

高速道路サグのボトルネック現象を表現する 連続体追従モデル

和田 健太郎¹・Irene Martínez²・Wen-Long Jin³

¹正会員 東京大学助教 生産技術研究所 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp

²非会員 Ph.D candidate, Institute of Transportation Studies, University of California, Irvine (4000, Irvine, CA 92697, US)

E-mail: irenemj@gmail.com

³非会員 Associate Professor, Institute of Transportation Studies, University of California, Irvine (4000, Irvine, CA 92697, US)

E-mail: wjin@uci.edu

本稿では高速道路サグにおけるボトルネック現象：(1) 通常の区間より容量が低い；(2) 渋滞後に捌け交通量が低下する；(3) ボトルネック下流の極めて緩やかな加速，を表現するための連続体追従モデルを提示する。このモデルは、(1)-(3)を定常状態として近似的に表現する Kinematic Wave (KW) モデルに基づいて導出される。そのため KW モデルの定常状態 (first-order) 特性を引き継ぎながら定常状態間の遷移 (second-order) 現象も表現可能な“parsimonious”な追従モデルを得ることができる。この追従モデルの数値例を示すとともに、理論的な性質について考察する。

Key Words:

1. はじめに

サグ(上り坂)およびトンネル部は、通常の単路部区間よりも相対的に容量(この容量を“渋滞発生時容量”と呼ぶ)が著しく低くなりうる交通上のボトルネックである。また、一度ボトルネック上流に待ち行列が発生すると、捌け交通量がさらに低下するいわゆる“capacity drop”が発生することが知られている。この種のボトルネックは長年に渡り認識されてきたものの (Edie and Foote¹; Koshi et al.²)、現在でも我が国の最も典型的な交通渋滞発生の原因である。例えば、都市間高速道路の交通渋滞のうち、約 80%がサグ・上り坂(60%)やトンネル入口(20%)で生じている (Xing et al.³)。

Koshi et al.²や Koshi⁴では、上記のようなマクロな現象が次のようなミクロな運転挙動から生じると論じられている：(i) 交通渋滞は車線変更¹やある種の追従挙動 (i.e., 平均的に通常区間よりも長い車頭距離/時間が必要である) をきっかけとする；(ii) capacity drop はボトルネック下流(約 1~3km)の極めて緩やかな加速で特徴づけられる。多くの実証研究が、これらの議論を支持している：(i)については例えば、Patire and Cassidy⁶、Goñi Ros et al.⁷；(ii)については、岡村ら⁸、Ozaki⁹などが挙げられる。

一方、このようなボトルネックの渋滞現象を再現する

¹ 暫定二車線道路においても渋滞発生や capacity drop が生じていることから (Okamura et al.⁵)、車線変更はこれらが生じるための必要条件ではないと考えられる。

ために、様々な追従モデルが開発されてきた。これらは、上記 (i) の要因に基づき渋滞の“発生”を記述することを主眼にしているモデルである。例えば、Koshi et al.²では、General Motors 型¹⁰の追従モデルにサグ部における縦断勾配変化の影響を考慮するモデルを提案しており、これは、Ozaki¹¹、邪・越¹²により精緻化されている。また、Oguchi and Konuma¹³では、従来提案されてきた様々な追従モデルといくつかの勾配影響モデルを組み合わせる網羅的に比較を行っている。また、近年、Intelligent Driver Model¹⁴ (IDM) に勾配影響モデルを組み合わせたモデルの提案もなされている (e.g., Goñi Ros et al.¹⁵)。

これらのモデルは、適切にパラメータをキャリブレーションすれば、ある特定の渋滞発生イベントを再現することや、渋滞発生時の定性的な状況は再現できるであろう。しかし、この方向のモデリングには大きく二つの課題がある。第一に、モデルが非常に複雑であり、その一般的な物理的/数学的特性(例えば、“collision-free”性や安定性)を理論的に把握することが難しいことである。そのため、その特性も然ることながら、多数の追従挙動の集積であるマクロな交通状態量(例えば、渋滞発生時容量)に関する一般性のある知見を得ることが難しい(あるいは、それらを系統的かつ定量的に把握しようとするれば、初期・境界条件やパラメータの膨大な組に対するシミュレーションを行うことは避けられない)。

第二に、上記のモデルが対象としている渋滞発生時の現象は、同じ交通需要でも渋滞が起きたり起きなかったりするなど、ゆらぎが大きいことである。例えば、大口ら¹⁶⁾は、中央道下り談合坂 SA～大月 JCT 間の鳥沢橋付近のサグの渋滞発生時交通量を調べ、次のように述べている：「渋滞発生時換算交通流率は約 2500～3600 [台/時/2 車線] で広い範囲に散らばり、これを渋滞発生時の交通容量と考えるにはあまりにも変動が大きいように思われる」。すなわち、現状のモデリング・アプローチは複雑な現象を複雑なモデルで再現しようとしている、とも言えるであろう。一方で、Koshi et al.²⁾ や Ozaki⁹⁾ などで述べられているように、capacity drop 後のボトルネック下流の交通状態は定常的で、比較的安定している。しかし、上述の複雑な現象を説明しようとするモデルが、この比較的単純な状態を再現できるかについても疑問が残る²⁾。

以上を鑑みると、「安定的な現象を単純なモデルで説明する」という数理モデルの基本に立ち返って、段階的にモデルを拡張していくアプローチが重要であると考えられる。幸いにも近年、そのようなニーズを満たす単純化 (“parsimonious”) モデリングが交通流理論分野では発展してきている (例えば、和田ら^{18),19)} のレビューを参照)。本稿で紹介するモデルは、この単純化モデリング・アプローチの第一ステップに当たるものである。

本稿は、Wada et al.²⁰⁾ で提案されたサグのボトルネック現象を表現する連続体追従モデル³⁾ を紹介する。このモデルは、先に述べたサグにおけるマクロな交通現象やミクロな運転挙動を定常状態として近似的に表現する Kinematic Wave (KW) モデル²¹⁾ に基づき導出される。そのため KW モデルの定常状態 (first-order) 特性を引き継ぎながら定常状態間の遷移 (second-order) 現象も表現可能な “parsimonious” な追従モデルを得ることができる。この追従モデルの数値例を示すとともに、理論的な性質について考察する。

本稿の構成は以下の通りである。まず、2. にて、Jin²¹⁾ によって提案された Kinematic Wave (KW) モデルの概要を示す。3. では、この KW モデルに基づき、連続体追従モデルを導出する。4. では、提案追従モデルの数値例を示すとともに、理論的な性質について考察する。5. で本稿のまとめと今後の展望を示す。

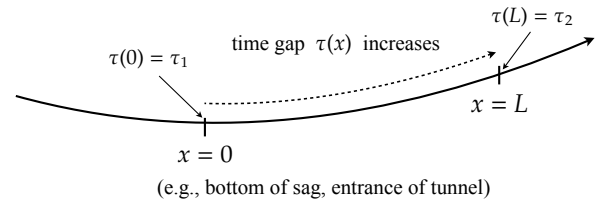


図-1 サグボトルネック区間の設定

2. Kinematic Wave モデルの概要

本章では、Jin²¹⁾ によって提案された KW モデルの概要を示す。

(1) 状況設定

本稿では、図-1 に示すような一次元の道路を考え、その中にサグ (あるいはトンネル) ボトルネック区間 $x \in [0, L]$ を設ける。サグボトルネック区間内では、先行車との最小車頭距離 d を維持するために後続車が必要な時間 “時間ギャップ (time gap)⁴⁾” $\tau(x)$ が線形に増加すると仮定する：

$$\tau(x) = \tau_1 + \Delta\tau \cdot (x/L) \quad x \in [0, L] \quad (1)$$

ここで、 $\Delta\tau \equiv \tau_2 - \tau_1$ 、 $\tau(0) = \tau_1$ 、 $\tau(L) = \tau_2$ である。その他の区間 ($x \notin [0, L]$) については、一般性を失うことなく、 $\tau(x) = \tau_1$ とする。この仮定は、冒頭でも言及した、ボトルネック区間において車両が通常区間よりも長い車頭距離/時間が必要であることに対応しており、“渋滞発生時容量”を外生的に与えていることを意味する。より具体的には、区分線形の Fundamental Diagrams (FDs) を仮定すると、車頭距離-速度関係およびそれに対応した交通量-密度関係は、図-2 のようになる。ここで、 s, v, q, k は、それぞれ、車頭距離、速度、交通量、密度であり、FD パラメータ $u, d, \kappa (= 1/d)$ は、自由流速度、最小車頭距離、ジャム密度である。この図から分かるように、容量値は通常区間の C_1 からサグボトルネック区間で徐々に減少し、 $x = L$ で C_2 の値をとる。

(2) 定常状態分析

上記のような非均一な道路設定のもと、Lighthill-Whitham-Richards (LWR) モデル^{22),23),24)} でどのような定常状態が生じるかを考えてみよう。ここで、LWR モデルは、次のように与えられる。

$$\frac{\partial k(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} = 0 \quad (2a)$$

$$q(t, x) = Q(k(t, x), x) = \min \left\{ uk, \frac{1}{\tau(x)} \left(1 - \frac{k}{\kappa} \right) \right\} \quad (2b)$$

²⁾ 著者らの知る限り、この安定状態の再現を志向したモデルは、尾崎¹⁷⁾のみである。しかし、このモデルは 20 以上のパラメータを必要とし、その妥当性を検証することは難しい。

³⁾ 後で示すように、Lagrangian 座標系における連続体交通流モデルとも解釈できる。

⁴⁾ “反応時間”や “wave trip time”とも呼ばれることがある。

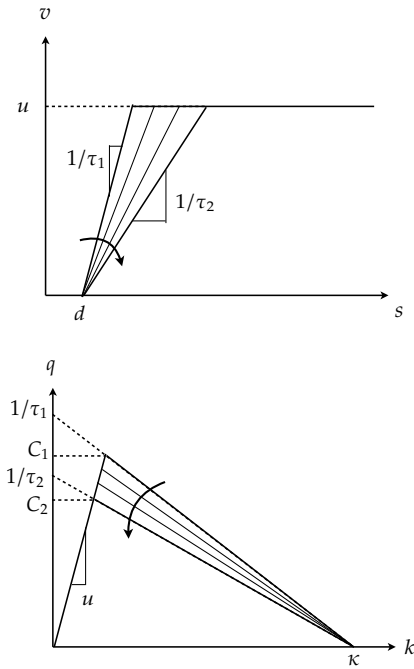


図-2 Fundamental Diagrams (上図：車頭距離-速度関係；下図：交通量-密度関係)

いま、道路区間全体の交通状態が時間に依存しない定常状態 (i.e., $\partial k/\partial t = \partial q/\partial t = 0$) にあるとする。このとき、連続式(2a)より $\partial q/\partial x = 0$ であり、地点によらない交通量を q^* ($\leq C_2$) と表す。一方、FD(2b)より、密度は、

$$k^*(x) = \begin{cases} q^*/u & \text{if 自由流状態} \\ \{1 - q^*\tau(x)\}\kappa & \text{if 渋滞流状態} \end{cases} \quad (3)$$

ここで、渋滞流状態にのみ着目すると、速度は、

$$v^*(x) = \frac{q^*}{\{1 - q^*\tau(x)\}\kappa} \quad (4)$$

時間ギャップの仮定より、サグボトルネック区間内では、密度は単調減少、速度は単調増加することがわかる。

さらに、LWRモデルにおける加速度は、

$$a(t, x) = \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (5)$$

であるので、渋滞状態におけるボトルネック区間での加速度 $a^*(x)$ は、

$$a^*(x) = \frac{\partial v^*(x)}{\partial x} \cdot v^*(x) = \frac{(q^*)^3 \cdot \tau'(x)}{\{1 - q^*\tau(x)\}^3 \kappa^2} \quad (6)$$

となる。ここで、 $0 < q^*\tau(x) \leq 1$ であり ($\because q^* \leq C_2 \leq (1/\tau(x))$)、加速度についても単調増加となる。

ボトルネック下流端 $x = L$ を先頭に待ち行列が発生している場合 (i.e., $q^* = C_2$) には、その先頭で加速度は ∞ 、速度は自由流速度 u となる。なお、この設定において“渋滞の先頭”といったときには、次の二つの地点が考えられる：(i) 待ち行列の先頭である $x = L$; (ii) 速

度回復の開始地点である $x = 0$ 。以降では、前者を渋滞の先頭と呼び、後者を速度回復開始地点と呼ぶことにする。

(3) 単純化による有界加速度制約の導入

Jin²¹⁾ では、以上の LWR モデルに有界加速度 (BA: Bounded Acceleration) 制約を導入した KW (first-order) モデルを考える。この制約は、車両が他車との相互作用なく (あるいは、空の道路を)、走る際の自然な加速を記述する BA モデル (加速度-速度関係) $A(x, v)$ により与えられる。代表的な例としては、一定 (constant) BA モデルや TWOPAS モデル²⁵⁾ が挙げられる：

$$A^C(x) = a_0 - g\Phi(x) \quad [\text{constant}] \quad (7)$$

$$A^T(x, v) = (a_0 - g\Phi(x)) \cdot (1 - v/u) \quad [\text{TWOPAS}] \quad (8)$$

ここで、 a_0 は最大加速度であり、 g は重力加速度、 $\Phi(x)$ は decimal grade⁵ である。TWOPAS モデルは、速度が自由流 (あるいは、希望) 速度に近くなるほど加速が緩やかになるという自然な運転行動を考慮している。

さて、素朴に考えると、BA 制約を first-order モデルで扱うことは不可能である。なぜなら、式(5)を計算するためには、速度ダイナミクス $\partial v(t, x)/\partial t$ を計算する必要があるが、first-order モデルはそのようなダイナミクスを記述していない (それが、“first-order”モデルと呼ばれる所以である)⁶。ただし、定常状態を考えれば、前節で示したように、加速度の空間的な変化は記述することができる (正確には、結果的に与えられる)。

そこで、Jin²¹⁾ では、ボトルネック区間 $x \in [0, L]$ およびその下流区間 $x \in [L, L + L']$ では、交通状態が“瞬間的に”定常状態に遷移するという仮定 (定常波 (standing wave) の仮定) の下で、BA 制約を導入するというモデルを提示している。そして、次のような一般化リーマン問題⁷ を解くことにより、KW モデルの特性を理論的に明らかにしている。

$$\frac{\partial k(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial Q(k(t, x), x)}{\partial x} = 0 \quad (9a)$$

subject to

$$k(0, x) = \begin{cases} k_1 & x < 0 \\ k^*(x) & 0 \leq x \leq L + L' \\ k_2 & x > L + L' \end{cases} \quad (9b)$$

$$a^*(x) \leq A(x, v^*(x)) \quad 0 \leq x \leq L + L' \quad (9c)$$

ここで、 $*$ は定常状態を表す。式(9a)は LWR モデルを表しており、式(9b)は初期条件、式(9c)は BA 制約で

⁵ 従来研究のように、勾配差で置き換えてもよい。

⁶ そのため、“high-order”モデルを考える必要性が生じるが (そして、それが本稿の主題ではあるが)、その議論は 3. に譲る。

⁷ リーマン問題は、密度がある地点で一度だけ変化する初期条件を持つ初期値問題であり、KW モデルの理論的な特性把握や数値解法を構築する上で中心的な役割を果たす。

ある。このモデルにおいては、BA 制約が効いている区間では均衡状態 (i.e., FD 関係) を満たさない不均衡状態が生じる。この点でも、通常の LWR モデルと異なる。

前節でも述べたように、渋滞流中のボトルネック区間の加速度は $x = 0$ で最も小さく、 $x = L$ で最も大きい。また、速度は単調増加するので、(TWO PAS モデルのような一般的な) BA モデルにより与えられる加速度は (よほど変な勾配条件を与えなければ) 単調減少する。さらに、地点 $x > L$ では、BA 制約がなく、かつ、自由流速度に達していない場合には、(LWR モデルであるため) 速度回復のために無限大の加速度が発生する。従って、実質的に BA 制約が効くのは、地点 $x \geq L$ であり、式 (9c) は、

$$a^*(x) \leq A(x, v^*(x)) \quad L \leq x \leq L + L' \quad (10)$$

で置き換えることができる。つまり、提案された KW モデルにおいて BA 制約が効くとき、ボトルネック区間は $0 \leq x \leq L$ では均衡状態 (i.e., FD 関係を満たす)、ボトルネック下流区間 $L < x \leq L + L'$ は不均衡状態が実現することになる (式 (10) は等式で満たされる)。

(4) モデル特性

以上のモデルの特性を簡単に述べる。まず、次のような関数 $\Psi(x, q^*)$ を定義する：

$$\Psi(x, q^*) \equiv a^*(x) - A(x, v^*(x)). \quad (11)$$

そして、 $\Psi(L, q^*) = 0$ を満たす q^* を C^- と定義する。この C^- について、次のような結果が得られる： C^- は必ず存在し、唯一であり、かつ、適当な条件下⁸ で $0 < C^- < C_2$ を満たす。つまり、 C^- は capacity drop 後のボトルネックの捌け交通量と解釈することができる。さらに、一定 BA モデルで制約が与えられている場合は、 C^- は下記のように解析的に与えられる：

$$C^- = \frac{y}{1 + \tau^2 y} \quad \text{where } y \equiv \left(\frac{A^C(L) \kappa^2 L}{\Delta \tau} \right)^{1/3}. \quad (12)$$

すなわち、 C^- は、ボトルネック区間の長さ L やそこでの容量の低下に対応する $\Delta \tau$ 、下流端の加速度 $A^C(L)$ に依存し、交通需要とは無関係に決まることがわかる。

さらに、任意の上下流初期密度に対して一般化リーマン問題を解析的に解くことにより、「ボトルネック上流に待ち行列が存在するとき、capacity drop が生じる」ことを明らかにしている。逆に言えば、ボトルネック上流が自由流状態のときは、 C_2 が実現しうる。

最後に、越²⁶⁾、Koshi et al.²⁾ に示されている capacity drop 後の安定状態における小仏トンネル下り線での速

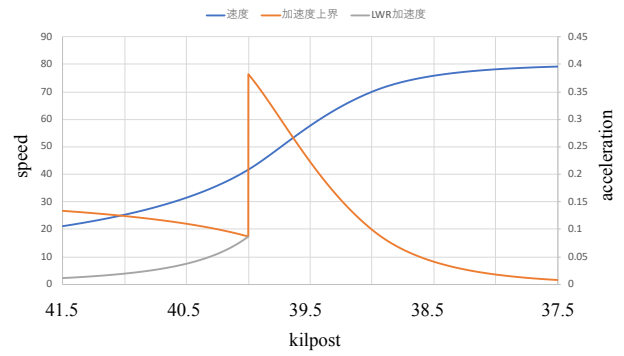


図-3 小仏トンネルにおけるキャリブレーション例

度プロファイルを用いて、モデルをキャリブレーションした結果を図-3 に示す。横軸はキロポスト、縦軸は左軸が速度、右軸が加速度を表す。この図において、ボトルネック区間の上流端は 41.5 キロポスト、下流端は 40 キロポストである。Jin²¹⁾ で示されているように、青実線は実際の速度プロファイルにかなり合っている。橙実線は TWO PAS モデルの加速度上界を表しており、40 キロポスト付近でジャンプがあるのは、この地点において勾配変化させているためである。灰色実線はボトルネック内における LWR 加速度を表しており、ボトルネック下流に行くほど増加し、下流端で BA 制約が効いていることが見てとれる。従って、このモデルで実現する加速度プロファイルは、40 キロポスト付近までは灰色実線、その後は橙実線で与えられる。

なお、このモデルのパラメータは、通常の KW モデルの 3 つに加えて、渋滞発生時容量を決める τ_2 、ボトルネック区間の長さ L 、最大加速度 a_0 の計 6 個であり、これらはマクロな観測交通状態量から極めて容易に (手計算で) キャリブレーションすることができる。

(5) 実現象への示唆

以上の理論はさらなる実データによる検証が必要であるが、現時点で理論から示唆される実現象への示唆/予測としては、以下が考えられる。

1. Capacity drop 後の安定状態において、二つの質的に異なる状態が隣接して出現する (ボトルネック付近は均衡状態、ボトルネック下流では不均衡状態)。
 2. 速度回復プロファイルは、均衡状態においては凸関数、不均衡状態では凹関数となる。そして、その変曲点で加速度は最大値をとる。
1. については、サグボトルネック区間に沿って、FD 見てみるとすぐに確認できる。より具体的には、ボトルネック下流側の FD の内部には、(発進流によって決まる) 不均衡状態の点群が現れる。例えば、塩見²⁷⁾ の図-5.1.5 ~ 5.1.8 にはそのような状態がはっきり見える。
2. は capacity drop 現象への対策を考える上で重要であ

⁸ 式 (10) を満たす条件下でボトルネック区間で速度が自由流速度まで回復するほど L が大きくない、あるいは、 $A(L, u)$ が大きくない条件。

る。なぜなら、前節で示したように、capacity drop 後の捌け交通量はこの変曲点における加速度で決まっているためである。従って、例えば近年用いられている発光体を用いた渋滞対策により capacity drop 後の捌け交通量を上げようとするれば、この地点 $x = L$ での加速を促すことが重要であると考えられる。

3. 連続体追従モデル

前章で概要を示した KW モデルは「現実に安定的に観測されているマクロな現象 (capacity drop) とミクロな現象 (緩慢な加速) をどのように関連づけるべきか」という問題へのアプローチを、定常状態に焦点 (定常波の仮定) を絞ることにより明快に示している⁹。しかし (それが故に)、「どのように capacity drop が発生・進展するのか」という点については何も語っていない。つまり、このモデルは現象の基本構造を切り取るための思考モデルという意味合いが強く、(Jin²¹) では Cell-Transmission Model も示されているが) サグ・トンネル部における渋滞現象を記述・シミュレートするには難がある。

本章では、KW モデルを拡張することにより、サグ・トンネル部における渋滞現象を記述・シミュレートする連続体追従モデルを導出する。

(1) 高次マクロ交通流モデルへの拡張

まずは、Lebacque^{29),30)} で提案された “two-phase” モデルと同様の方法で、KW モデルを二次マクロ交通流モデルに拡張する：

$$\frac{\partial k(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial Q(k(t,x),x)}{\partial x} = 0 \quad (13a)$$

$$\begin{cases} v(t,x) = V(k(t,x),x) & \text{if } a(t,x) \leq A(x,v) \\ v(t,x) \leq V(k(t,x),x) & \text{if } a(t,x) = A(x,v) \end{cases} \quad (13b)$$

ここで、 $V(k(t,x),x) = Q(k(t,x),x)/v(t,x)$ は密度 (あるいは、その逆数の車頭距離) と速度関係を表す FD であり、 $a(t,x)$ は式 (5) で表される LWR モデルによる加速度である。第一式 (13a) は先に示した LWR 方程式であり、第二式 (13b) は速度の時空間進展を記述するものであり速度方程式と呼ばれる。その意味は、加速度が BA 制約を下回る場合 (第二式 (13b) の上段：LWR フェーズ)、速度は FD から決まり、制約が効く場合 (第二式 (13b) の下段：BA フェーズ) は、以下の微分方程式：

$$a(t,x) = \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = A(x,v) \quad (14)$$

により決まる、というものである。KW モデル (定常状態分析) との違いは、 $\partial v(t,x)/\partial t$ が必ずしもゼロでない点である。

Two-phase モデルは LWR モデルの簡潔性を引き継いでいるが (例えば、均質道路の解を解析的に求めることができる³⁰⁾)、その数値解法は与えられていない。

(2) 座標変換

一般に、マクロ交通流モデルは複数の (数学的に正しい) 解があり、その中から交通流現象としてもっともらしい解を選ぶ必要がある。従って、その数値解法においても、物理的に正しい解を (近似的に) 選び取れるかが極めて重要である。高次マクロ交通流モデルは、KW モデルよりもモデル挙動が複雑であるため、当然解法の構築もより注意深く行う必要がある。特に、Daganzo³¹⁾ が指摘したように、高次マクロ交通流モデルでは、交通流はその下流からのみ影響を受けるという基本的な特性、非等方性 (anisotropic property)、を満たさない等方的 (isotropic) な解が生じうる点には注意が必要である。

そもそも等方性の問題は、本来的に車両単位で (ラグランジアン座標系 (t,n) で) 記述されるべき加速現象をオイラー座標系 (t,x) で記述していることに起因すると考えられる。従って、LeVeque³²⁾ で示唆されているように¹⁰、オイラー座標系で記述されていた上記のモデルに対応するラグランジアン座標系における追従モデルを考えれば、上記のような交通流の基本特性を自然に満たすことができるであろう。

そこで、Jin³³⁾ によって提案された手法を用いて、上記の高次マクロ交通流モデルをラグランジアン座標系 (t,n) の追従モデルへと変換する。ここで、 n は累積台数 (車両番号) を表す。この変換法は、(i) 状態変数の変換と (ii) 微分演算の差分近似から構成されている。まず (i) では、 n 台目の車両速度 $v(t,n)$ 、車頭距離 $s(t,n)$ を次のように表す：

$$v(t,n) \equiv \partial X(t,n)/\partial t = q(t,x)/k(t,x) \quad (15a)$$

$$s(t,n) \equiv -\partial X(t,n)/\partial n = 1/k(t,x) \quad (15b)$$

ここで、 $X(t,n)$ は n 台目の車両の時刻 t における位置である。また、 $X(t,n)$ を (偏) 微分することで得られる、 $v(t,n), s(t,n), a(t,n)$ を次のような差分で近似する：

$$v(t,n) \approx \frac{X(t,n) - X(t - \Delta t, n)}{\Delta t} \quad (16a)$$

$$s(t,n) \approx \frac{X(t, n - \Delta n) - X(t, n)}{\Delta n} \quad (16b)$$

$$a(t,n) \approx \frac{v(t + \Delta t, n) - v(t, n)}{\Delta t} \quad (16c)$$

⁹ 前節で示した capacity drop の説明論理自体は全く新しいものではない。越²⁸⁾ では、ほぼ同じ説明がなされている (しかし、その論理に基づくモデリングは全く異なる)。

¹⁰ LeVeque³²⁾ は高次モデルではなく、同様に非物理的な解が生じうる非凹型の FD を仮定した LWR モデルの文脈で、異なる座標間での解特性の違いについて議論している。

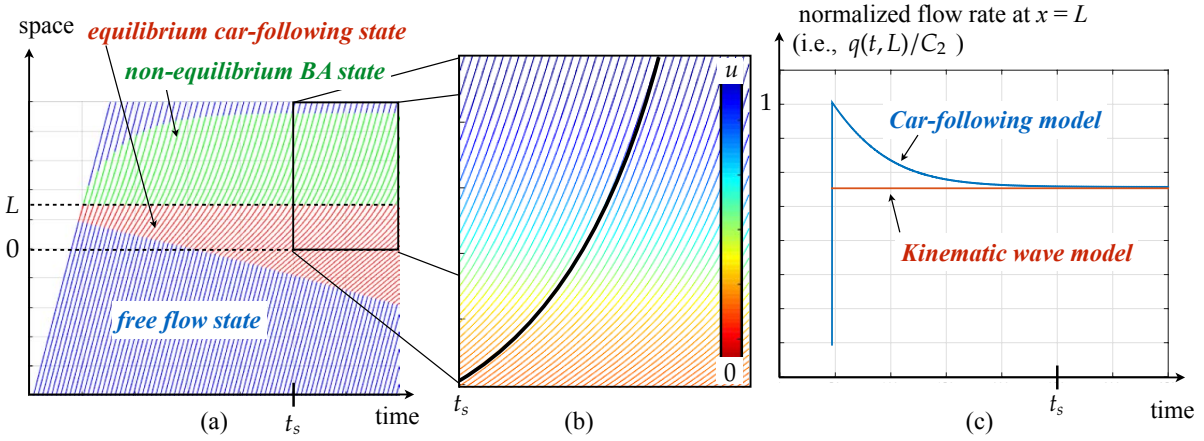


図-4 提案追従モデルの数値計算例。(a) 車両軌跡 (色: 運転フェーズ); (b) 定常波における車両軌跡 (色: 速度); (c) ボトルネック区間下流端における規格化捌け交通量の低下過程。

以上の式 (15), (16) を, 式 (13b) の離散化版:

$$\begin{cases} v(t + \Delta t, x) = V(k(t, x), x) & \text{if } a(t, x) \leq A(x, v) \\ v(t + \Delta t, x) \leq V(k(t, x), x) & \text{if } a(t, x) = A(x, v) \end{cases}$$

に代入して整理すると, 最終的に以下のモデルが得られる¹¹。

$$X(t + \Delta t, n) = X(t, n) + \min \{V(s(t, n), x), v(t, n) + A(x, v)\Delta t\} \Delta t \quad (17a)$$

where

$$V(s(t, n), x) = \min \left\{ u, \frac{1}{\tau(X(t, n))} (s(t, n) - d) \right\} \quad (17b)$$

離散化幅 Δn は通常の追従モデルであれば 1 であるが, ここでは連続量として扱っているため, “連続体”追従モデルと呼ぶ。

このモデルは, Newell の (単純化) 追従モデル³⁴⁾ やその有界加速度版 (Laval and Leclercq³⁵⁾) の拡張版と位置づけられる。そのため, これらのモデル同様, 非常に簡潔 (“parsimonious”) であり, パラメータはマクロな観測量からキャリブレーション可能である。また, 非等方性・非負速度の自然な条件を満たし, 以下の CFL 条件 (数値安定性の条件) を満たすとき:

$$\max(V'(s, x)) = 1/\tau_1 \leq \Delta n/\Delta t \quad (18)$$

車両が追突を起こすことはない (“collision-free”)。また, このモデルは完全に安定である。

¹¹ 式 (13a) の保存則は明示的に用いていないが, $X(t, n)$ が $(\Delta t \rightarrow 0, \Delta n \rightarrow 0)$ の極限で) 時間・累積台数について連続であれば, 自然に保存則は満たされる。

4. モデル特性の解析

(1) 数値例

提案追従モデルの数値計算例を図-4 に示す。図における 3 つのグラフは左から, それぞれ, (a) 車両軌跡, (b) 定常波内部における車両軌跡, (c) ボトルネック区間下流端 $x = L$ における (C_2 で規格化した) 捌け交通量の低下過程, を示している。

まず, 図の t_s 後の定常状態を見てみよう。次の点で, KW モデルとの対応が確認できる: (i) ボトルネック区間付近が均衡状態, その下流が不均衡状態になっている, (ii) capacity drop が完了した後の捌け交通量は両モデルで一致する。

次に, t_s 前の非定常状態を見てみると, 捌け交通量の推移に関しては, KW モデルが一瞬にして完全な capacity drop 状態に到達するのとは異なり, 提案追従モデルでは capacity drop が進展する過程が表現できていることがわかる。一方, (i) の性質は非定常状態においても成立し, かつ, 不均衡状態の進展と捌け交通量の低下過程には対応があることが見てとれる。また, その他の多くの数値計算結果より, (iii) 捌け交通量の低下過程は, 待ち行列がボトルネック上流に存在する限り交通需要とは無関係に決まることがわかった。

(2) 捌け交通量の低下過程のメカニズム

前節で述べた (iii) の性質から, ボトルネック上流に待ち行列が存在すると仮定すれば, 捌け交通量の低下過程の分析は需要を全く考えることなく実行できる。また, (i) の性質を用いて, capacity drop の進展メカニズムを考察してみよう。

図-5 は, 有界加速度制約のない Newell の追従モデル³⁴⁾ と提案追従モデルのサブボトルネック区間下流端 $x = L$ での走行挙動の違いのイメージを時空間図で表現

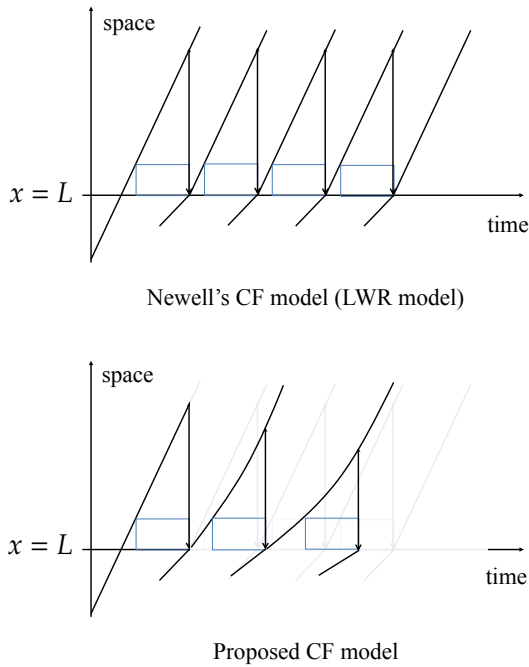


図-5 捌け交通量低下過程のメカニズム

したものである。まず、両図ともに、最初の車両は自由流速度で走行しているとする。しかし、十分需要が大きい場合には、二台目以降の車両は、容量が徐々に低下していくサグボトルネック区間のどこかで先行車に追いつき、追従状態（均衡状態）となる。そして、図に示すような（FD で決まる）均衡速度で下流端に到達する。ここで、均質な道路のように連続する車両軌跡が平行にならない理由は、FD が変化しているためである。

さて、Newell の追従モデルでは、 $x = L$ を過ぎると無限大の加速度で自由流速度に回復するため、二台目以降も全く同様の挙動が繰り返されて、常に一定の車頭間隔が実現する（この逆数は渋滞発生時容量の C_2 である）。一方、提案追従モデルでは、加速度が制約されているため、二台目の車が自由流速度に到達するまでに一定時間を必要とする。そのため、三台目の車が $x = L$ に到達できる時刻（i.e., 青色のボックスの右下端）は Newell の追従モデルより遅れることになる。さらに、そのときの車頭距離も Newell の追従モデルより短いので、FD による均衡速度も当然小さくなる。するとさらに、三台目の車が $x = L$ を抜けてから加速するのにさらに時間がかかり... というようにして車頭時間が伸びていく（捌け交通量が低下していく）ことになる。

(3) 捌け交通量低下過程モデル

以上の考察から、次のような捌け交通量の低下過程モデルを描くことができる。具体的には、ある n 台目の車の $x = L$ での速度を v_n とし、その車両が有界加速

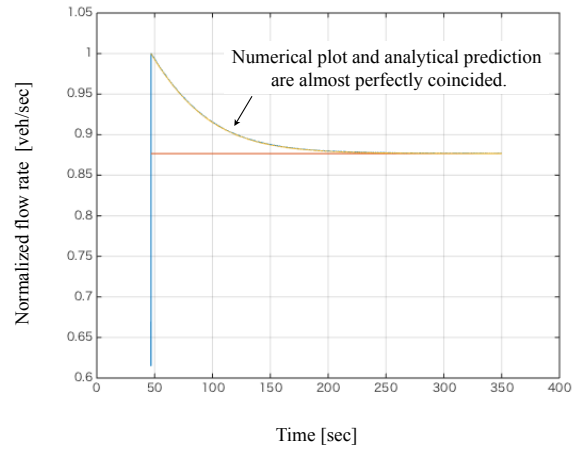


図-6 捌け交通量の低下過程モデルの数値計算例

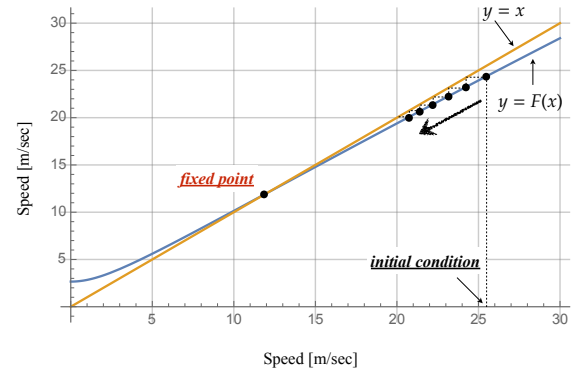


図-7 捌け交通量の低下過程モデルの不動点への収束過程

度で青色のボックスの左上端に到達する（i.e., $d\Delta n$ の距離だけ走る）のにかかる時間を t_n とすると、

- BA モデル： $t_n = G(v_n)$
- 均衡関係 FD： $v_{n+\Delta n} = F(t_n)$

という二段階のステップで v_n から $v_{n+\Delta n}$ を予測する、というモデルである。ここでは導出の詳細を省くが、一定 BA モデル $A^C(x) = a_0$ を用いると、捌け交通量の低下過程モデルは下記のように解析的に与えられる。

$$v_{n+\Delta n} = F(G(v_n)) = \frac{1}{\alpha\Delta n + \frac{1}{\sqrt{\beta\Delta n + v_n^2}}} \quad (19a)$$

where

$$\alpha \equiv \Delta\tau/L, \quad \beta \equiv 2a_0d \quad (19b)$$

図-6 に上記の解析的モデルの数値計算例を示す。これは、図-4 の (c) の図に解析モデルの結果（黄実線）を重ねたものである。これにより、モデルの計算結果とシミュレーション結果（青実線）がほぼ完全に一致していることがわかる。

さらに、ここまでの例から、捌け交通量の低下過程はある定常状態に収束することがわかっている。上述の解析的モデルが正しいのであれば、その定常状態は上記

の写像 F の不動点に対応するはずである。実際、(図-6の数値例に対応する) 図-7 では、 F の不動点に速度が収束する様子がみてとれる。

F の不動点での速度 v^* :

$$v^* = F(v^* | \Delta n) \quad (20)$$

は、式展開を行うと以下の多項式の実数根であることがわかる (導出は省略)。

$$\alpha^2 \Delta n v^{*4} - 2\alpha v^{*3} + \alpha^2 \beta (\Delta n)^2 v^{*2} - 2\alpha \beta \Delta n v^{*2} + \beta \quad (21)$$

この式は解析的には解くことができないので、 $\Delta n \rightarrow 0$ の極限を考えよう。すると、

$$-2\alpha v^{*3} + \beta \quad (22)$$

であり、不動点における速度が、

$$v^* = \left(\frac{a_0 L}{\kappa \Delta \tau} \right)^{1/3} = y / \kappa \quad (23)$$

と求まる。これは、Jin²¹⁾ の KW モデルによる捌け交通量の解析式 (12) と厳密に対応している。つまり、 $\Delta n \rightarrow 0$ としたとき、提案追従モデルと KW モデルの完全な capacity drop 状態が整合していることが理論的に保証される。

5. まとめと今後の展望

本稿では、サグ・トンネルボトルネックの capacity drop 現象を再現するための連続体追従モデルを紹介した。従来の追従モデルと異なり、提案モデルは極めて簡潔であり、capacity drop の進展過程を理論的に解析できることも示した。また、Jin²¹⁾ の KW モデルと異なり、利用者の運転行動の異質性を容易に考慮可能であるという点もラグランジアン座標系でモデルを記述したメリットである。

本稿で紹介したサグ・トンネルボトルネック渋滞現象に対する一連の理論は、実現象の新たな解釈やデータの新たな見方を与えることができる可能性がある。例えば、従来、捌け交通量の低下過程は、渋滞巻き込まれ時間が長くなることによって各車両の運転挙動が緩慢になることに起因すると、統計分析の結果から説明されてきたが^{2),4)}、本稿で示した理論モデルとデータを付き合わせるにより、具体的にどのパラメータが変化しているかを分析することもできるであろう。また、捌け交通量の低下過程は、capacity drop 後の安定状態に比べるとばらつくことも指摘されているが、今回の理論によれば、いくつかの特定のパラメータ (i.e., α, β) が利用者の異質性によりばらつくためであると解釈できる。そのばらつきを実データから理解できたのであれば、冒頭でも述べたより複雑な現象、渋滞発生

時の交通量レベルのばらつき、にも何らかの示唆を与えられると考えられる。

以上に加えて、発表会では、提案モデルの渋滞制御問題への適用や、より複雑なサグ・トンネルボトルネック現象のモデル化に向けた提案モデルの拡張方針等についても議論を行う予定である。

参考文献

- 1) Edie, L. C. and Foote, R. S.: Traffic flow in tunnels, *Highway Research Board Proceedings*, Vol. 37, pp. 334-344, 1958.
- 2) Koshi, M., Kuwahara, M. and Akahane, H.: Capacity of sags and tunnels on Japanese motorways, *ITE Journal*, Vol.62, No.5, pp.17-22, 1992.
- 3) Xing, J., Muramatsu, E. and Harayama, T.: Balance lane use with VMS to mitigate motorway traffic congestion, *International Journal of Intelligent Transportation Systems Research*, Vol.12, No.1, pp.26-35, 2014.
- 4) Koshi, M.: An interpretation of a traffic engineer on vehicular traffic flow, *Traffic and Granular Flow'01*, pp. 199-210, Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- 5) Okamura, H., Watanabe, S. and Watanabe, T.: An empirical study on the capacity of bottlenecks on the basic suburban expressway sections in Japan, *Transportation Research Circular E-C018: Fourth International Symposium on Highway Capacity*, pp. 120-129, 2000.
- 6) Patire, A. D. and Cassidy, M. J.: Lane changing patterns of bane and benefit: Observations of an uphill expressway, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.45, No.4, pp.656-666, 2011.
- 7) Goñi Ros, B., Knoop, V. L., van Arem, B. and Hoogendoorn, S. P.: Car-following behavior at sags and its impacts on traffic flow, *The 92nd TRB Annual Meeting*, 2013.
- 8) 岡村秀樹・渡辺修治・泉正之: 都市間高速道路における短路部渋滞先頭地点の交通現象, *交通工学*, Vol.35, No.6, pp.48-56, 2000.
- 9) Ozaki, H.: Modeling of vehicular behavior from road traffic engineering perspectives, *Traffic and Granular Flow'01*, pp. 281-292, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- 10) Gazis, D. C., Herman, R. and Rothery, R. W.: Nonlinear Follow-the-Leader Models of Traffic Flow, *Operations Research*, Vol.9, No.4, pp.545-567, 1961.
- 11) Ozaki, H.: Reaction and anticipation in the car-following behavior, *Proceedings of the 12th International Symposium on Transportation and Traffic Theory* (Ed. by C. F. Daganzo), pp. 349-366, 1993.
- 12) 邪健・越正毅: 高速道路のサグにおける渋滞現象と車両追従挙動の研究, *土木学会論文集*, Vol.IV-5, No.506, pp.45-55, 1995.
- 13) Oguchi, T. and Konuma, R.: Comparative study of car-following models for describing breakdown phenomena at sags, *Proceedings of the 16th World Congress on ITS*, 2009.
- 14) Treiber, M., Hennecke, A. and Helbing, D.: Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations, *Physical Review E*, Vol.62, No.2, pp.1805-1824, 2000.
- 15) Goñi Ros, B., Knoop, V. L., Shiomi, Y., Takahashi, T., van Arem, B. and Hoogendoorn, S. P.: Modeling traffic at sags, *International Journal of Intelligent Transportation Systems Research*, Vol.14, No.1, pp.64-74, 2016.
- 16) 大口敬・片倉正彦・鹿田成則: 高速道路単路部をボトルネックとする渋滞発生特性に関する実証研究, *高速道路*

- と自動車, Vol.44, No.12, pp.27–34, 2001.
- 17) 尾崎晴男: 車両の追従挙動とサグの隘路現象, 学位論文, 東京大学, 1994.
 - 18) 和田健太郎・瀬尾亨・中西航・佐津川功季・柳原正実: Kinematic wave 理論の近年の発展: 変分理論とネットワーク拡張, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.73, No.5, pp.L1139–L1158, 2017.
 - 19) 和田健太郎・瀬尾亨・中西航・佐津川功季・柳原正実: Kinematic wave 理論の近年の発展に関する研究解説, *ResearchGate Working Paper*, available at: <https://www.researchgate.net/publication/313985673>, 2017.
 - 20) Wada, K., Martínez, I. and Jin, W.-L.: Continuum car-following model of capacity drop at sag and tunnel bottlenecks, *Working Paper*, 2018.
 - 21) Jin, W.-L.: Kinematic wave models of sag and tunnel bottlenecks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.107, pp.41–56, 2018.
 - 22) Lighthill, M. J. and Whitham, G. B.: On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers, *Proceedings of the Royal Society A*, Vol.229, No.1178, pp.281–316, 1955.
 - 23) Lighthill, M. J. and Whitham, G. B.: On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads, *Proceedings of the Royal Society A*, Vol.229, No.1178, pp.317–345, 1955.
 - 24) Richards, P. I.: Shock waves on the highway, *Operations Research*, Vol.4, No.1, pp.42–51, 1956.
 - 25) Allen, R., Harwood, D., Christos, J. and Glauz, W.: The Capability and Enhancement of VDANL and TWOPAS for Analyzing Vehicle Performance on Upgrades and Downgrades within IHSDM, Technical report. Federal Highway Administration 00-078, 2018.
 - 26) 越正毅: 高速道路トンネルの交通現象, *IATSS Review*, Vol.10, No.1, pp.32–38, 1984.
 - 27) 塩見康博: 車群交通流モデルによる渋滞現象解析, 学位論文, 京都大学, 2008.
 - 28) 越正毅: 高速道路のボトルネック容量, 土木学会論文集, Vol.IV-5, No.371, pp.1–7, 1986.
 - 29) Lebacque, J. P.: A two-phase extension of the LWR model based on the boundedness of traffic acceleration, *Proceedings of the 15th International Symposium on Transportation and Traffic Theory* (Ed. by M. A. P. Taylor), pp. 697–718, 2002.
 - 30) Lebacque, J.: Two-phase bounded-acceleration traffic flow model: Analytical solutions and applications, *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, Vol.1852, pp.220–230, 2003.
 - 31) Daganzo, C. F.: Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.29, No.4, pp.277–286, 1995.
 - 32) LeVeque, R. J.: Some traffic flow models illustrating interesting hyperbolic behavior night-time traffic flow, *Minisymposium on Traffic Flow. SIAM Annual Meeting*, 2001.
 - 33) Jin, W.-L.: On the equivalence between continuum and car-following models of traffic flow, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.93, pp.543–559, 2016.
 - 34) Newell, G. F.: A simplified car-following theory: a lower order model, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.36, No.3, pp.195–205, 2002.
 - 35) Laval, J. A. and Leclercq, L.: Microscopic modeling of the relaxation phenomenon using a macroscopic lane-changing model, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.42, No.6, pp.511–522, 2008.

(平成 30 年 4 月 27 日 受付)

CONTINUUM CAR-FOLLOWING MODEL FOR CAPACITY DROP AT SAG BOTTLENECKS

Kentaro WADA, Irene MARTINEZ and Wen-Long JIN