issues, we employ several methodologies: an optimization formulation for the choice of a domain, an eigenvector-based criterion for noise reduction, and a permutation test for a significance test of spectrum. The effectiveness of the proposed method is demonstrated by an analysis of the actual population data of Southern Germany and Eastern USA.