道路網の信頼度計算における近似解法の必要性

長江貴弘[1]・若林拓史[2]

[1]学生会員　名城大学大学院　都市情報学研究科（〒461-0048 愛知県名古屋市東区矢田南4-102-9）
E-mail: 133781501@ccalumni.meijo-u.ac.jp

[2]正会員　名城大学教授　都市情報学部（〒461-0048 愛知県名古屋市東区矢田南4-102-9）
E-mail: wakabaya@meijo-u.ac.jp

「国土の強靭化」には信頼性の高い道路網が必要である．道路網の連結信頼性向上においては，大規模ネットワークにおける計算量削減と，道路網の特性に応じた重要度指標の開発が課題となっている．本研究では，大規模道路網の計算量の削減について扱う．従来の研究では，経路数(パス数)が増加すると計算量・時間が指数的に増加することが判明している．「組み合わせ爆発」の問題は，いくら高性能な計算機が開発されても本質的に解決不可能な問題のため，依然として計算量の削減が必要である．その方法の一つとしてパス数を削減する近似解法(部分パスセット選択)が提案されている．今回，道路網の規模ごとの計算時間を計り，またパス数以外に計算時間に影響を与えている項目がないか調査することで，部分パスセット選択の有用性を検証する．

Key Words: *Highway network reliability, Importance index, Cost-benefit analysis, Partial minimal path set, Approximate method.*

1. はじめに

現代社会において，信頼性解析は複雑なシステムの運用に不可欠である．大規模システムである道路網も同様であり，信頼性の高い道路網を形成することが社会的な要請として存在する(「国土強靭化計画」など)．連結信頼性の高い道路網の形成には，リンクの信頼度向上が必要だが，すべての経路の強化は費用制約から困難である．したがって，どの経路を強化するのが望ましいか判断・評価するための客観的な基準が必要である．これは重要度評価[1]と呼ばれている．

筆者らは，道路網の信頼度計算や重要度評価に関して以下のような成果を上げている．

重要度評価については，従来の指標[2]と筆者らの提案している指標で，試験的なネットワークで比較分析を行った．その結果，改善に要するコスト・費用対効果・改善対象リンクの公平性(後述)の３つの観点で，筆者らの指標が従来の指標より優っていることを確認した[3]．

また，連結信頼性の計算は，ネットワークの規模が拡大すると経路の数が指数的に増加し計算量が膨大になるため，効率的な計算法が必要となる．その 1 つの方法が一部の経路を用いて近似値を計算する方法[3)4)]である(部分パスセット選択)．使用するパスセットを１つずつ減らせば，計算量を半分ずつ削減することが可能である．部分パスセット選択による近似解法で必要なことは，重要度評価においてリンクの順位が変動しないことである[5]．これまでの計算の結果から，すべてのリンクが含まれるようにパス選択を行うと，重要度の順位がほぼ変動しないことが判明している．

しかし，ネットワークの拡大における具体的な計算時間の増大や，選択リンクの差異による計算時間への影響の検証がまだなされていない．したがって，本論文では連結信頼性の近似解法の比較分析を行う．

以下，本論文の構成を述べる．2.では，道路網の信頼性と重要度評価に関する研究をレビューし，各種指標の位置づけや問題点を略述する．ここでは，連結信頼性の定義と厳密値と近似値の求め方，それぞれの問題点を述べる．3.では，道路網における種々の重要度評価の定義とその特徴を述べる．4.では，近似解法の一つである部分パスセット選択の特徴とこれまでの成果を略述し，今回新たに具体的な計算量・計算時間についてネットワークの規模や選択パス方法毎の結果を示す．5.では，2.で提起した課題に対する本研究での成果を取りまとめる．

2. 道路網の信頼性と重要度評価：研究のレビュー[5]

ここでは，信頼性解析の計算が不可避的に 2 の累乗問題から逃れることができず，いくら計算機が発達しても，計算機の発達がシステムの拡大（つまりシステムの構成要素数の増大）には追いつけないという本質的な問題であることを示す．この問題は，パス探索の高速解法[6)]のように，パス選択がその選択アルゴリズムの改良あるいは画期的方法で解決できるものではないことを示すものである．

したがって，本論文の題目にあるように近似解法の必要性が明らかとなる．最初に，既存研究のレビューを示す．次に，厳密解法の概略を示し，次に近似解法の概略を示す．

(1) 既存研究のレビュー

道路網において重要度評価を扱った論文の事例は，阪神淡路大震災前後のネットワーク評価[7)]，交通制御の観点から重要なリンクを発見する方法[8)]，費用・リンク信頼度関数による方法[9)]，連結強度と連結迂回率により強化すべきリンクを指摘する方法[10)]などがある．最近では，中山[11)]が膨大な既存研究の整理と今後の課題をまとめている．さらに，旅行時間信頼性と連結信頼性を統合した費用便益分析による方法を提案している．文献 7)では，リンク信頼度は交通量の関数で与えているので，信頼度向上のためのコストの概念が明示的に考慮できていない．また，文献8)では，汎用的なコスト・リンク信頼度関数は与えているものの，1 種類のみであり，かつリンク信頼度の改善に伴う費用は余り増加していないので実効性のある結論を得ているのか疑問がある．また，9), 10)どちらの研究も，ノード間信頼度の改善を効果的に与える評価指標に焦点を当てているが，各重要度指標による改善の際や費用との関係評価にまでは至っていない．文献11)では，便益を捉える視点が増えるため重複計算がないようにするのが課題であり，リンクが途絶する期間によって道路利用者の行動基準が変化することを基に，連結信頼性を旅行時間短縮による便益に置き換えて評価している．この指標については現段階では端緒についたばかりであり，道路網の形態によって便益がどのように算出されるかは未知数である．

(2) 厳密解法

ここでは，信頼性の厳密解法および近似解法についての概略を説明する[12),13)]．

1) 構造関数

道路網において，特定のノードAB 間を結ぶリンク a に二値確率変数 X_a を次のように定義する．

$$X_a = \begin{cases} 1, \text{リンク}\, a\, \text{での円滑な走行移動が 保証される場合} \\ 0, \text{そうでない場合} \end{cases} \tag{2.1}$$

リンク信頼度 r_a は以下のように与えられる．

$$r_a = E\left[X_a\right] \tag{2.2}$$

確率変数 X_a およびリンク信頼度 r_a からなるベクトル，

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_l) \tag{2.3}$$

$$\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_l) \tag{2.4}$$

を定義すると，ノード間信頼度の構造関数は以下のように定義される．ここに l は，リンク総数である（l をシステムのオーダーという）．

$$\phi(\mathbf{X}) = \coprod_{s=1}^{p} \prod_{a \in P_s} X_a = 1 - \prod_{s=1}^{p} (1 - \prod_{a \in P_s} X_a) \tag{2.5}$$

ノード間信頼度は，構造関数の期待値で与えられるので，

$$R(\mathbf{r}) = E\left[\phi(\mathbf{X})\right] \tag{2.6}$$

したがって，

$$R(\mathbf{r}) = E\left[\phi(\mathbf{X})\right] = E\left[1 - \prod_{s=1}^{p} (1 - \prod_{a \in P_s} X_a)\right] \tag{2.7}$$

ここに，$R(\mathbf{r})$ はノードAB 間のノード間信頼度，p はパス総数，a はリンク番号，P_s は s 番目のミニマルパスセットを表している．構造関数によるノード間信頼度は，ミニマルカットセット K_s，およびカット総数 k でも表現できるが，紙面の都合上，省略する．

2) 分解法

構造関数の構成法には，直列・並列システムの組合せによる方法も存在するが省略する．

分解法とは，次の恒等式を利用した方法である．

$$\phi(\mathbf{X}) = X_a \phi(1_a, \mathbf{X}) + (1 - X_a) \phi(0_a, \mathbf{X}) \tag{2.8}$$

ここに，$\phi(1_a, \mathbf{X})$，$\phi(0_a, \mathbf{X})$ は，それぞれ，リンク a が円滑に機能しているシステム，そうでないシステムの構造関数を示している．この式によりオーダーl の構造関数を，オーダー（$l-1$）の構造関数で表現することができる．直・並列型のように，その構造関数が容易に計算できるような，より小さな規模のシステムが得られるまで式(2.8)を繰り返し適用すればよい．この式により，どのようなシステムも直列－並列構造に等価変換され，構造関数の構築が容易となる．

分解法を適用することで，システムが直列－並列構造に分解される場合，本手法では著しい効果がある．完全に分解された場合を事象空間法[14)]あるいは総当たり法と呼ぶ．この方法の問題点としては，複雑なシステムでは，分解法を繰り返し適用する必要があること，またシステムの構造を等価変換させるための機械的な処理が困難なこと等が挙げられる．

3)　ミニマルパスと含意排他公式による方法[14)]

ミニマルパス Ps のすべての要素が機能する事象を Es と表す．少なくとも 1 つのミニマルパスが機能すればシステム全体は機能するから，システム信頼度（ノード間信頼度）R は,

$$R = \Pr\left\{\bigcup_{s=1}^{p} E_s\right\} \tag{2.9}$$

で与えられる．これは，ベン図（Venn 図）で記述される論理和（記号$\bigcup$ で表現している）の期待値を求める方法である．これを含意排他公式（Inclusion-Exclusion Formula)で展開すれば,

$$R = \sum_{s=1}^{p} \Pr\{E_s\} - \sum_{s=1}^{p}\sum_{t>s}^{p} \Pr\{E_s \cap E_t\} + \sum_{s=1}^{p}\sum_{t>s}^{p}\sum_{u>t}^{p} \Pr\{E_s \cap E_t \cap E_u\} + \ldots + (-1)^{p-1}\Pr\left\{\bigcap_{s=1}^{p} E_s\right\} \tag{2.10}$$

となる．カットセットによる表現も同様である．

この方法では，ミニマルパス（あるいはミニマルカット）が求められればそのようなシステムにも適用できるので，分解法のようにシステムの構造を等価変換させる必要がなく，そのままのシステムの構造で信頼度を計算できる長所がある．計算量も，事象空間法が 2^l（l はリンク総数）に比例する計算時間を必要とするのに比較すると小さくて済む．

一方，この方法は式(2.9)を用いて計算するが，2 点間のすべてのミニマルパス（あるいはミニマルカット）が必要となる点に計算上の困難が存在する．すなわち，システムが大規模になるとパス（カット）の数が増加する．式(2.9)での項の数は，$2^p - 1$ で与えられ，この計算過程では，事象の論理積に関するブール演算（$E_s \cap E_s = E_s$）が必要となる．したがって，ミニマルパス（カット）数の増加とともに計算量が指数級数的に増大する．また，各項のリスティングに多大の時間がかかることが報告されている[15)].

4)　ミニマルパスと構造関数による方法

ミニマルパスによる構造関数は，(2.5)から

$$\phi(\mathbf{X}) = \coprod_{s=1}^{p}\prod_{a\in P_s} X_a = 1 - \prod_{s=1}^{p}(1 - \prod_{a\in P_s} X_a) \tag{2.11}$$

で与えられる．したがって，ノード間信頼度は，式(2.6)から，

$$R(\mathbf{r}) = E[\phi(\mathbf{X})] = E\left[1 - \prod_{s=1}^{p}(1 - \prod_{a\in P_s} X_a)\right] \tag{2.12}$$

この方法は，ミニマルパス（あるいはミニマルカット）を用いる点では 3)と同じであり特徴も似ている．2 点間のすべてのパス（カット）を必要とする欠点も同一である．パス（カット）間で同一リンクが複数回現れる場合が一般的であるので，計算過程で確率の重複計算を避けるため，論理積に関するブール演算（$X_a \cdot X_a = X_a$）を行う必要がある．式(2.12)では項の数が $2^p - 1$ で与えられ，ブール演算の回数もこれに比例する．したがって，計算量は p（カットの場合は k)，すなわち，ミニマルパスやミニマルカットの数とともに指数的に増大する．

5)　**Fratta and Montanari の方法**

Fratta and Montanari[16)]は，式(2.9)で記述されるような論理和を代数和に変換する興味深いアルゴリズムを提案している．これは，式(2.9)，すなわち，

$$R = \Pr\{E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots\ldots\} \tag{2.13}$$

は，直接代数和をとることができないので，任意の項，例えば第 1 項 E_1 に着目し，

$$R = \Pr\left[E_1 + \{\overline{E}\cap(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \ldots\ldots)\}\right] \tag{2.14}$$

のように第 1 項と第 2 項以下が排反事象になるように変形すると，排反事象間では代数和をとることが可能となる．第 2 項内で直交成分を除去する操作を行う．同様の変形を{　}内が空事象になるまで反復すると，最終的には代数和の成分のみが残る．本アルゴリズムは，この一連の操作により代数和を計算する方法である．

この方法では，3)と同様，2 点間のすべてのミニマルパス（カット）が必要となるため，大規模ネットワークでは適用が困難となる．さらにこの方法では，アルゴリズムの性質上，計算時間や記憶容量ががが l^N（l : 総リンク数，N : 反復回数）に比例するために計算過程でブール積の項の数がきわめて多くなり，そのためネットワークの規模がきわめて制約されることが問題となっている．

以上が，信頼度の厳密解を求める方法の概略である．いずれの方法においても，計算コストが計算要素（リンク数，パスセット数，カットセット数等）の増加に伴って，2 の累乗で増加することを説明した．

次に，近似計算法について述べる．

(3)　近似計算法

1)　**Esary and Proschan** の上・下限値[17)]

次式で計算する方法である．

$$U = \coprod_{s=1}^{p}\prod_{a\in P_s} r_a = 1 - \prod_{s=1}^{p}(1 - \prod_{a\in P_s} r_a) \tag{2.15}$$

$$L = \prod_{s=1}^{k}\coprod_{a\in K_s} r_a = \prod_{s=1}^{k}\left\{1 - \prod_{a\in K_s}(1 - r_a)\right\} \tag{2.16}$$

ここに，U，L は上・下限値である．上・下限値とは，シス

テムの信頼度がこの値以上でない，あるいはこの値以下ではないことを保証する数値である．これは，Esary and Proschan の上･下限値[17]として知られている近似値である．

2) 含意排他公式を利用した上・下限値

式(2.10)の計算を奇数項で停止すると上限値が，偶数項で停止すると下限値が得られる．この方法で近似値を求める方法である．

3) 部分的パスセットを用いた近似解析法

利用するパスセットを，全数ではなく部分的なパスセットを用いて計算する方法である．

近似解法においても，システム規模の拡大にともなって計算量や計算に必要な記憶容量が指数的に増加する[13]．しかし，その増加要因は手法によって異なっている．事象空間法は，故障発生事象を総当たりで計算するため 2^l（l はリンク総数）に比例する計算時間が必要である．(2)の 2)および(2)の 4)の方法では，ミニマルパス数を p とすると 2^p-1 個の項が発生するため，計算時間はこれに比例して増加する．(2)の 3)および(2)の 5)の方法では，ミニマルカット数を k とすると，同様に計算時間は 2^k-1 に比例する．Fratta･Montanari の方法ではアルゴリズムの特性上 l^N（N はアルゴリズム中の反復回数）の計算時間が必要となる．以上のように，種々の信頼性解析法は計算量の増加要因によって分類可能である．つまり，解析に必要な計算量は，$2^l, 2^p, 2^k, l^N$ のいずれかで説明できる．ここで，総リンク数 l は，与えられたネットワーク固有の数値であるので，l に規定される方法では計算の実行可能性がネットワーク規模に制約されるという限界がある．これに対し，$p, k,$ に規定される方法では，パス・カット数を操作変数とすることでネットワークの拡大に対処できるという利点がある．すなわち，パス・カット数を削減することで，計算量を指数的に減少させることが可能である[5]．

筆者らの提案している信頼度の近似計算法は，２点間のミニマルパス・カットのうち一部を選択して用いる方法であり，計算量を大幅に短縮可能とする点できわめて有効である．

3. 道路網における重要度指標の定義とその特徴[5]

(1) 従来の重要度の定義とその特徴

従来より以下のような重要度が提案･利用されているので簡単に紹介する．

確率重要度 RI (Birnbaum's Reliability Importance)[18]は，以下に定義される測度であり，ノード間信頼度を当該リンク信頼度で偏微分したものである．

$$RI_a = \partial R_{AB}(\mathbf{r}) / \partial r_a \tag{3.1}$$

クリティカリティ重要度 CI (Criticality Importance)[19]は，リンク信頼度のパーセント変化に対するノード間信頼度のパーセント変化の比として定義される．ここで $R(\mathbf{r})$ はノード AB 間のノード間信頼度，a はリンク番号，r_a はリンク信頼度である．この値が大きいほど重要，つまりノード間信頼度の改善への寄与度が大きいことを表す．

$$\begin{aligned} CI_a &= \lim_{\Delta r_a \to 0} \left\{ \frac{\Delta R_{AB}(\mathbf{r}) / R_{AB}(\mathbf{r})}{\Delta r_a / r_a} \right\} \\ &= RI_a \times \frac{r_a}{R_{AB}(\mathbf{r})} \end{aligned} \tag{3.2}$$

しかし，これらの重要度を道路網に適用すると以下の問題がある．

問題 1. CI は，直列ネットワーク（図-1）においてリンク信頼度の値に関わらず，重要度が同じになる．

問題 2. RI, CI ともに，並列ネットワーク（図-2）において信頼度の低いリンクが放置される．

問題 3. RI, CI ともに並列ネットワークにおいて，より高い信頼度のリンクを改善することが，低い信頼度のリンクを改善することよりも，費用的・技術的に困難であることを反映していない．

これらの問題を解決するために提案するのが，次節で述べる改良型クリティカリティ重要度(ICI)である．

(2) 改良型クリティカリティ重要度の定義とその特徴

クリティカリティ重要度を参考に，リンク不信頼度を

$$q_a = 1 - r_a \tag{3.3}$$

として，改良型クリティカリティ重要度を以下の式のように定義される[8]．

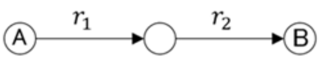

図-1 直列ネットワーク

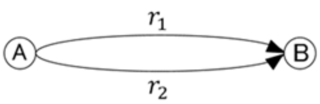

図-2 並列ネットワーク

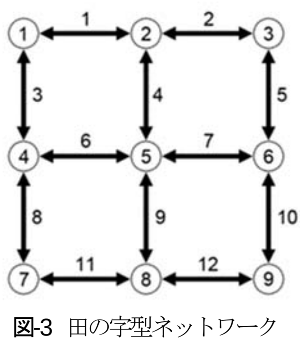

図-3 田の字型ネットワーク

$$
\begin{aligned}
ICI_a &= \lim_{\Delta q_a \to 0} \left\{ \frac{\Delta R_{AB}(\mathbf{r}) / R_{AB}(\mathbf{r})}{\Delta q_a / q_a} \right\} \\
&= RI_a \times \frac{(1-r_a)}{R_{AB}(\mathbf{r})}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

よって，ICI_a と RI_a の間には,

$$ICI_a = \frac{(1-r_a)}{R} RI_a \tag{3.5}$$

の関係が成り立つ．したがって，2 つのリンクの確率重要度(RI)の値が同じだったとしても, 信頼度の低いリンクの方が ICI の値が大きくなることを示している．これにより，ICI は信頼度の高いリンクの改善は低いリンクの改善よりも困難であることを反映しているといえる[8].

また，並列ネットワークでは ICI の値は等しくなるため, 信頼度の低いリンクが放置される問題が解消される.

4. パス選択数の増加と CPU-Time の関係分析

(1) 部分パスセット選択による近似解法

連結信頼性の計算は，ネットワークの規模が拡大すると計算量が膨大になるため, その削減が必要となる. その一つの方法が一部のパスセットを用いて近似値を計算する方法である[8].

例えば, 田の字型ネットワーク(図-3)で，パスを 3 本だけ用いて({1,2,5,10},{1,4,9,12},{3,8,11,12})，ノード 1, 9 間の信頼度を計算すると(ノード間信頼度の近似値) 下記のような式で求めることができるが,

$$
\begin{aligned}
R(\mathbf{r}) &= E[1 - \prod_{s=1}^{p} (1 - \prod_{a \in P_s} X_a)] \\
&= E[1 - (1 - X_1 X_2 X_5 X_{10})(1 - X_1 X_4 X_9 X_{12}) \\
&\qquad (1 - X_3 X_8 X_{11} X_{12})]
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

同一リンクが含まれているので，確率の重複計算を避けるため論理積に関するブール演算 ($X_a \cdot X_a = X_a$) が必要となる．そのため，ネットワークが大規模になると膨大な計算が必要となる．ここで，ミニマルパスに基づく式を具体的に示すと以下のようになる．ミニマルパスを,

$$a_s = \prod_{a \in P_s} X_a \tag{4.2}$$

で表すとノード間信頼度の厳密値 R は,

$$R = E\left[1 - (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots\cdots \left(1 - a_p\right)\right] \tag{4.3}$$

式(4.3)を展開すると項の数は $2^p - 1$ で個となる．ここで，パスの数を 1 個減らせば，この部分の計算量はほぼ 1/2 で済む．以下同様に，パスの数の減少に従って，計算量を 1/2 ずつ指数的に減少させることができる．したがって，信頼度 R の値への寄与が大きい一部のミニマルパスで計算すれば,

非常に効率よく信頼度を計算できることになる[5].

表-1 は，田の字型ネットワーク (図-3，図-4) でのパス数に応じた CPU-Time を示したものである.

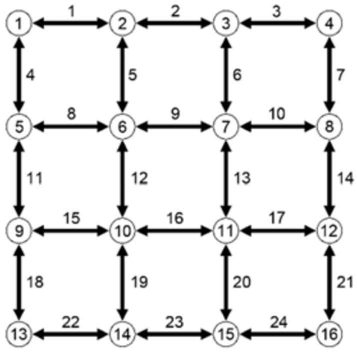

図-4　田の字型ネットワーク (3×3)

表-1　田の字型ネットワークにおけるパス数と CPU-Time(秒)の関係

パス数	2×2	3×3
2	0.001333	1
3	0.001333	1
4	0.001667	1
5	0.002000	1
6	0.002667	1
7	0.004000	1
8	0.006333	1
9	0.012667	1
10	0.025333	1
11	0.061667	1
12	0.126667	1
13		1
14		1
15		1
16		3
17		7
18		13
19		23
20		53
21		111
22		234
23		485
24		1024

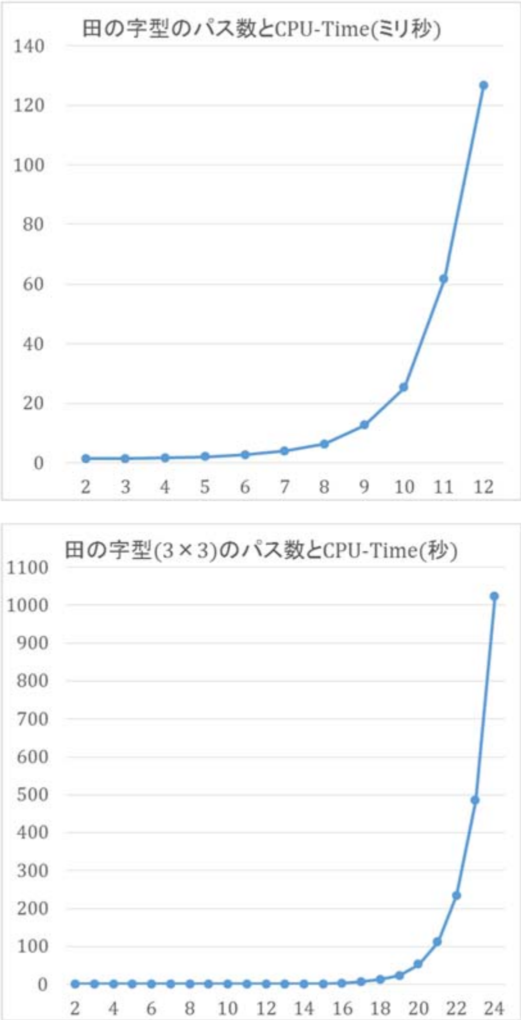

図-5 パス数と計算時間の関係

CPU-Time は，主に『コンパイル時間』と『データの read と write』，および『計算時間』で構成される．計算時間が小さい場合は，前者 2 つで支配され，CPU-Time は，大きく増加することはない．システム規模が拡大し『計算時間』が卓越してくると，計算時間が計算対象の特性（本研究では，2 の累乗）に依存する．**表-1** においても，パス数が少ないうちは CPU-Time にほぼ変化はないが，計算量の指数的な増大によって『計算時間』がほぼ倍々に増えていくことがわかる．**図-5** は，**表-1** をそれぞれグラフで表したものである．

(2) 部分パスセット選択で計算に必要となるパス数 [5)]

道路網の連結信頼性を計算する際，近似解法に必要なことは各リンクの重要度の順位に変動がないことである．それについて検討したものが**図-6** である．

図-6 のグラフは，生起確率順と距離順のパスの順位の比較を表したものである（5 組のうち 1 組目のみ抜粋）．右端がパスをすべて用いた厳密値となる．折れ線は，各々のリンクの重要度の値である．

図-7 のグラフは，生起確率順と距離順のノード間信頼度の近似値を比較したものである．右端が厳密値であり，こちらは 5 組分すべてを記載している．

図-6 を見ると，全リンクが含まれる 7 パス程度までならノード間信頼度の近似値にはあまり変化がなく，また生起確率順と距離順でもほとんど差がないことがわかる．

図-7 を見ると，ノード間信頼度の近似値は生起確率順の方がパスを減じていった際の厳密値との差が少ない傾向にあるが，7 パス程度までなら両者にほとんど違いはないともいえる．

したがって，すべてのリンクが含まれる範囲でパス数を減じるのであれば，生起確率順のみならず距離順でも実用可能であることを示唆している．

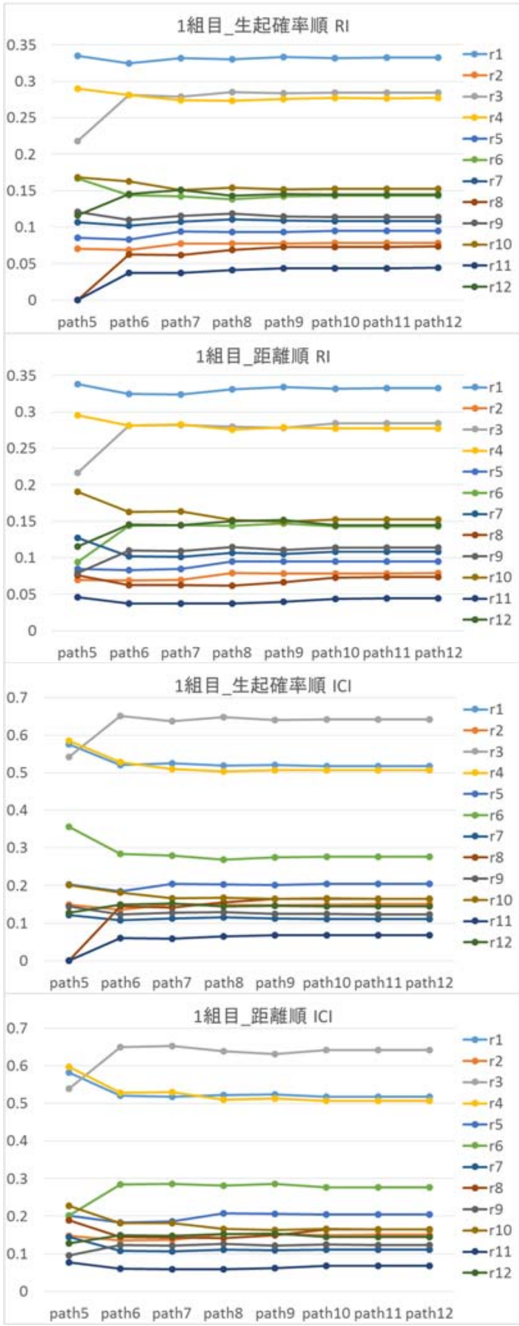

図-6 生起確率順と距離順のパスの順位の比較

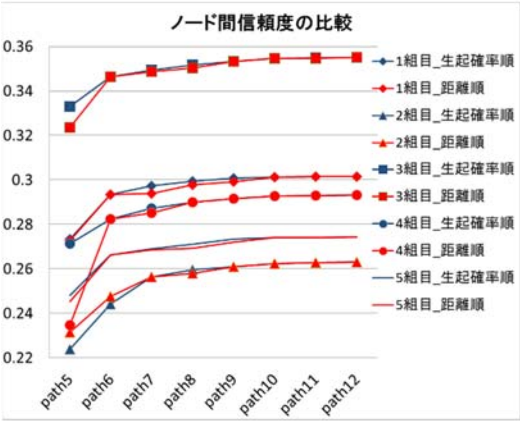

図-7 生起確率順と距離順のノード間信頼度の近似値比較

(3) パスセット選択方法による近似解計算結果の差異

前節で，部分パスセット選択の近似解法を用いる際に必要となるパス数を検証した.

それを踏まえ，今回新たに具体的な計算時間とパス選択方法が計算時間に影響を与えているかどうかを検証する.

パス選択方法が計算時間に影響を与えている，というのは以下の 2 点の可能性があるからである.

まず，パス数が同じであっても各々のパスの中に含まれるリンクの数が少なければ計算時間が短くなるという点である. 次に，コンピュータ上でブール演算を行い，式を展開する際に出発地からリンクを見てパス同士で同じリンクを使用しているほうが計算時間が短くなるという点である.

この 2 点を検証するために, 田の字型ネットワーク (**図-3**, **図-4**) において複数のパス選択方法を用いてノード間信頼度の計算時間を計測した.

まず，**図-3** のネットワーク上でのパス選択方法を**表-2** に示す. ①は，1 本のパスに含まれるリンクの数が少ないものからパスを選択したものである. ②は, 出発地より数えてリンク番号の小さい順にパスを並べたものである.
その結果，どちらの方法でも計算時間にそれほどの差は見られないことが判明した (**図-8**). グラフの横軸がパス数，縦軸が計算時間である. パスを 1 本ずつ減らすごとに計算時間が約半分になるのも従来どおりである. パス 12 本，つまり厳密値での計算時間に若干の差が出ているが，パスの選択方法が影響しているわけではないことに留意したい.

それについては，田の字型ネットワーク (3×3) (**図-4**) の結果と比較することで理解が可能となる.

田の字型ネットワーク (3×3) (**図-4**) では，全てのリンクが最低でも 1 回以上は出現し，かつパスの数が少なくなるようにパス選択方法を行った (**表-3**). 3×3 では，総パス数は 184 本であるが，今回使用したのはそのうち 24

パス選択方法①	パス選択方法②
1 2 5 10	1 2 5 10
3 8 11 12	1 2 5 6 7 8 11 12
1 4 7 10	1 2 5 7 9 12
3 6 7 10	1 4 6 8 11 12
1 4 9 12	1 4 7 10
3 6 9 12	1 4 9 12
2 3 4 5 6 10	2 3 4 5 6 10
1 2 5 7 9 12	2 3 4 5 8 9 10 11
1 4 6 8 11 12	3 6 7 10
3 7 8 9 10 11	3 6 9 12
1 2 5 6 7 8 11 12	3 7 8 9 10 11
2 3 4 5 8 9 10 11	3 8 11 12

表-2 田の字型 (2×2) のパス選択方法

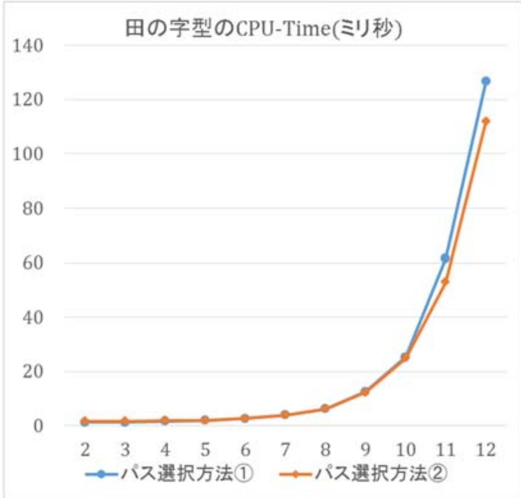

図-8 パス選択方法別の近似解法の計算時間

表-3 田の字型 (3×3) のパス選択方法

パス選択方法①-1.	パス選択方法①-2.
1 2 3 7 14 21	1 2 3 7 14 21
1 2 6 10 14 21	1 2 6 10 14 21
1 2 6 13 20 24	1 2 6 13 20 24
1 2 6 13 17 21	1 2 6 13 17 21
1 5 9 10 14 21	1 5 9 10 14 21
1 5 9 13 17 21	1 5 9 13 17 21
1 5 9 13 20 24	1 5 9 13 20 24
1 5 12 16 17 21	1 5 12 16 17 21
1 5 12 16 20 24	1 5 12 16 20 24
1 5 12 19 23 24	1 5 12 19 23 24
4 11 18 22 23 24	4 11 18 22 23 24
4 11 15 19 23 24	4 11 15 19 23 24
4 11 15 16 17 21	4 11 15 16 17 21
4 11 15 16 20 24	4 11 15 16 20 24
4 8 12 19 23 24	4 8 12 19 23 24
4 8 12 16 20 24	4 8 12 16 20 24
4 8 12 16 17 21	4 8 12 16 17 21
4 8 9 13 20 24	4 8 9 13 20 24
4 8 9 13 17 21	4 8 9 13 17 21
4 8 9 10 14 21	4 8 9 10 14 21
1 2 3 7 14 17 20 24	1 2 3 7 14 17 20 24
1 2 3 7 10 13 20 24	4 11 18 22 23 20 17 21
1 2 3 7 10 13 17 21	1 5 8 11 15 16 17 21
1 2 6 10 14 17 20 24	4 8 5 2 6 13 20 24

パス選択方法②-1.	パス選択方法②-2.
1 2 3 7 14 21	1 2 3 7 14 21
1 2 3 7 14 17 20 24	4 11 18 22 23 24
1 2 3 7 14 17 16 19 23 24	1 2 6 10 14 21
1 2 6 10 14 21	4 11 15 19 23 24
1 2 6 10 14 17 20 24	1 5 9 6 3 7 14 21
1 2 6 10 14 17 16 19 23 24	4 8 12 15 18 22 23 24
1 5 8 11 15 16 17 21	1 2 3 7 14 17 20 24
1 5 8 11 15 16 13 10 14 21	4 11 18 22 23 20 17 21
1 5 8 11 15 16 13 6 3 7 14 21	1 2 6 10 14 17 20 24
1 5 9 6 3 7 14 21	4 11 15 19 23 20 17 21
1 5 9 6 3 7 14 17 20 24	1 5 8 11 15 16 17 21
1 5 9 6 3 7 14 17 16 19 23 24	4 8 5 2 6 13 20 24
4 11 18 22 23 24	1 2 3 7 14 17 16 19 23 24
4 11 18 22 23 20 17 21	4 11 18 22 23 20 13 10 14 21
4 11 18 22 23 20 13 10 14 21	1 2 6 10 14 17 16 19 23 24
4 11 15 19 23 24	4 11 15 19 23 20 13 10 14 21
4 11 15 19 23 20 17 21	1 5 8 11 15 16 13 10 14 21
4 11 15 19 23 20 13 10 14 21	4 8 5 2 6 13 16 19 23 24
4 8 5 2 6 13 20 24	1 5 9 6 3 7 14 17 20 24
4 8 5 2 6 13 16 19 23 24	4 8 12 15 18 22 23 20 17 21
4 8 5 2 6 13 16 15 18 22 23 24	1 5 8 11 15 16 13 6 3 7 14 21
4 8 12 15 18 22 23 24	4 8 5 2 6 13 16 15 18 22 23 24
4 8 12 15 18 22 23 20 17 21	1 5 9 6 3 7 14 17 16 19 23 24
4 8 12 15 18 22 23 20 13 10 14 21	4 8 12 15 18 22 23 20 13 10 14 21

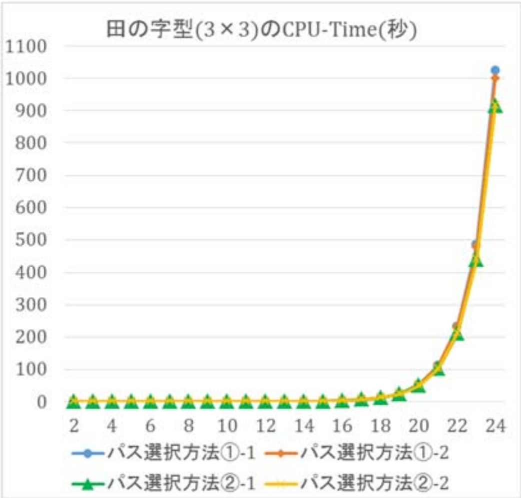

図-9 パス選択方法別の近似解法の計算時間(3×3)

本である．

①-1 は, 1 本のパスに含まれるリンクの数が少ないものからパスを選択したものである．①-2 は，①-1 とほぼ同じだが，全体として出発地のリンクが均等になるようにしたものである．②-1 は，出発地より数えてリンク番号の小さい順にパスを並べたものである．②-2 は，リンクの数が少なく，かつ出発地のリンクが交互になるように並べたものである．

その結果，どの方法でも計算時間にそれほどの差は見られないことが判明した(**図-9**)．**図-3** のネットワークでは，リンクの数を少なくしたパス選択方法が計算時間が若干短かったが，**図-9** を見るとリンクの数を少なくした①-1 はむしろ他の方法に比べて計算時間が若干長くなっている．したがって，部分パスセットによる近似解法の計算時間はあくまで使用するパス数に依存するのであって，その中でのリンク数には影響されないことが判明した. この結果より, 部分パスセット選択の方法として，従来からある生起確率順・距離順を使用することには問題がないともいえる.

図-9 のネットワークでもパス数が 24 の場合で CPU-Time は約 20 分であり，パス数が 25，26，…の場合はその倍々で増えていき，31 本で 2560 分となり，1 日つまり 1440 分を超える. このネットワークで厳密値を得るには, 最短ルート（6 リンク使用）のみでも $_6C_3 = 20$ 本，8 リンク使用で…となり，きわめて多数となる．最新鋭，最速のコンピュータを用いてもこの結果であるから，時間がかかっても少なくとも翌日には計算結果を得たい場合には，実用に耐えない．

したがって，依然として道路網の信頼性の計算には近似解法が必要であることがわかる.

5. 研究成果のまとめ

本研究では, 道路網に適した信頼性計算の方法・重要度指標の開発を目的として，各種の重要度指標と近似解法の比較分析を行った.

理論的背景として，2 章で総リンク数，パスセット数（カットセット数）を用いた厳密解法および近似解法を示し, 計算時間がシステムの拡大に伴い 2 の累乗で増加する背景を示した. この問題は, 信頼性解析の計算において本質的に避けられない問題であるので，近似解法が必要であることの理論的背景も示せたといえる.

ここでは, パスセットを用いた計算法において, 選択パスセットを減少させると計算量が 1/2 ずつ現象することを示した. 部分パスセット選択を用いた近似解法については, 生起確率順のみならず距離順も使用可能であるという結果を得ている.

今回新たに，田の字型ネットワークで近似解法を用いてパス選択方法の比較を行った. その結果, 部分パスセット選択による計算時間はあくまで使用するパスの本数に依存するのであって，パスの中のリンクの数には影響を受けないことが判明した. したがって, 部分パスセット選択は計算時間の短縮に依然として有効である. また, パス数を減らすことができれば従来からある生起確率順・距離順を使用することには問題がないともいえる.

謝辞：本研究は JSPS 科研費 (基礎研究(C), 課題番号:26420522) の助成を受けたものです．記して謝意を表します.

参考文献

1) Nicholson, A. Schmoecker, J. Bell, M.G.H. and Iida, Y (2003). Assessing Transport Reliability: Malevolence and User Knowledge In: Michael G. H. Bell and Yasunori Iida(Ed.) The Network Reliability of Transport, Proceedings of the 1st International Symposium on Transportation Network Reliability (INSTR), pp.1-22, Pergamon, 2003.
2) Takahiro Nagae and Hiroshi Wakabayashi (2015). Differences in Network Reliability Improvement by Several Importance Indices. Available online at www.sciencedirect.com ScienceDirect, Transportation Research Procedia, Volume 10, 2015, 155-165, Peer-review under responsibility of Delft University of Technology, ISSN 2352-1465, doi: 10.1016/j.trpro.2015.09.065.
3) 長江貴弘・若林拓史：道路網の連結信頼性の改善過程における重要度指標の種類による差異，土木計画学研究・講演集，No.52, CD-ROM(No.245), 2015.
4) 長江貴弘・若林拓史：高信頼度の道路網における新たな重要度指標の利用，土木計画学研究・講演集，No.54, CD-ROM(No.63), 2016.
5) 長江貴弘・若林拓史：道路網の連結信頼性向上法と各種重要度指標による改善対象リンクの相違，土木計画学研究・講演集，No.50, CD-ROM(No.268), 2014.
6) 超高速グラフ列挙アルゴリズム－〈フカシギの数え方〉が拓く組合せ問題への新アプローチ，湊　真一，森北出版，2015.
7) 若林拓史：阪神大震災における道路網連結信頼性と確率重要度による重要区間の評価，土木計画学研究・論文集，No.13, pp.391-400,

1996.
8) 若林拓史・大野隆晴・鈴木宏章：道路ネットワークの重要度評価：確率重要度とクリティカリティ重要度による信頼性向上効果，土木計画学研究・論文集，Vol.22, No.4, pp.751-759, 2005.
9) Nicholson, A. (2007). Optimising Network Terminal Reliability. Proceedings of the 3rd International Symposium on Transportation Network Reliability, CD-ROM, 2007.
10) 栄徳洋平・横井祐治・溝上章志：連結強度による道路ネットワーク評価方法の提案，第 28 回交通工学研究発表会論文報告集，pp.169-172，2008.
11) 中山晶一朗：ネットワークレベルでの道路交通の信頼性研究の諸相・展望とその便益評価の一考察，土木学会論文集 D3(土木計画学),Vol. 67, No.2, pp.147-166, 2011.
12) 若林拓史：道路網の信頼性解析に関する基礎的研究，京都大学学位論文，1989.
13) 若林拓史・飯田恭敬・吉木 務：交通工学 Vol.26, No.5, pp.9-18,1991.
14) 井上紘一：システムの信頼性および安全性解析，日本機械学会誌，Vol.79，No.686, pp.56-61, 1976.
15) 小林正美：道路網・ネットワークシステムの信頼度解析法に関する研究，都市計画別冊，No.15，pp.385-390，1980.
16) Fratta, L. and Montanari, U. G. (1973). A Boolean Algebra Method for Computing the Terminal Reliability in a Communication Network, IEEE Trans. on Circuit Theory, VOL. CT-20, No.3, pp. 203-211.
17) Barlow, R.E. and Proschan, F. (1965). Mathematical Theory of Reliability, 205-209, John and Wiley & Sons, Inc., New York,
18) Birnbaum, Z. W. (1969). On the Importance of Different Components in Multi-Component System. Multivariate Analysis II (P. R. Krishnaiah Ed.), Academic Press, New York.
19) Henley, E.J. and Kumamoto, H. (1981). Reliability Engineering and Risk Assessment, Prentice-Hall, Inc., 418-436.

（2018.?.? 受付）

NECESSITY OF APPROXIMATE METHOD IN HIGHWAY NETWORK RELIABILITY CALCULATION

Takahiro NAGAE, Hiroshi WAKABAYASHI