

正三角形格子上一様な場における 分岐点近傍の安定性の理論的研究

相澤 大輝¹・池田 清宏²・木暮 洋介³・恩田 幹久⁴

¹学生非会員 東北大学 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: hiroki.aizawa.p3@dc.tohoku.ac.jp

²フェロー会員 東北大学教授 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: kiyohiro.ikedada.b4@tohoku.ac.jp

³学生会員 東北大学 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: yosuke.kogure.t2@dc.tohoku.ac.jp

⁴学生会員 東北大学 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: mikihiisa.onda.p8@dc.tohoku.ac.jp

経済地理学において、Christaller¹⁾とLösch²⁾は中心地理論を提唱し、等方性をもつ空間上での人口集積の正六角形パターンを予測した。Ikeda et al.⁵⁾は正三角形格子という空間設定の仮定に基いた、群論的分岐理論による人口集積理論によってこの予測に科学的根拠を与えた。また、上述の正三角形格子に対し、群論的分岐理論に基づく二重フーリエ級数によるスペクトル解析法⁶⁾が提案されており、実際南ドイツにおいて人口集積の正六角形パターンが検出されている。以上の経緯により、人口集積に関する研究において、群論的分岐理論に基づいたアプローチは妥当であると考えられる。上述の人口集積理論は等方性をもつ2次元無限空間を正三角形格子に分割することで、数値解析を可能としている。従来の数値解析結果⁵⁾を俯瞰したとき、人口パターンが一様分散状態からの解の分岐において、その分岐経路が不安定な場合が殆どという事実を確認することができる。そこで、本論文では群論的分岐理論に基づいた一様分散状態からの分岐解における、その分岐点近傍の安定性の解析を、群論的分岐理論により調べる。その結果、正六角形パターン及びストライプパターンが発現する分岐解は全て不安定であることを解明することができた。

1. はじめに

経済活動がどこに、なぜ起こるのかを研究する経済地理学は19世紀から興り、今日まで様々な研究が蓄積されている。人口集積のメカニズムを説明する理論として、Christaller¹⁾、Lösch²⁾による中心地理論というものがある。この理論によると³⁾、中心地が階層構造をなすこと、すなわち大小の多数の中心地が存在して、同レベルのいくつかの中心地がさらに高次の機能をもつ中心地の支配下にあるとともに、一定密度の中心地に対してかかる輸送費用を最小にするために、市場圏が正六角形になる。ただし、この理論にはミクロ経済学的根拠をもたないという欠点が存在する。

一方、生産要素の地域間移動、及び、それに伴う経済活動の空間的な集積・分散現象を一般均衡理論に基づいて取り扱った代表的研究として、Krugman⁴⁾のCore-Periphery(CP)モデルが挙げられる。このモデルは都市間の輸送費用の減少に伴う人口集積のメカニズムを説明することができる。

以上の二つの理論を結びつけ、ミクロ経済学的に根拠を持つ正六角形状の人口集積を示したのが、群論的分岐理論に基づいた人口集積理論⁵⁾である。この理論

では、等方性を持つ無限遠の2次元空間を仮定し、その空間を正三角形格子で分割することで、CPモデルによる数値解析を可能としている。ここで、CPモデルで得られた均衡解は群論的対称性を満たす解であり、その解の一部は中心地理論に一致する、正六角形の人口集積パターンを示している。また、近年、上述の正三角形格子上の空間を仮定した、群論的分岐理論に基づく二重フーリエ級数によるスペクトル解析手法⁶⁾が提案されており、実際南ドイツにおいて正六角形パターンが検出されており、中心地理論の正六角形パターンに科学的な裏付けが与えられている。

以上の経緯により、人口集積に関する研究において、群論的分岐理論に基づいたアプローチは妥当であると考えられる。現状、分岐点近傍における分岐解の安定性の一般論は構築されていない。

ただし、従来の数値解析結果を俯瞰したとき、人口パターンが一様分散状態からの解の分岐において、その分岐経路が不安定な場合が殆どである。図-1-3にCPモデルを用いた、 $n \times n$ 正三角形格子上的での人口集積の数値解析結果⁵⁾の一例を示す。

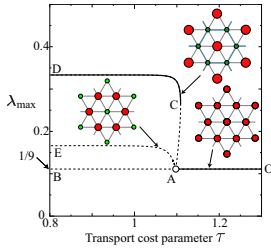


図-1 CP モデルを用いた, 3×3 正三角形格子における人口配分の均衡曲線. λ_{\max} : 格子に分布する人口の最大値 (割合); 各円の大きさ: 各格子に分布する人口の割合の大きさ; 実線: 安定解; 破線: 不安定解

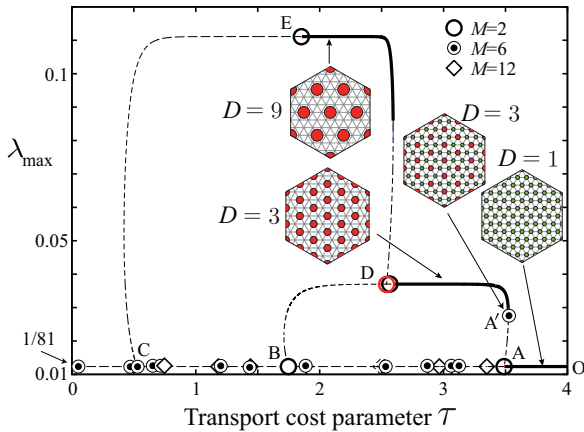


図-2 CP モデルを用いた, 9×9 正三角形格子における人口配分の均衡曲線. λ_{\max} : 格子に分布する人口の最大値 (割合); M : 分岐点の多重度; 各円の大きさ: 各格子に分布する人口の割合の大きさ; 実線: 安定解; 破線: 不安定解

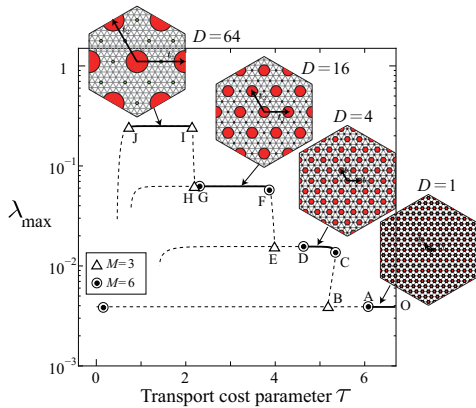


図-3 CP モデルを用いた, 16×16 正三角形格子における人口配分の均衡曲線. λ_{\max} : 格子に分布する人口の最大値 (割合); M : 分岐点の多重度; 各円の大きさ: 各格子に分布する人口の割合の大きさ; 実線: 安定解; 破線: 不安定解

以上の数値解析結果では, 一様分散状態からの分岐解は

全て不安定となっている. このことをふまえると, CP モデル以外のモデルであっても, 分岐点があれば, その分岐解の多くが不安定ではないかということに関して関心が寄せられる. そこで, 本論文では群論的分岐理論に基づいた一様分散状態からの分岐解 (正六角形パターンとそのパターンの構成要素であるストライプパターンが発現する分岐解) における, その分岐点近傍の安定性を, 群論的分岐理論により調べる. 本論文の構成は以下のとおりである.

- 第二章: 群論的分岐解析
- 第三章: 正三角形格子の基本的な設定
- 第四章: 正三角形格子で発現する正六角形パターンとストライプパターン
- 第五章: 安定性解析の具体例
- 第六章: 分岐点の多重度に応じた分岐解の安定性
- 第七章: 結論

2. 群論的分岐解析

本章では, 群論的分岐理論を用いた安定性解析を行うための理論⁵⁾ について述べる.

(1) 支配方程式における群論的同変性

まず初めに, 群の対称性をもつと仮定したときの支配方程式

$$F(u, f) = 0 \quad (1)$$

について述べる. ここに, f は分岐パラメータであり, $u \in \mathbb{R}^N$ は内生独立変数である. また, 関数 $F: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ は十分滑らかであると仮定する.

群論的分岐理論における重要な設定として, 支配方程式の対称性を示す同変性を以下に示す.

$$T(g)F(u, f) = F(T(g)u, f), \quad g \in G \quad (2)$$

ここに, G は系の対称性を表現する群であり, $T(g)$ は, 内生変数 u に対する, N 次元空間上におけるユニタリ行列であるとともに, 群 G による表現行列である.

また, 系の特異点 (u_c, f_c) に対して, 群 G による対称性を想定する. すなわち,

$$T(g)u_c = u_c, \quad g \in G \quad (3)$$

が成り立つものとする.

(2) Liapunov-Schmidt Reduction

ここでは, 安定性解析をするうえで重要となる, Liapunov-Schmidt Reduction によって誘導される分岐方程式を整理する. 重要な点は, 支配方程式 $F = 0$ で成立する群の対称性が, 分岐方程式 $\tilde{F} = 0$ に遺伝する点である.

支配方程式

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, f) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$$

の分岐点 (\mathbf{u}_c, f_c) 近傍を考える. なお, この分岐点は多重度 M であり, 解の対称性 (3) を満たすものとする. Liapunov-Schmidt Reduction により, この支配方程式は M 本の方程式,

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{w}, \tilde{f}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^M \quad (4)$$

に簡約することができる. ここに, $\tilde{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M$, $\tilde{f} = f - f_c$ である. 式 (4) のような, 支配方程式から M 本に簡約された方程式を分岐方程式という. この方程式は, 分岐点 (\mathbf{u}_c, f_c) 近傍で方程式の形を大幅に簡約できるので, 分岐方程式の漸近挙動を調べることができる. さらに, 分岐解の安定性は支配方程式の安定性に遺伝する⁷⁾ ので, 分岐方程式のヤコビ行列 $J(\mathbf{w}) = \partial \tilde{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{w}$ の固有値の正負を調べることで, 分岐解の安定性を調べることができる. そこで, 本研究では分岐方程式の解に着目して分岐解の安定性を調べる

支配方程式の同変性 (2) は, 分岐方程式に遺伝し, 以下のようになる.

$$\tilde{T}(g)\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{w}, \tilde{f}) = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{T}(g)\mathbf{w}, \tilde{f}), \quad g \in G \quad (5)$$

ここで $\tilde{T}(g)$ は, $J_c \equiv J(\mathbf{u}_c, f_c)$ の $\ker(J_c)$ 上で成り立つ, $T(g)$ の部分表現行列である. 本論文では, $\tilde{T}(g)$ を既約表現 μ に対応した表現行列としている. 同変性 (5) を利用することで, 分岐方程式 $\tilde{\mathbf{F}}$ の一般形を導出することができる.

(3) 群論的分岐解析の手順

安定性解析の具体的な手順を述べる.

1. 分岐点の多重度に対応した既約表現 μ を決定する.
2. 既約表現 μ に対応した表現行列 $T^\mu(g)$ を決定する.
3. 式 (5) を利用して分岐方程式 $\tilde{\mathbf{F}}$ の一般形を求める.
4. 解 \mathbf{w} が式 (4) を満たすことを確認する.
5. 求めた \mathbf{w} を用いて, 分岐方程式 $\tilde{\mathbf{F}}$ のヤコビ行列 $J(\mathbf{w}) = \partial \tilde{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{w}$ の具体形を導出する. その行列の固有値を計算し, 安定性を判定する. 経済モデルのダイナミクスでは, 一つでも正の固有値があれば分岐解 \mathbf{w} は不安定である. 本論文ではこの安定基準を採用する.

3. 正三角形格子の基本的な設定

本章では, 正三角形格子に関する設定について簡単に述べる.

(1) 無限格子, 部分格子の規定

まず, 無限空間上の正三角形格子に基づく長さ d の規定ベクトルは以下のように規定される.

$$\mathcal{H} = \{n_1 \ell_1 + n_2 \ell_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \quad (6)$$

ここに,

$$\ell_1 = d \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ell_2 = d \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

である. 続けて, 得られた正六角形パターンを表記するための部分格子が以下のように規定される.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\alpha, \beta) &= \{n_1(\alpha \ell_1 + \beta \ell_2) + n_2(-\beta \ell_1 + (\alpha - \beta) \ell_2) \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{[\ell_1 \ \ell_2] \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha - \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \end{aligned} \quad (8)$$

部分格子を規定するにあたって, (α, β) の定義域は以下のように規定される.

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \mid \alpha > \beta \geq 0\} \quad (9)$$

次に, 周期境界条件を設けた $n \times n$ 有限正三角形格子は以下のように規定される.

$$\mathcal{H}_n = \{n_1 \ell_1 + n_2 \ell_2 \mid n_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq n_i \leq n-1 \ (i=1, 2)\} \quad (10)$$

(2) 正三角形格子上の群, 部分群の規定

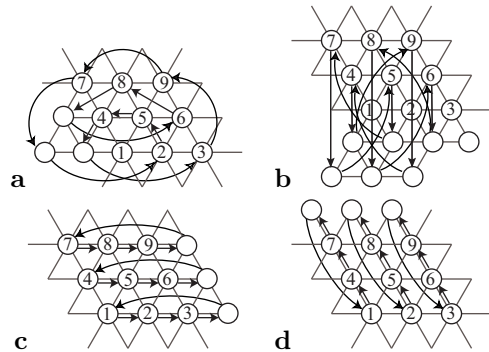


図-4 3×3の正三角形格子上における各群による変換 (a) r , (b) s , (c) p_1 , (d) p_2

人口が一様分布状態であるときの $n \times n$ 正三角形格子における群 G は以下のように規定される.

$$G = \langle r, s, p_1, p_2 \rangle = D_6 \times (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) \quad (11)$$

群 (11) の元の関係は以下のように規定される.

$$\begin{aligned} p_2 p_1 &= p_1 p_2, & r^6 &= s^2 = (rs)^2 = p_1^n = p_2^n = e \\ r p_1 &= p_1 p_2 r, & r p_2 &= p_1^{-1} r, \quad s p_1 = p_1 s, \quad s p_2 = p_1^{-1} p_2^{-1} s \end{aligned} \quad (12)$$

ここに, e は単位元である. 続けて, 正三角形格子上で発現する正六角形パターンは, その頂点の座標が x 軸からの傾斜を持つ場合がある. 傾斜が無い場合を Type V, 傾斜が $\pi/6$ である場合を Type M, その他の傾斜を持

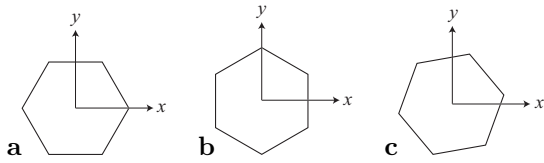


図-5 原点を中心とした 3 種類の正六角形パターン (a) Type V, (b) Type M, (c) Type T

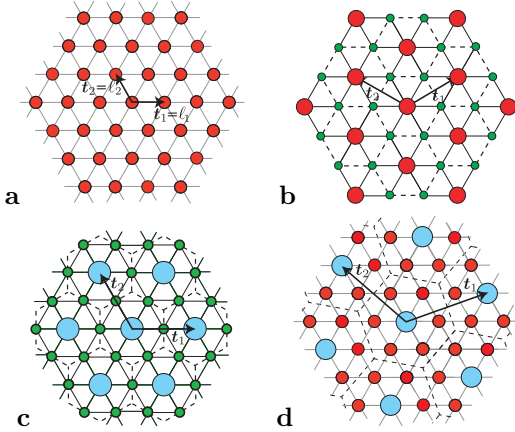


図-6 正三角形格子における Christaller の六角形パターン (a) $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, Type V (b) $(\alpha, \beta) = (2, 1)$, Type M (Christaller の $k = 3$ システム) (c) $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, Type V (Christaller の $k = 4$ システム) (d) $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, Type T (Christaller の $k = 7$ システム)

つ場合を Type T と定義されている⁵⁾。図-5,6 に具体的なイメージを示す。

(3) 既約表現

前章において、分岐方程式の漸近形を決定するにあたって、既約表現 μ とそれに対応した表現行列を決定する必要があると述べた。そこで、各分岐点に対応した $D_6 \times (\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n)$ の μ を表-1 に示す。

表-1 $D_6 \times (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ に対応した既約表現

$n \setminus M$	2	3	6	12
$6m$	(2; +)	(3; +, +)	(6; k, 0; +), (6; k, k; +)	(12; k, ℓ)
$6m \pm 1$			(6; k, 0; +), (6; k, k; +)	(12; k, ℓ)
$6m \pm 2$		(3; +, +)	(6; k, 0; +), (6; k, k; +)	(12; k, ℓ)
$6m \pm 3$	(2; +)		(6; k, 0; +), (6; k, k; +)	(12; k, ℓ)

(6; k, 0; +) for k with $1 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$
 (6; k, k; +) for k with $1 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor, k \neq n/3$
 (12; k, ℓ) for (k, ℓ) with $1 \leq \ell \leq k-1, 2k+\ell \leq n-1$

表-1 より、各分岐点に対応する既約表現 μ をまとめる

と以下となる。

$$\mu = (2; +), (3; +, +), (6; k, 0, +), (6; k, k, +), (12; k, \ell) \quad (13)$$

(4) 既約表現に対応した表現行列

同変性 (5) に用いるための、既約表現 μ に対応した表現行列 $T^\mu(g)$ を以下に示す。

$$T^{(2;+)}(r) = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, \quad T^{(2;+)}(s) = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$T^{(2;+)}(p_1) = T^{(2;+)}(p_2) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$T^{(3;+,+)}(r) = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad T^{(3;+,+)}(s) = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$T^{(3;+,+)}(p_1) = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{(3;+,+)}(p_2) = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$T^{(6;k,0,+)}(r) = \begin{bmatrix} & S \\ S & \end{bmatrix}, \quad T^{(6;k,0,+)}(s) = \begin{bmatrix} & S \\ S & S \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$T^{(6;k,0,+)}(p_1) = \begin{bmatrix} R^k & \\ & I \\ & & R^{-k} \end{bmatrix}, \quad T^{(6;k,0,+)}(p_2) = \begin{bmatrix} I & \\ & R^{-k} \\ & & R^k \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$T^{(6;k,k,+)}(r) = \begin{bmatrix} & S \\ S & \end{bmatrix}, \quad T^{(6;k,k,+)}(s) = \begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$T^{(6;k,k,+)}(p_1) = \begin{bmatrix} R^k & \\ & R^k \\ & & R^{-2k} \end{bmatrix}, \quad T^{(6;k,k,+)}(p_2) = \begin{bmatrix} R^k & \\ & R^{-2k} \\ & & R^k \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$T^{(12;k,\ell)}(r) = \begin{bmatrix} & S \\ S & \\ & & S \\ & & & S \end{bmatrix}, \quad T^{(12;k,\ell)}(s) = \begin{bmatrix} & I \\ I & \\ & & I \\ & & & I \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$T^{(12;k,\ell)}(p_1) = \begin{bmatrix} R^k & & & \\ & R^\ell & & \\ & & R^{-k-\ell} & \\ & & & R^k \end{bmatrix}, \quad T^{(12;k,\ell)}(p_2) = \begin{bmatrix} R^\ell & & & \\ & R^{-k-\ell} & & \\ & & R^k & \\ & & & R^{-k-\ell} \\ & & & & R^k \\ & & & & & R^\ell \end{bmatrix} \quad (23)$$

ここで、

$$R = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

である。

4. 正三角形格子で発現する正六角形パターンとストライプパターン

本章では、正三角形格子上で発現する正六角形パターン及びストライプパターンの具体的な解を示す。

(1) 既約表現に対応する座標変換行列とそれに対応した分岐解

ある群に対する同変性を持つ系においては、その群に対応した座標変換行列 Q を導出することができる。この行列 Q は τ に依存せず、ヤコビ行列 $J_c(\mathbf{u}_c, \tau_c)$ をブロック対角化する行列であり、

$$Q = [\dots, Q^\mu, \dots], \quad \mu \in R(G) \quad (24)$$

のように、群 G の既約表現 μ に対応するブロック対角行列に分解される。ここで、 $R(G)$ は既約表現 μ の集合全体を表す。

分岐点の多重度 M が 2 以上となる場合、分岐点近傍における一様分散状態からの分岐解の候補はゼロ固有値に対応する固有ベクトルの線形結合である。ここで、分岐方程式の解について言及する。同変性 (5) を満足する分岐方程式の解 \mathbf{w} を定義する方法は様々であるが、本論文では、既約表現 μ に対する特異点では $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_M)$ のそれぞれの要素が、 $Q^\mu = [\mathbf{q}_1^\mu, \dots, \mathbf{q}_M^\mu]$ のそれぞれの基底ベクトルの、分岐解としての発現に対応することとする。そこで、まず多重度 M に対応したブロック行列 Q^μ を以下に示す。

$$Q^{(2;+)} = \begin{cases} [(\cos(2\pi(n_1 - 2n_2)/3)), \langle \sin(2\pi(n_1 - 2n_2)/3) \rangle] & n \in 3\mathbb{Z} \\ \text{missing} & n \notin 3\mathbb{Z} \end{cases} \quad (25)$$

$$Q^{(3;+,+)} = \begin{cases} [(\cos(\pi n_1)), \langle \cos(\pi n_2) \rangle, \langle \cos(\pi(n_1 - n_2)) \rangle] & n \in 2\mathbb{Z} \\ \text{missing} & n \notin 2\mathbb{Z} \end{cases} \quad (26)$$

$$Q^{(6;k,0,+)} = [(\cos(2\pi k n_1/n)), \langle \sin(2\pi k n_1/n) \rangle, \langle \cos(2\pi k(-n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi k(-n_2)/n) \rangle, \langle \cos(2\pi k(-n_1 + n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi k(-n_1 + n_2)/n) \rangle] \quad 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \quad (27)$$

$$Q^{(6;k,k,+)} = [(\cos(2\pi k(n_1 + n_2)/n)), \langle \sin(2\pi k(n_1 + n_2)/n) \rangle, \langle \cos(2\pi k(n_1 - 2n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi k(n_1 - 2n_2)/n) \rangle, \langle \cos(2\pi k(-2n_1 + n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi k(-2n_1 + n_2)/n) \rangle] \quad 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, k \neq \frac{n}{3} \quad (28)$$

$$Q^{(12;k,\ell)} = [(\cos(2\pi(kn_1 + \ell n_2)/n)), \langle \sin(2\pi(kn_1 + \ell n_2)/n) \rangle, \langle \cos(2\pi(\ell n_1 - (k + \ell)n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi(\ell n_1 - (k + \ell)n_2)/n) \rangle, \langle \cos(2\pi(-(k + \ell)n_1 + kn_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi(-(k + \ell)n_1 + kn_2)/n) \rangle, \langle \cos(2\pi(kn_1 - (k + \ell)n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi(kn_1 - (k + \ell)n_2)/n) \rangle, \langle \cos(2\pi(\ell n_1 + kn_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi(\ell n_1 + kn_2)/n) \rangle, \langle \cos(2\pi(-(k + \ell)n_1 + \ell n_2)/n) \rangle, \langle \sin(2\pi(-(k + \ell)n_1 + \ell n_2)/n) \rangle] \quad 1 \leq \ell \leq k-1, 2k + \ell \leq n-1 \quad (29)$$

ここで、式 (25)–(29) における μ 中の数字は分岐点の多重度を示している。また、式中の $\langle \cdot \rangle$ は、各固有ベクトルにおける、座標 (n_1, n_2) での成分である。

従来の研究により、正三角形格子においては、一様分布状態から発現する分岐パターンとして、正六角形パターンを示す理論分布 $\mathbf{q}_{\text{hexa}}^\mu$ は以下のように導出、分類されている。

$$\mathbf{q}_{\text{hexa}}^\mu = \begin{cases} \mathbf{q}_1^\mu & \text{for } M = 2 \\ \mathbf{q}_1^\mu + \mathbf{q}_2^\mu + \mathbf{q}_3^\mu & \text{for } M = 3 \\ \mathbf{q}_1^\mu + \mathbf{q}_3^\mu + \mathbf{q}_5^\mu & \text{for } M = 6 \\ \mathbf{q}_1^\mu + \mathbf{q}_3^\mu + \mathbf{q}_5^\mu & \text{for } M = 12 \\ \mathbf{q}_7^\mu + \mathbf{q}_9^\mu + \mathbf{q}_{11}^\mu & \text{for } M = 12 \\ \sum_{i=1}^6 \mathbf{q}_{2i-1}^\mu & \text{for } M = 12 \end{cases} \quad (30)$$

ここで、 M は分岐点の多重度であり、 \mathbf{q}_i^μ における i は、ブロック対角行列 Q^μ の第 i 列の固有ベクトルである。続けて、ストライプパターンとは、六角形パターンを形成するための線形結合の要素となるような、 Q^μ 中の単一の固有ベクトルであると定義する。式 (30) より、 $M = 2$ の場合のみ、単一の固有ベクトルで正六角形パターンが発現するため、ストライプパターンの解はないものとする。したがって、ストライプパターンの解を以下のように定義する。(式 (30),(31) が解として存在することについては付録を参照されたい)

$$\mathbf{q}_{\text{stripe}}^\mu = \begin{cases} \mathbf{q}_1^\mu, \mathbf{q}_2^\mu, \mathbf{q}_3^\mu & \text{for } M = 3 \\ \mathbf{q}_1^\mu, \mathbf{q}_3^\mu, \mathbf{q}_5^\mu & \text{for } M = 6 \\ \mathbf{q}_{2i-1}^\mu & \text{for } M = 12, i = 1, \dots, 6 \end{cases} \quad (31)$$

5. 安定性解析の具体例

本章では安定性解析の具体例を示すために、最も単純に解析できる 3 重分岐点近傍の安定性解析を示す。(2,6,12 重分岐点の安定性解析は付録を参照されたい。)

(1) 3 重分岐点におけるヤコビ行列までの導出

まず初めに、既約表現 $\mu = (3; +, +)$ の表現行列 $T^{(3;+,+)}(g)$ (式 (16),(17)) による $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ の変換を以下に示す。

$$\begin{aligned} r &: (w_1, w_2, w_3) \mapsto (w_3, w_1, w_2) \\ s &: (w_1, w_2, w_3) \mapsto (w_3, w_2, w_1) \\ p_1 &: (w_1, w_2, w_3) \mapsto (-w_1, w_2, -w_3) \\ p_2 &: (w_1, w_2, w_3) \mapsto (w_1, -w_2, -w_3) \end{aligned}$$

分岐方程式の次元は 3 であり、

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) \\ \tilde{F}_2(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) \\ \tilde{F}_3(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (32)$$

と表現される。

続けて、分岐方程式の同変性を利用する。式 (4) に式 (32),(16)(または (17)) を代入すると、各変換による同変性は以下となる。

$$r : \tilde{F}_3(w_1, w_2, w_3) = \tilde{F}_1(w_3, w_1, w_2) \quad (33)$$

$$\tilde{F}_1(w_1, w_2, w_3) = \tilde{F}_2(w_3, w_1, w_2) \quad (34)$$

$$\tilde{F}_2(w_1, w_2, w_3) = \tilde{F}_3(w_3, w_1, w_2) \quad (35)$$

$$s : \tilde{F}_3(w_1, w_2, w_3) = \tilde{F}_1(w_3, w_2, w_1) \quad (36)$$

$$\tilde{F}_2(w_1, w_2, w_3) = \tilde{F}_2(w_3, w_2, w_1) \quad (37)$$

$$\tilde{F}_1(w_1, w_2, w_3) = \tilde{F}_3(w_3, w_2, w_1) \quad (38)$$

$$p_1 : -\tilde{F}_1(w_1, w_2, w_3) = \tilde{F}_1(-w_1, w_2, -w_3) \quad (39)$$

$$\tilde{F}_2(w_1, w_2, w_3) = \tilde{F}_2(-w_1, w_2, -w_3) \quad (40)$$

$$-\tilde{F}_3(w_1, w_2, w_3) = \tilde{F}_3(-w_1, w_2, -w_3) \quad (41)$$

$$p_2 : \tilde{F}_1(w_1, w_2, w_3) = \tilde{F}_1(w_1, -w_2, -w_3) \quad (42)$$

$$-\tilde{F}_2(w_1, w_2, w_3) = \tilde{F}_2(w_1, -w_2, -w_3) \quad (43)$$

$$-\tilde{F}_3(w_1, w_2, w_3) = \tilde{F}_3(w_1, -w_2, -w_3) \quad (44)$$

分岐方程式の要素 $\tilde{F}_2(w_1, w_2, w_3, \tilde{\tau})$ の一般形を級数展開で表現すると以下となる。

$$\tilde{F}_2(w_1, w_2, w_3, \tilde{\tau}) = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} A_{abc}(\tilde{\tau}) w_1^a w_2^b w_3^c \quad (45)$$

ただし、3 重分岐点である条件より、

$$A_{000}(0) = A_{100}(0) = A_{010}(0) = A_{001}(0) = 0 \quad (46)$$

である。式 (45) に同変性 (33)–(44) を適用することで、分岐方程式 $\tilde{\mathbf{F}} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3)$ の一般形を以下のように変形できる。

$$\tilde{F}_i(w_1, w_2, w_3, \tilde{\tau}) = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(w_1, w_2, w_3, \tilde{\tau}) = & w_1 \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} [A_{2a,2b+1,2c}(\tilde{\tau}) w_3^{2a} w_1^{2b} w_2^{2c}] \\ & + w_3 w_2 \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} [A_{2a+1,2b,2c+1}(\tilde{\tau}) w_3^{2a} w_1^{2b} w_2^{2c}] \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2(w_1, w_2, w_3, \tilde{\tau}) = & w_2 \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} [A_{2a,2b+1,2c}(\tilde{\tau}) w_1^{2a} w_2^{2b} w_3^{2c}] \\ & + w_1 w_3 \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} [A_{2a+1,2b,2c+1}(\tilde{\tau}) w_1^{2a} w_2^{2b} w_3^{2c}] \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_3(w_1, w_2, w_3, \tilde{\tau}) = & w_3 \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} [A_{2a,2b+1,2c}(\tilde{\tau}) w_2^{2a} w_3^{2b} w_1^{2c}] \\ & + w_2 w_1 \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} [A_{2a+1,2b,2c+1}(\tilde{\tau}) w_2^{2a} w_3^{2b} w_1^{2c}] \end{aligned} \quad (50)$$

続けて、分岐点近傍における分岐方程式の漸近形を以下に示す。

$$\tilde{F}_1(w_1, w_2, w_3, \tilde{\tau}) = A_{010} w_1 + A_{101} w_2 w_3 + \text{h.o.t.} \quad (51)$$

$$\tilde{F}_2(w_1, w_2, w_3, \tilde{\tau}) = A_{010} w_2 + A_{101} w_1 w_3 + \text{h.o.t.} \quad (52)$$

$$\tilde{F}_3(w_1, w_2, w_3, \tilde{\tau}) = A_{010} w_3 + A_{101} w_1 w_2 + \text{h.o.t.} \quad (53)$$

ヤコビ行列 $J(w_1, w_2, w_3, \tilde{\tau})$ は以下となる。

$$\begin{aligned} J(w_1, w_2, w_3, \tilde{\tau}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial w_1} & \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial w_2} & \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial w_3} \\ \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial w_1} & \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial w_2} & \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial w_3} \\ \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial w_1} & \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial w_2} & \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial w_3} \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} A_{010} & A_{101} w_3 & A_{101} w_2 \\ A_{101} w_3 & A_{010} & A_{101} w_1 \\ A_{101} w_2 & A_{101} w_1 & A_{010} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (54)$$

(2) 3 重分岐点における分岐方程式の解の決定

3 重分岐点における分岐方程式の解の候補を以下に示す。

$$\begin{cases} \mathbf{w}^{(1)} = (w, w, w) & (\text{正六角形パターン}) \\ \mathbf{w}^{(2)} = (w, 0, 0) & (\text{ストライプパターン}) \\ \mathbf{w}^{(3)} = (0, w, 0) & (\text{ストライプパターン}) \\ \mathbf{w}^{(4)} = (0, 0, w) & (\text{ストライプパターン}) \end{cases} \quad (55)$$

ここで、 w は正の定数である。以上の解が存在することを示す。

まず、 $\mathbf{w}^{(1)}$ に着目する。式 (48)–(50) に代入すると、以下となる。

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}) &= \tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_3(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}) \\ \tilde{F}_2(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}) &= A_{010}(\tilde{\tau}) w + A_{101}(\tilde{\tau}) w^2 + \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (56)$$

式 (46) を利用して、

$$A_{010}(\tilde{\tau}) \simeq A'_{010}(0) \tilde{\tau}, \quad A_{101}(\tilde{\tau}) \simeq A_{101}(0)$$

であることに着目すると、式 (56) より、以下の分岐解 ($\tilde{\tau}_1$ とする) を得ることができる。

$$\tilde{\tau}_1 \simeq -\frac{A_{101}(0) w}{A'_{010}(0)} \quad (57)$$

以上により、分岐方程式 (48)–(50) において、 $\mathbf{w}^{(1)}$ は解として存在する。

続けて、 $\mathbf{w}^{(2)}$ に着目して、式 (48)–(50) に代入すると以下となる。

$$\tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) \simeq A'_{010}(0) \tilde{\tau} w + \sum_{b=0}^{\infty} A_{0,2b+1,0}(\tilde{\tau}) w^{2b+1} \quad (58)$$

$$\tilde{F}_2(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_3(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = 0 \quad (59)$$

式 (58) より、以下の分岐解 ($\tilde{\tau}_2$ とする) を得ることができる。

$$\tilde{\tau}_2 \simeq -\frac{A_{030}(0) w^2}{A'_{010}(0)} \quad (60)$$

以上により、分岐方程式 (48)–(50) において、 $\mathbf{w}^{(2)}$ は解として存在する。 $\mathbf{w}^{(3)}$, $\mathbf{w}^{(4)}$ についても同様の議論が成立し、分岐解は等価である。

(3) 3 重分岐点近傍における正六角形パターンの安定性

($\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}_1$) を式 (54) に代入すると、以下となる。

$$J(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}_1) \simeq A_{101}(0) w \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (61)$$

行列 (61) の固有値を計算すると次のようになる。

$$\lambda_1 \simeq A_{101}(0)w \tag{62}$$

$$\lambda_2 \simeq -2A_{101}(0)w \tag{63}$$

である。ただし、 λ_2 は重解である。 $A_{101}(0)w$ の正負にかかわらず正の固有値が必ず一個存在するので、3 重分岐点近傍では不安定である。

(4) 3 重分岐点近傍におけるストライプパターンの安定性

式 (54) に $(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}_2), (\mathbf{w}^{(3)}, \tilde{\tau}_2), (\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}_2)$ をそれぞれ代入すると、次のようになる。

$$J(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}_2) \simeq A_{101}(0)w \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{64}$$

$$J(\mathbf{w}^{(3)}, \tilde{\tau}_2) \simeq A_{101}(0)w \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{65}$$

$$J(\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}_2) \simeq A_{101}(0)w \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{66}$$

ここで、 $A_{030}(0)w^2$ は $A_{101}(0)w$ と比較して高次であるため無視した。行列 (65),(66) は行列 (64) の行と列を入れ替えたものであるため、それらの固有値は行列 (64) のそれと等価である。したがって、固有値計算は行列 (64) のみを対象として行う。行列 (64) の固有値を計算すると次のようになる。

$$\lambda_1 \simeq -A_{101}(0)w \tag{67}$$

$$\lambda_2 \simeq 0 \tag{68}$$

$$\lambda_3 \simeq A_{101}(0)w \tag{69}$$

$A_{101}(0)w$ の正負にかかわらず正の固有値が必ず一個存在するので、ストライプパターンへたどる分岐解において、3 重分岐点近傍では不安定である。

6. 分岐点の多重度に応じた分岐解の安定性

この章では、分岐方程式の解を用いて、各分岐点近傍の一般的な安定性について述べる。まず、各多重度に対応した正六角形パターンとストライプパターンが一様分散状態から発現する分岐方程式の解を表-2 に示す。(分岐方程式を用いた解の証明及び、安定性の計算は付録を参照されたい。)

表-2 における分岐方程式の解をヤコビ行列 $J(\mathbf{w})$ に代入し、正六角形パターンとストライプパターンが発現する分岐点近傍の安定性を全分岐パターンで調べると、以下の定理が示される。

定理 1 正六角形パターンとストライプパターンが発現する分岐解は全て、その分岐点近傍では不安定である。

表-2 分岐方程式の解とそのパターン

多重度 M	分岐方程式の解 \mathbf{w}	パターン	$n, k, \ell(\hat{n}, \hat{k}, \hat{\ell})$ の条件
2	(1, 0)	正六角形	$n = 3m$
3	(1, 1, 1)	正六角形	$n = 2m$
	(1, 0, 0)	ストライプ	
	(0, 1, 0) (0, 0, 1)		
6	(1, 0, 1, 0, 1, 0)	正六角形	all (\hat{n}, \hat{k})
	(1, 0, 0, 0, 0, 0)	ストライプ	
	(0, 0, 1, 0, 0, 0) (0, 0, 0, 0, 1, 0)		
12	(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)	正六角形	all $(\hat{n}, \hat{k}, \hat{\ell})$ $(\hat{k} - \hat{\ell})\text{gcd}(\hat{k}, \hat{\ell})$ is not divisible by $\text{gcd}(\hat{k}^2 + \hat{k}\hat{\ell} + \hat{\ell}^2, \hat{n})$
	(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)		
	(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)		
	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)		
	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	ストライプ	$\gamma_1 \hat{n} \neq \hat{k}^2 + \hat{k}\hat{\ell} + \hat{\ell}^2$ and $\gamma_2 \hat{n} \neq \hat{k}^2 + 2\hat{k}\hat{\ell}$ and $\gamma_3 \hat{n} \neq \hat{k}^2 - \hat{\ell}^2$ and $\gamma_4 \hat{n} \neq \hat{\ell}^2 + 2\hat{k}\hat{\ell}$
	(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)		
	(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)		
	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)		
	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)		
	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)		

$m = 1, 2, \dots$
 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \mathbb{Z}^+$
 $\hat{n} = n/\text{gcd}(k, \ell, n), \hat{k} = k/\text{gcd}(k, \ell, n), \hat{\ell} = \ell/\text{gcd}(k, \ell, n)$

7. 結論

本論文では群論的分岐理論に基づき、正三角形格子上の人口集積パターンにおいて六角形パターン及び、ストライプパターンへたどる分岐点近傍の安定性を調べた。本研究によって、一様分散状態から人口パターンが分岐するような集積モデルであれば、全ての正六角形パターンとストライプパターンへの分岐解は、その分岐点近傍では必ず不安定であることが分かった。

従来、中心地理論はミクロ経済学的根拠がないということで賛否があったが、群論的分岐理論による安定性解析というアプローチで、中心地理論に対する科学的裏付けの一端を担ったのは本研究によるオリジナルな貢献といえる。

以上が本論文の結論であるが、本研究は、あくまでも一様分布状態から人口パターンが分岐するような集積モデルに対して適用できる理論である。したがって、人口パターンが分岐しないような集積モデルに対しては全く意味を持たないものである。このことをふまえると、Krugman の CP モデルの他、多様な集積モデルを利用して正三角形格子上で数値解析を行い、人口パターンが分岐するかどうか調査するのが今後の課題の一つといえる。

付録 I 2 重分岐点近傍における安定性

ここでは、2 重分岐点近傍における正六角形パターンの安定性を調査する。

(1) 2 重分岐点におけるヤコビ行列の導出

まず, 2 重分岐点では, 分岐方程式は

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.1})$$

の形になる. 続けて, 複素数空間を用いるために, $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ を用いて,

$$z = w_1 + iw_2, \quad \bar{z} = w_1 - iw_2 \quad (\text{I.2})$$

と定義する. その場合, 既約表現 $\mu = (2; +)$ の表現行列 $T^{(2;+)}(g)$ (式 (14),(15)) による z の変換は以下となる.

$$r : z \mapsto \bar{z} \quad (\text{I.3})$$

$$s : z \mapsto z \quad (\text{I.4})$$

$$p_1, p_2 : z \mapsto \omega_3 z \quad (\text{I.5})$$

ここに, $\omega_3 = \exp(i2\pi/3)$ である. 複素数空間を用いることにより, 分岐方程式は実質 1 次元となる. 以下に分岐方程式の一般形を級数展開で示す.

$$\tilde{F}(z, \bar{z}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_1 + i\tilde{F}_2 = \sum_{a=0} \sum_{b=0} A_{ab}(\tilde{\tau}) z^a \bar{z}^b = 0 \quad (\text{I.6})$$

ただし, 2 重分岐点である条件より,

$$A_{00}(0) = A_{10}(0) = A_{01}(0) = 0 \quad (\text{I.7})$$

である. 続けて, 分岐方程式の同変性を利用する. 式 (5) に, 式 (I.6),(14)(または (15)) を代入すると, 各変換による同変性は以下となる.

$$r : \overline{\tilde{F}(z, \bar{z}, \tilde{\tau})} = \tilde{F}(\bar{z}, z, \tilde{\tau}) \quad (\text{I.8})$$

$$s : \tilde{F}(z, \bar{z}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}(z, \bar{z}, \tilde{\tau}) \quad (\text{I.9})$$

$$p_1, p_2 : \omega_3 \tilde{F}(z, \bar{z}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}(\omega_3 z, \bar{\omega}_3 \bar{z}, \tilde{\tau}) \quad (\text{I.10})$$

式 (I.8) により, A_{ab} は実数である. また, 式 (I.10) より, 分岐方程式 (I.6) において, 消失しない項であるための必要十分条件を得ることができる. その条件は以下である.

$$a - b - 1 = 3p, \quad p \in \mathbb{Z}$$

この条件式により, 分岐方程式 (I.6) の一般形は以下のように変化する.

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z, \bar{z}, \tilde{\tau}) = & \sum_{a=0}^{\infty} A_{a+1,a}(\tilde{\tau}) z^{a+1} \bar{z}^a \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{a=0}^{\infty} [A_{a+1+3p,a}(\tilde{\tau}) z^{a+1+3p} \bar{z}^a \\ & + A_{a,a-1+3p}(\tilde{\tau}) z^a \bar{z}^{a-1+3p}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

ここで, $A_{a+1,1}(\tilde{\tau})$, $A_{a+1+3p,a}(\tilde{\tau})$, $A_{a,a-1+3p}(\tilde{\tau})$ は実数であり, 一般的には非ゼロである. 分岐点近傍における解の安定性を判定するためには, 分岐方程式の漸近形がもつ固有値の符号に着目すればよいので, まず分岐方程式の漸近形を以下に示す.

$$\tilde{F}(z, \bar{z}, \tilde{\tau}) = 0 \quad (\text{I.12})$$

$$\tilde{F}(z, \bar{z}, \tilde{\tau}) = A_{10}(\tilde{\tau})z + A_{02}(\tilde{\tau})\bar{z}^2 + \text{h.o.t.} \quad (\text{I.13})$$

となる. 式 (I.13) に $z = w_1 + iw_2$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(w_1, w_2, \tilde{\tau}) = & (A_{10}(\tilde{\tau})w_1 + A_{02}(\tilde{\tau})w_1^2 - A_{02}(\tilde{\tau})w_2^2) \\ & + i(A_{10}(\tilde{\tau})w_2 - 2A_{02}(\tilde{\tau})w_1w_2) + \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

となるので, \tilde{F} のヤコビ行列 $J(w_1, w_2, \tilde{\tau})$ は以下のようになる.

$$\begin{aligned} J(w_1, w_2, \tilde{\tau}) = & \begin{pmatrix} \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}}{\partial w_1} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}}{\partial w_2} \\ \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}}{\partial w_1} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}}{\partial w_2} \end{pmatrix} \\ \simeq & \begin{pmatrix} A_{01}(\tilde{\tau}) + 2A_{02}(\tilde{\tau})w_1 & -2A_{02}(\tilde{\tau})w_2 \\ -2A_{02}(\tilde{\tau})w_2 & A_{10}(\tilde{\tau}) - 2A_{02}(\tilde{\tau})w_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

(2) 2 重分岐点における分岐方程式の解の決定

2 重分岐点における分岐方程式の解の候補は $\mathbf{w}^{(1)} = (w, 0)$ であり, w は正の定数である. $\mathbf{w}^{(1)}$ が解であることを示す. $\mathbf{w}^{(1)}$ を式 (I.14) に代入すると, 以下になる.

$$\tilde{F}(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}) = A_{10}(\tilde{\tau})w + A_{02}(\tilde{\tau})w^2 + \text{h.o.t.} \quad (\text{I.16})$$

式 (I.7) より,

$$A_{10}(\tilde{\tau}) \simeq A'_{10}(0)\tilde{\tau}, \quad A_{02}(\tilde{\tau}) \simeq A_{02}(0)$$

であることに着目すると, 式 (I.16) は以下になる.

$$\tilde{F}(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}) = A'_{10}(0)\tilde{\tau}w + A_{02}(0)(\tilde{\tau})w^2 + \text{h.o.t.} \quad (\text{I.17})$$

式 (I.17) より, 以下の分岐解 ($\tilde{\tau}_1$ とする) を得ることができる.

$$\tilde{\tau}_1 \simeq -\frac{A_{02}(0)w}{A'_{10}(0)} \quad (\text{I.18})$$

以上により, 解 $\mathbf{w}^{(1)}$ は 2 重分岐点の分岐方程式の解として存在する. また, その他の解も, この解を座標変換することにより得られる, いわゆる軌道を形成する解であることが分かっている⁵⁾.

(3) 2 重分岐点近傍における正六角形パターンの安定性

式 (I.12) を満たす正六角形パターンの解 ($\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}_1$) を式 (I.15) に代入すると以下となる.

$$J(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}_1) \simeq A_{02}(0)w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.19})$$

行列 (I.19) の固有値は, 次のようになる.

$$\lambda_1 \simeq A_{02}(0)w, \quad \lambda_2 \simeq -3A_{02}(0)w \quad (\text{I.20})$$

$A_{02}(0)w$ の正負にかかわらず正の固有値が必ず一個存在するので, 2 重分岐点から正六角形パターンが発現する分岐解は, その分岐点近傍では一般に不安定である.

付録 II 6 重分岐点近傍における安定性

ここでは 6 重分岐点近傍における正六角形パターン及び, ストライプパターンの安定性を調査する.

(1) 6 重分岐点における分岐方程式の漸近形の導出

まず, 複素数空間を用いるために, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_6)$ を用いて,

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) = (w_1 + iw_2, w_3 + iw_4, w_5 + iw_6) \quad (\text{II.1})$$

と定義する．6 重分岐点における既約表現 μ は以下のとおりである．

$$\mu = \begin{cases} (6; k, 0, +) & \text{with } 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \\ (6; k, k, +) & \text{with } 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, k \neq \frac{n}{3} \end{cases}$$

まず，既約表現 $\mu = (6; k, 0, +)$ の表現行列 $T^{(6; k, 0, +)}$ (式 (18) または (19)) による z の変換は以下となる．

$$\begin{aligned} r &: \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \bar{z}_3 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix}, & s &: \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix} \\ p_1 &: \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \omega^k z_1 \\ z_2 \\ \omega^{-k} z_3 \end{bmatrix}, & p_2 &: \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ \omega^{-k} z_2 \\ \omega^k z_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

既約表現 $\mu = (6; k, k, +)$ の表現行列 $T^{(6; k, k, +)}$ (式 (20), (21)) による z の変換は以下となる．

$$\begin{aligned} r &: \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \bar{z}_3 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix}, & s &: \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_2 \\ z_1 \\ z_3 \end{bmatrix} \\ p_1 &: \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \omega^k z_1 \\ \omega^k z_2 \\ \omega^{-2k} z_3 \end{bmatrix}, & p_2 &: \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \omega^k z_1 \\ \omega^{-2k} z_2 \\ \omega^k z_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

ここに， $\omega = \exp(i2\pi/n)$ である．複素数空間を用いることにより，分岐方程式は実質 3 次元となり，

$$\tilde{F}(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3) = [\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3]^\top = \mathbf{0} \quad (\text{II.4})$$

と表現される．

続けて，分岐方程式の同変性を利用する．式 (5) に式 (II.4), ((18) または (19), (20), (21)) を代入すると，各変換による同変性は次のとおりである．まず， $\mu = (6; k, 0, +)$ の場合， s による変換は以下となる．

$$\begin{aligned} s &: \overline{\tilde{F}_3(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau})} = \tilde{F}_1(\bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1, z_3, z_2, z_1, \bar{\tau}) \\ &\overline{\tilde{F}_2(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau})} = \tilde{F}_2(\bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1, z_3, z_2, z_1, \bar{\tau}) \\ &\overline{\tilde{F}_1(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau})} = \tilde{F}_3(\bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1, z_3, z_2, z_1, \bar{\tau}) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

一方， $\mu = (6; k, k, +)$ の場合は以下となる．

$$\begin{aligned} s &: \overline{\tilde{F}_2(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau})} = \tilde{F}_1(z_2, z_1, z_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_3, \bar{\tau}) \\ &\overline{\tilde{F}_1(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau})} = \tilde{F}_2(z_2, z_1, z_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_3, \bar{\tau}) \\ &\overline{\tilde{F}_3(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau})} = \tilde{F}_3(z_2, z_1, z_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_3, \bar{\tau}) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

続けて， $\mu = (6; k, \ell, +)$ ($\ell = 0$ or k) の場合， r, p_1, p_2 による変換は以下となる．

$$\begin{aligned} r &: \overline{\tilde{F}_3(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau})} = \tilde{F}_1(\bar{z}_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, z_3, z_1, z_2, \bar{\tau}) \\ &\overline{\tilde{F}_1(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau})} = \tilde{F}_2(\bar{z}_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, z_3, z_1, z_2, \bar{\tau}) \\ &\overline{\tilde{F}_2(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau})} = \tilde{F}_3(\bar{z}_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, z_3, z_1, z_2, \bar{\tau}) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

$$\begin{aligned} p_1 &: \omega^k \tilde{F}_1(z_1, \dots, \bar{z}_3) = \tilde{F}_1(\omega^k z_1, \omega^\ell z_2, \omega^{-k-\ell} z_3, \omega^{-k} \bar{z}_1, \omega^{-\ell} \bar{z}_2, \omega^{k+\ell} \bar{z}_3) \\ &\omega^\ell \tilde{F}_2(z_1, \dots, \bar{z}_3) = \tilde{F}_2(\omega^\ell z_1, \omega^\ell z_2, \omega^{-k-\ell} z_3, \omega^{-k} \bar{z}_1, \omega^{-\ell} \bar{z}_2, \omega^{k+\ell} \bar{z}_3) \\ &\omega^{-k-\ell} \tilde{F}_3(z_1, \dots, \bar{z}_3) = \tilde{F}_3(\omega^k z_1, \omega^\ell z_2, \omega^{-k-\ell} z_3, \omega^{-k} \bar{z}_1, \omega^{-\ell} \bar{z}_2, \omega^{k+\ell} \bar{z}_3) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

$$\begin{aligned} p_2 &: \omega^\ell \tilde{F}_1(z_1, \dots, \bar{z}_3) = \tilde{F}_1(\omega^\ell z_1, \omega^{-k-\ell} z_2, \omega^k z_3, \omega^{-\ell} \bar{z}_1, \omega^{k+\ell} \bar{z}_2, \omega^{-k} \bar{z}_3) \\ &\omega^{-k-\ell} \tilde{F}_2(z_1, \dots, \bar{z}_3) = \tilde{F}_2(\omega^\ell z_1, \omega^{-k-\ell} z_2, \omega^k z_3, \omega^{-\ell} \bar{z}_1, \omega^{k+\ell} \bar{z}_2, \omega^{-k} \bar{z}_3) \\ &\omega^k \tilde{F}_3(z_1, \dots, \bar{z}_3) = \tilde{F}_3(\omega^\ell z_1, \omega^{-k-\ell} z_2, \omega^k z_3, \omega^{-\ell} \bar{z}_1, \omega^{k+\ell} \bar{z}_2, \omega^{-k} \bar{z}_3) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

分岐方程式の要素 $\tilde{F}_i(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau})$ の一般形を級数展開で表現すると以下となる．

$$\tilde{F}_i(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau}) = \sum_{a=0} \sum_{b=0} \sum_{c=0} \sum_{d=0} \sum_{e=0} \sum_{g=0} A_{abcdef}(\bar{\tau}) z_1^a z_2^b z_3^c \bar{z}_1^d \bar{z}_2^e \bar{z}_3^g \quad (\text{II.10})$$

ただし，6 重分岐点である条件より，

$$A_{000000}(0) = A_{100000}(0) = A_{010000}(0) = A_{001000}(0) = A_{000100}(0) = A_{000010}(0) = A_{000001}(0) = 0 \quad (\text{II.11})$$

である．

式 (II.10) に同変性 (II.5)–(II.9) を適用する．まず，変換 r による同変性 (II.7) により，全ての $A_{abcdef}(\bar{\tau})$ は実数である．続けて，変換 s と r による同変性 ((II.5) または (II.6)), (II.7) により，全ての (a, b, c, d, e, g) に対して $A_{abcdef}(\bar{\tau}) = A_{acbdge}(\bar{\tau})$ が成立する．最後に， p_1, p_2 による同変性 (II.8), (II.9) により， $A_{abcdef}(\bar{\tau})$ が消失しない係数であるための必要十分条件が以下のように示される． $\mu = (6; k, 0, +)$ の場合，

$$\begin{aligned} a - d - c + g - 1 &\equiv 0 \pmod{\hat{n}}, \\ -b + e + c - g &\equiv 0 \pmod{\hat{n}} \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

である．一方， $\mu = (6; k, k, +)$ の場合，

$$\begin{aligned} a - d + b - e - 2c + 2g &\equiv 1 \pmod{\hat{n}}, \\ a - d - 2b + 2e + c - g &\equiv 1 \pmod{\hat{n}} \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

である．ここに，

$$\hat{n} = \frac{n}{\gcd(k, n)}$$

である．以上の同変性の条件により，分岐方程式の漸近形は，次のようになる．

1. $\hat{n} = 3$ の場合 (既約表現 $(6; k, 0, +)$ に対応する)

$$\tilde{F}_i(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{II.14})$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau}) &= A_{100000}(\bar{\tau}) z_1 + A_{000011}(\bar{\tau}) \bar{z}_2 \bar{z}_3 \\ &\quad + A_{000200}(\bar{\tau}) \bar{z}_1^2 + \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau}) &= A_{100000}(\bar{\tau}) z_2 + A_{000011}(\bar{\tau}) \bar{z}_1 \bar{z}_3 \\ &\quad + A_{000200}(\bar{\tau}) \bar{z}_2^2 + \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_3(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau}) &= A_{100000}(\bar{\tau}) z_3 + A_{000011}(\bar{\tau}) \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ &\quad + A_{000200}(\bar{\tau}) \bar{z}_3^2 + \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

2. $\hat{n} \neq 3$ であるような全ての $\hat{n} (\geq 4)$ の場合 (既約表現が $\mu = (6; k, 0, +)$, $(6; k, k, +)$ の双方に対応する)

$$\tilde{F}_i(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{\tau}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{II.18})$$

$$\tilde{F}_1(z_1, \dots, \bar{z}_3, \bar{\tau}) = A_{100000}(\bar{\tau}) z_1 + A_{000011}(\bar{\tau}) \bar{z}_2 \bar{z}_3 + \text{h.o.t.} \quad (\text{II.19})$$

$$\tilde{F}_2(z_1, \dots, \bar{z}_3, \bar{\tau}) = A_{100000}(\bar{\tau})z_2 + A_{000011}(\bar{\tau})\bar{z}_1\bar{z}_3 + \text{h.o.t.} \quad (\text{II.20})$$

$$\tilde{F}_3(z_1, \dots, \bar{z}_3, \bar{\tau}) = A_{100000}(\bar{\tau})z_3 + A_{000011}(\bar{\tau})\bar{z}_1\bar{z}_2 + \text{h.o.t.} \quad (\text{II.21})$$

以降, $a_1(\bar{\tau}) \equiv A_{100000}(\bar{\tau})$, $a_2(\bar{\tau}) \equiv A_{000011}(\bar{\tau})$, $a_3 \equiv A_{000200}(\bar{\tau})$ とする.

(2) $\hat{n} = 3$ である場合の安定性

式 (II.15)–(II.17) に $z_k = w_{2k-1} + iw_{2k}$ ($k = 1, 2, 3$) を代入すると次のようになる.

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(\mathbf{w}, \bar{\tau}) = & \{a_1(\bar{\tau})w_1 + a_2(\bar{\tau})(w_3w_5 - w_4w_6) + a_3(\bar{\tau})(w_1^2 - w_2^2)\} \\ & + i\{a_1(\bar{\tau})w_2 - a_2(\bar{\tau})(w_3w_6 + w_4w_5) - 2a_3(\bar{\tau})w_1w_2\} + \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2(\mathbf{w}, \bar{\tau}) = & \{a_1(\bar{\tau})w_3 + a_2(\bar{\tau})(w_1w_5 - w_2w_6) + a_3(\bar{\tau})(w_3^2 - w_4^2)\} \\ & + i\{a_1(\bar{\tau})w_4 - a_2(\bar{\tau})(w_2w_5 + w_1w_6) - 2a_3(\bar{\tau})w_3w_4\} + \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_3(\mathbf{w}, \bar{\tau}) = & \{a_1(\bar{\tau})w_5 + a_2(\bar{\tau})(w_1w_3 - w_2w_4) + a_3(\bar{\tau})(w_5^2 - w_6^2)\} \\ & + i\{a_1(\bar{\tau})w_6 - a_2(\bar{\tau})(w_2w_3 + w_1w_4) - 2a_3(\bar{\tau})w_5w_6\} + \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

求めた分岐方程式の漸近形を用いてヤコビ行列を導出する. 式 (II.22)–(II.24) より, ヤコビ行列 $J(\mathbf{w}, \bar{\tau})$ は以下となる.

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}, \bar{\tau}) = & \begin{pmatrix} \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_1}{\partial w_1} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_1}{\partial w_2} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_1}{\partial w_3} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_1}{\partial w_4} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_1}{\partial w_5} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_1}{\partial w_6} \\ \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_1}{\partial w_1} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_1}{\partial w_2} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_1}{\partial w_3} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_1}{\partial w_4} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_1}{\partial w_5} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_1}{\partial w_6} \\ \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_2}{\partial w_1} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_2}{\partial w_2} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_2}{\partial w_3} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_2}{\partial w_4} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_2}{\partial w_5} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_2}{\partial w_6} \\ \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_2}{\partial w_1} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_2}{\partial w_2} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_2}{\partial w_3} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_2}{\partial w_4} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_2}{\partial w_5} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_2}{\partial w_6} \\ \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_3}{\partial w_1} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_3}{\partial w_2} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_3}{\partial w_3} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_3}{\partial w_4} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_3}{\partial w_5} & \frac{\partial \text{Re} \tilde{F}_3}{\partial w_6} \\ \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_3}{\partial w_1} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_3}{\partial w_2} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_3}{\partial w_3} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_3}{\partial w_4} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_3}{\partial w_5} & \frac{\partial \text{Im} \tilde{F}_3}{\partial w_6} \end{pmatrix} \\ \simeq & \begin{pmatrix} a_1 + 2a_3w_1 & -2a_3w_2 & a_2w_5 & -a_2w_6 & a_2w_3 & -a_2w_4 \\ -2a_3w_2 & a_1 - 2a_3w_1 & -a_2w_6 & -a_2w_5 & -a_2w_4 & -a_2w_3 \\ a_2w_5 & -a_2w_6 & a_1 + 2a_3w_3 & -2a_3w_4 & a_2w_1 & -a_2w_2 \\ -a_2w_6 & -a_2w_5 & -2a_3w_4 & a_1 - 2a_3w_3 & -a_2w_2 & -a_2w_1 \\ a_2w_3 & -a_2w_4 & a_2w_1 & -a_2w_2 & a_1 + 2a_3w_5 & -2a_3w_6 \\ -a_2w_4 & -a_2w_3 & -a_2w_2 & -a_2w_1 & -2a_3w_6 & a_1 - 2a_3w_5 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

6 重分岐点における分岐方程式の解の候補を以下に示す.

$$\begin{cases} \mathbf{w}^{(1)} = (w, 0, w, 0, w, 0) & (\text{正六角形パターン}) \\ \mathbf{w}^{(2)} = (w, 0, 0, 0, 0, 0) & (\text{ストライプパターン}) \\ \mathbf{w}^{(3)} = (0, 0, w, 0, 0, 0) & (\text{ストライプパターン}) \\ \mathbf{w}^{(4)} = (0, 0, 0, 0, w, 0) & (\text{ストライプパターン}) \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

分岐方程式 (II.22)–(II.24) において, (II.26) が解であることを確かめる.

初めに $\mathbf{w}^{(1)}$ を式 (II.22)–(II.24) に代入すると以下となる.

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(1)}, \bar{\tau}) = & \tilde{F}_2(\mathbf{w}^{(1)}, \bar{\tau}) = \tilde{F}_3(\mathbf{w}^{(1)}, \bar{\tau}) \\ \tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(1)}, \bar{\tau}) = & a_1(\bar{\tau})w + (a_2(\bar{\tau}) + a_3(\bar{\tau}))w^2 + \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

式 (II.11) より,

$$a_1(\bar{\tau}) \simeq a_1'(0)\bar{\tau}, \quad a_2(\bar{\tau}) \simeq a_2(0), \quad a_3(\bar{\tau}) \simeq a_3(0)$$

であることに着目すると, 式 (II.27) から以下の分岐解 ($\bar{\tau}_1$ とする) を得ることができる.

$$\bar{\tau}_1 \simeq -\frac{(a_2(0) + a_3(0))w}{a_1'(0)} \quad (\text{II.28})$$

以上により, 分岐方程式 (II.22)–(II.24) において $\mathbf{w}^{(1)}$ は解として存在する.

続けて, $\mathbf{w}^{(2)}$ に着目して, 式 (II.22) に代入すると以下となる.

$$\tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(2)}, \bar{\tau}) = a_1'(0)\bar{\tau}w + a_3(0)w^2 + \text{h.o.t} \quad (\text{II.29})$$

一方, \tilde{F}_1 が z_2 と \bar{z}_2 または, z_3 と \bar{z}_3 のみからなる級数項を持たないことにより, 同様にして

$$\tilde{F}_2(\mathbf{w}^{(2)}, \bar{\tau}) = \tilde{F}_3(\mathbf{w}^{(2)}, \bar{\tau}) = 0 \quad (\text{II.30})$$

であることが分かる. (詳細は付録 III を参照されたい.) 式 (II.29) より, 以下の分岐解 ($\bar{\tau}_2$ とする) を得ることができる.

$$\bar{\tau}_2 \simeq -\frac{a_3(0)w}{a_1'(0)} \quad (\text{II.31})$$

以上により, 分岐方程式 (II.22)–(II.24) において $\mathbf{w}^{(2)}$ は解として存在する. $\mathbf{w}^{(3)}$, $\mathbf{w}^{(4)}$ についても同様に議論が成立し, 分岐解は等価である.

a) 6 重分岐点近傍における正六角形パターンの安定性

$\hat{n} = 3$ である場合の六角形パターンの安定性を調査する. 正六角形パターンの解 ($\mathbf{w}^{(1)}, \bar{\tau}_1$) を式 (II.25) に代入し,

$$a_1(\bar{\tau}_1) \simeq a_1'(0)\bar{\tau}_1 \simeq -(a_2(0) + a_3(0))w$$

であることを用いると以下となる.

$$\begin{aligned} x \equiv & a_3(0)/a_2(0) \\ J(\mathbf{w}^{(1)}, \bar{\tau}_1) \simeq & a_2(0)w \begin{pmatrix} -1+x & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1-3x & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1+x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1-3x & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1+x & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1-3x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

行列 (II.32) の固有値を計算すると, 次のようになる.

$$\lambda_1 \simeq -3(a_2(0) + a_3(0))w \quad (\text{II.33})$$

$$\lambda_2 \simeq -(2a_2(0) - a_3(0))w \quad (2 \text{ 重解}) \quad (\text{II.34})$$

$$\lambda_3 \simeq -3a_3(0)w \quad (2 \text{ 重解}) \quad (\text{II.35})$$

$$\lambda_4 \simeq (a_2(0) + a_3(0))w \quad (\text{II.36})$$

式 (II.33), (II.36) より, $(a_2(0) + a_3(0))w$ の正負にかかわらず λ_1 または λ_4 が必ず正となるので, $\hat{n} = 3$ の場合, 6 重分岐点から正六角形パターンが発現する分岐経路において, その分岐点近傍では不安定である.

b) 6 重分岐点近傍におけるストライプパターンの安定性

$\hat{n} = 3$ である場合のストライプパターンの安定性を調査する. ($\mathbf{w}^{(2)}, \bar{\tau}_2$), ($\mathbf{w}^{(3)}, \bar{\tau}_2$), ($\mathbf{w}^{(4)}, \bar{\tau}_2$) をそれぞれ式 (II.25) に代入し,

$$a_1(\bar{\tau}_2) \simeq a_1'(0)\bar{\tau}_2 \simeq -a_3(0)w$$

であることを用いると次のようになる.

$$y \equiv a_2(0)/a_3(0)$$

$$J(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}_2) \simeq a_3(0)w \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & y & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.37})$$

$$J(\mathbf{w}^{(3)}, \tilde{\tau}_2) \simeq a_3(0)w \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -y & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.38})$$

$$J(\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}_2) \simeq a_3(0)w \begin{pmatrix} -1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -y & 0 & 0 \\ y & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (\text{II.39})$$

ここで、行列 (II.38), (II.39) は行列 (II.37) の行と列を入れ替えたものであるため、それらの固有値は行列 (II.37) のそれと等価である。したがって、固有値の計算は行列 (II.37) のみを対象として行う。固有値を計算すると次のようになる。

$$\lambda_1 \simeq -3a_3(0)w \quad (\text{II.40})$$

$$\lambda_2 \simeq -(a_2(0) + a_3(0))w \quad (2 \text{ 重解}) \quad (\text{II.41})$$

$$\lambda_3 \simeq (a_2(0) - a_3(0))w \quad (2 \text{ 重解}) \quad (\text{II.42})$$

$$\lambda_4 \simeq a_3(0)w \quad (\text{II.43})$$

式 (II.40), (II.43) より、 $a_3(0)w$ の正負にかかわらず λ_1 または λ_4 が必ず正となるので、 $\hat{n} = 3$ の場合、6 重分岐点からストライプパターンが発現する分岐経路は、その分岐点近傍では不安定である。

(3) $\hat{n} \neq 3$ である場合の安定性

$\hat{n} \neq 3$ である場合の分岐方程式の具体形を求める。分岐方程式の漸近形を再び示す。

$$\tilde{F}_i(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \tilde{\tau}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{II.44})$$

$$\tilde{F}_1(z_1, \dots, \bar{z}_3, \tilde{\tau}) = A_{100000}(\tilde{\tau})z_1 + A_{000011}(\tilde{\tau})\bar{z}_2\bar{z}_3 + \text{h.o.t.} \quad (\text{II.45})$$

$$\tilde{F}_2(z_1, \dots, \bar{z}_3, \tilde{\tau}) = A_{100000}(\tilde{\tau})z_2 + A_{000011}(\tilde{\tau})\bar{z}_1\bar{z}_3 + \text{h.o.t.} \quad (\text{II.46})$$

$$\tilde{F}_3(z_1, \dots, \bar{z}_3, \tilde{\tau}) = A_{100000}(\tilde{\tau})z_3 + A_{000011}(\tilde{\tau})\bar{z}_1\bar{z}_2 + \text{h.o.t.} \quad (\text{II.47})$$

式 (II.45)–(II.47) に $z_k = w_{2k-1} + iw_{2k}$ ($k = 1, 2, 3$) を代入すると、次のようになる。

$$\tilde{F}_1(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) = \{a_1(\tilde{\tau})w_1 + a_2(\tilde{\tau})(w_3w_5 - w_4w_6)\} + i\{a_1(\tilde{\tau})w_2 - a_2(\tilde{\tau})(w_3w_6 + w_4w_5)\} + \text{h.o.t.} \quad (\text{II.48})$$

$$\tilde{F}_2(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) = \{a_1(\tilde{\tau})w_3 + a_2(\tilde{\tau})(w_1w_5 - w_2w_6)\} + i\{a_1(\tilde{\tau})w_4 - a_2(\tilde{\tau})(w_2w_5 + w_1w_6)\} + \text{h.o.t.} \quad (\text{II.49})$$

$$\tilde{F}_3(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) = \{a_1(\tilde{\tau})w_5 + a_2(\tilde{\tau})(w_1w_3 - w_2w_4)\} + i\{a_1(\tilde{\tau})w_6 - a_2(\tilde{\tau})(w_1w_4 + w_2w_3)\} + \text{h.o.t.} \quad (\text{II.50})$$

式 (II.48)–(II.50) より、ヤコビ行列 $J(\mathbf{w}, \tilde{\tau})$ は以下となる。

$$J(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_1}{\partial w_1} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_1}{\partial w_2} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_1}{\partial w_3} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_1}{\partial w_4} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_1}{\partial w_5} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_1}{\partial w_6} \\ \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_1}{\partial w_1} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_1}{\partial w_2} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_1}{\partial w_3} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_1}{\partial w_4} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_1}{\partial w_5} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_1}{\partial w_6} \\ \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_2}{\partial w_1} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_2}{\partial w_2} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_2}{\partial w_3} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_2}{\partial w_4} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_2}{\partial w_5} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_2}{\partial w_6} \\ \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_2}{\partial w_1} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_2}{\partial w_2} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_2}{\partial w_3} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_2}{\partial w_4} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_2}{\partial w_5} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_2}{\partial w_6} \\ \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_3}{\partial w_1} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_3}{\partial w_2} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_3}{\partial w_3} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_3}{\partial w_4} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_3}{\partial w_5} & \frac{\partial \text{Re}\tilde{F}_3}{\partial w_6} \\ \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_3}{\partial w_1} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_3}{\partial w_2} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_3}{\partial w_3} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_3}{\partial w_4} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_3}{\partial w_5} & \frac{\partial \text{Im}\tilde{F}_3}{\partial w_6} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2w_5 & -a_2w_6 & a_2w_3 & -a_2w_4 \\ 0 & a_1 & -a_2w_6 & -a_2w_5 & -a_2w_4 & -a_2w_3 \\ a_2w_5 & -a_2w_6 & a_1 & 0 & a_2w_1 & -a_2w_2 \\ -a_2w_6 & -a_2w_5 & 0 & a_1 & -a_2w_2 & -a_2w_1 \\ a_2w_3 & -a_2w_4 & a_2w_1 & -a_2w_2 & a_1 & 0 \\ -a_2w_4 & -a_2w_3 & -a_2w_2 & -a_2w_1 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.51})$$

6 重分岐点における分岐方程式の解の候補を再び示す。

$$\begin{cases} \mathbf{w}^{(1)} = (w, 0, w, 0, w, 0) & (\text{正六角形パターン}) \\ \mathbf{w}^{(2)} = (w, 0, 0, 0, 0, 0) & (\text{ストライプパターン}) \\ \mathbf{w}^{(3)} = (0, 0, w, 0, 0, 0) & (\text{ストライプパターン}) \\ \mathbf{w}^{(4)} = (0, 0, 0, w, 0, 0) & (\text{ストライプパターン}) \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

分岐方程式 (II.48)–(II.50) において、式 (II.52) が解であることを確かめる。初めに $\mathbf{w}^{(1)}$ を式 (II.48)–(II.50) に代入すると以下となる。

$$\tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_2(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_3(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau})$$

$$\tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}) = a'_1(0)\tilde{\tau}w + a_2(0)w^2 + \text{h.o.t.} \quad (\text{II.53})$$

式 (II.53) より、以下の分岐解 ($\tilde{\tau}_3$ とする) を得ることができる。

$$\tilde{\tau}_3 = -\frac{a_2(0)w}{a'_1(0)} + \text{h.o.t.} \quad (\text{II.54})$$

以上により、分岐方程式 (II.48)–(II.50) において $\mathbf{w}^{(1)}$ は解として存在する。

続けて、 $\mathbf{w}^{(2)}$ に着目して、式 (II.48)–(II.50) に代入すると以下となる。(詳細は付録 III を参照されたい。)

$$\tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = a'_1(0)\tilde{\tau}w + a_4(0)w^3 + \text{h.o.t.} \quad (\text{II.55})$$

$$\tilde{F}_2(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_3(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = 0 \quad (\text{II.56})$$

ここで、

$$a_4(0) \simeq \begin{cases} A_{000300}(0) + A_{200100}(0) & (\hat{n} = 4) \\ A_{200100}(0) & (\hat{n} \geq 5) \end{cases}$$

である。式 (II.55) より、以下の分岐解 ($\tilde{\tau}_4$ とする) を得ることができる。

$$\tilde{\tau}_4 \simeq -\frac{a_4(0)w^2}{a'_1(0)} \quad (\text{II.57})$$

以上により、分岐方程式 (II.48)–(II.50) において $\mathbf{w}^{(2)}$ は解として存在する。 $\mathbf{w}^{(3)}$, $\mathbf{w}^{(4)}$ についても同様に成立し、また、分岐解も等価である。

a) 6 重分岐点近傍における正六角形パターンの安定性

$\hat{n} \neq 3$ である場合の正六角形パターンの安定性を調査する。正六角形パターンの解 ($\mathbf{w}^{(2)}$, $\tilde{\tau}_3$) を式 (II.51) に代入し、

$$a_1(\tilde{\tau}_3) \simeq a'_1(0)\tilde{\tau}_3 \simeq -a_2(0)w$$

であることを用いると以下となる.

$$J(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}_3) \simeq a_2(0)w \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.58})$$

行列 (II.58) の固有値を計算すると, 次のようになる.

$$\lambda_1 \simeq -3a_2(0)w \quad (\text{II.59})$$

$$\lambda_2 \simeq -2a_2(0)w \quad (2 \text{ 重解}) \quad (\text{II.60})$$

$$\lambda_3 \simeq 0 \quad (2 \text{ 重解}) \quad (\text{II.61})$$

$$\lambda_4 \simeq a_2(0)w \quad (\text{II.62})$$

式 (II.59),(II.62) より, $a_2(0)w$ の正負にかかわらず正の固有値が必ず一個存在するので, $\hat{n} \neq 3$ の場合でも, 6 重分岐点から正六角形パターンが発現する分岐解において, その分岐点近傍では不安定である.

b) 6 重分岐点近傍におけるストライプパターンの安定性

$\hat{n} \neq 3$ である場合のストライプパターンの解の安定性を確かめる. $(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}_4), (\mathbf{w}^{(3)}, \tilde{\tau}_4), (\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}_4)$ を式 (II.51) に代入し,

$$a_1(\tilde{\tau}_4) \simeq a_1'(0)\tilde{\tau}_4 \simeq -a_4(0)w^2$$

であることを用いると次のようになる.

$$J(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}_4) \simeq a_2(0)w \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.63})$$

$$J(\mathbf{w}^{(3)}, \tilde{\tau}_4) \simeq a_2(0)w \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.64})$$

$$J(\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}_4) \simeq a_2(0)w \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.65})$$

ここで, 対角項の $-\frac{a_4(0)w^2}{a_2(0)}$ は $a_2(0)w$ と比較して高次であるので無視した. また, 行列 (II.64),(II.65) は行列 (II.63) の行と列を入れ替えたものであるため, それらの固有値は行列 (II.63) のそれと等価である. 固有値計算は行列 (II.63) のみを対象として行う. 固有値を計算すると次のようになる.

$$\lambda_1 \simeq -a_2(0)w \quad (\text{II.66})$$

$$\lambda_2 \simeq 0 \quad (\text{II.67})$$

$$\lambda_3 \simeq a_2(0)w \quad (\text{II.68})$$

となる. ここで, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は 2 重解である. 式 (II.66),(II.68) より, $a_2(0)w$ の正負にかかわらず正の固有値が必ず一個存在するので, $\hat{n} \neq 3$ の場合でも, 6 重分岐点からストライプパターンが発現する分岐解において, その分岐点近傍では不安定である.

付録 III 6 重分岐点におけるストライプパターンの存在について

ここでは, $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3$ について, 以下の式が成立することを示す.

$$\tilde{F}_1(w, 0, 0, w, 0, 0, \tilde{\tau}) = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} A_{a00d00}(\tilde{\tau})w^{a+d} \quad (\text{III.1})$$

$$\tilde{F}_2(w, 0, 0, w, 0, 0, \tilde{\tau}) = 0 \quad (\text{III.2})$$

$$\tilde{F}_3(w, 0, 0, w, 0, 0, \tilde{\tau}) = 0 \quad (\text{III.3})$$

初めに, 既約表現 $(6; k, 0, +)$ で方程式 (III.1)–(III.3) が成立することを示す. 既約表現 $(6; k, 0, +)$ で $A_{abcdef}(\tilde{\tau})$ が存在するための条件式を以下に再び示す.

$$\begin{aligned} a - d - c + g - 1 &\equiv 0 \pmod{\hat{n}}, \\ -b + e + c - g &\equiv 0 \pmod{\hat{n}} \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

以下の式が成立することを示す.

$$A \neq \emptyset, \quad A = \{(a, 0, 0, d, 0, 0) \in \mathbb{N}^6 \mid (\text{III.4})\} \quad (\text{III.5})$$

$$B = \emptyset, \quad B = \{(0, b, 0, 0, e, 0) \in \mathbb{N}^6 \mid (\text{III.4})\} \quad (\text{III.6})$$

$$C = \emptyset, \quad C = \{(0, 0, c, 0, 0, g) \in \mathbb{N}^6 \mid (\text{III.4})\} \quad (\text{III.7})$$

まず, $(a, b, c, d, e, g) = (0, b, 0, 0, e, 0)$ を式 (III.4) に代入すると以下となる.

$$-1 \equiv 0 \pmod{\hat{n}} \quad (\text{III.8})$$

$$-b + e \equiv 0 \pmod{\hat{n}} \quad (\text{III.9})$$

式 (III.8) は明らかに成立しないので, $B = \emptyset$ である.

続けて, $(a, b, c, d, e, g) = (0, 0, c, 0, 0, g)$ を式 (III.4) に代入すると以下となる.

$$-c + g - 1 \equiv 0 \pmod{\hat{n}} \quad (\text{III.10})$$

$$c - g \equiv 0 \pmod{\hat{n}} \quad (\text{III.11})$$

式 (III.10),(III.11) を変形すると, 以下となる.

$$c - g = -1 + \alpha\hat{n}, \quad \alpha \in \mathbb{Z} \quad (\text{III.12})$$

$$c - g = \beta\hat{n}, \quad \beta \in \mathbb{Z} \quad (\text{III.13})$$

ここで, $-1 + \alpha\hat{n} \neq \beta\hat{n}$ であるので, 式 (III.12), (III.13) は同時に成立しない. したがって, $C = \emptyset$ である.

以上により, $\tilde{F}_1(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \tilde{\tau})$ において, z_2, \bar{z}_2 及び, z_3, \bar{z}_3 のみからなる級数項は存在しない. 式 (II.7) より,

$$\tilde{F}_2(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_1(z_2, z_3, z_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_1, \tilde{\tau}) \quad (\text{III.14})$$

$$\tilde{F}_3(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_1(z_3, z_1, z_2, \bar{z}_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \tilde{\tau}) \quad (\text{III.15})$$

であるから,

$$\tilde{F}_2(w, 0, 0, w, 0, 0, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_1(0, 0, w, 0, 0, w, \tilde{\tau}) = 0 \quad (\text{III.16})$$

$$\tilde{F}_3(w, 0, 0, w, 0, 0, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_1(0, w, 0, 0, w, 0, \tilde{\tau}) = 0 \quad (\text{III.17})$$

である.

最後に, $(a, b, c, d, e, g) = (a, 0, 0, d, 0, 0)$ に着目する, を式 (III.4) に代入すると以下となる.

$$a - d - 1 \equiv 0 \pmod{\hat{n}} \quad (\text{III.18})$$

$$0 \equiv 0 \pmod{\hat{n}} \quad (\text{III.19})$$

式 (III.18) より,

$$a - d - 1 = p\hat{n}, \quad p \in \mathbb{Z}$$

であるから, $A \neq \emptyset$ である. $F_1(w, 0, 0, w, 0, 0, \tilde{\tau})$ は以下となる.

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(w, 0, 0, w, 0, 0, \tilde{\tau}) = & \sum_{d=0}^{\infty} A_{d+1,0,0,d,0,0}(\tilde{\tau})w^{2d+1} \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} [A_{d+1+p\hat{n},0,0,d,0,0}(\tilde{\tau})w^{2d+1+p\hat{n}} \\ & + A_{d,0,0,d-1+p\hat{n},0,0}(\tilde{\tau})w^{2d-1+p\hat{n}}] \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

次に, 既約表現 $(6; k, k, +)$ で方程式 (III.1)–(III.3) が成立することを示す. 既約表現 $(6; k, k, +)$ で $A_{abcdefg}(\tilde{\tau})$ が存在するための条件式を以下に再び示す.

$$a - d + b - e - 2c + 2g \equiv 1 \pmod{\hat{n}}, \quad (\text{III.21})$$

$$a - d - 2b + 2e + c - g \equiv 1 \pmod{\hat{n}}$$

以下が成立することを示す.

$$A' \neq \emptyset, \quad A' = \{(a, 0, 0, d, 0, 0) \in \mathbb{N}^6 \mid (\text{III.21})\} \quad (\text{III.22})$$

$$B' = \emptyset, \quad B' = \{(0, b, 0, 0, e, 0) \in \mathbb{N}^6 \mid (\text{III.21})\} \quad (\text{III.23})$$

$$C' = \emptyset, \quad C' = \{(0, 0, c, 0, 0, g) \in \mathbb{N}^6 \mid (\text{III.21})\} \quad (\text{III.24})$$

まず, $(a, b, c, d, e, g) = (0, b, 0, 0, e, 0)$ を式 (III.21) に代入すると以下となる.

$$b - e \equiv 1 \pmod{\hat{n}} \quad (\text{III.25})$$

$$-2b + 2e \equiv 1 \pmod{\hat{n}} \quad (\text{III.26})$$

式 (III.25),(III.26) を変形すると, 以下となる.

$$2b - 2e = 2 + 2\alpha\hat{n}, \quad \alpha \in \mathbb{Z} \quad (\text{III.27})$$

$$2b - 2e = -1 + \beta\hat{n}, \quad \beta \in \mathbb{Z} \quad (\text{III.28})$$

ここで, 任意の $\hat{n} \geq 4$ で

$$2 + 2\alpha\hat{n} \neq -1 + \beta\hat{n}$$

であるから, $B' = \emptyset$ である.

続けて, $(a, b, c, d, e, g) = (0, 0, c, 0, 0, g)$ を式 (III.21) に代入すると以下となる.

$$-2c + 2g \equiv 1 \pmod{\hat{n}} \quad (\text{III.29})$$

$$c - g \equiv 1 \pmod{\hat{n}} \quad (\text{III.30})$$

式 (III.29),(III.30) を変形すると以下となる.

$$-2c + 2g = 1 + \alpha\hat{n}, \quad \alpha \in \mathbb{Z} \quad (\text{III.31})$$

$$-2c + 2g = -2 + 2\beta\hat{n}, \quad \beta \in \mathbb{Z} \quad (\text{III.32})$$

ここで, $1 + \alpha\hat{n} \neq -2 + 2\beta\hat{n}$ であるので, 式 (III.31), (III.32) は同時に成立しない. したがって, $C' = \emptyset$ である.

以上により, $\mu = (6; k, k, +)$ の場合でも \tilde{F}_1 において, z_2, \bar{z}_2 及び, z_3, \bar{z}_3 のみからなる級数項は存在しない. 式 (III.14),(III.15) を利用することで, 以下を示せる.

$$\tilde{F}_2(w, 0, 0, w, 0, 0, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_1(0, 0, w, 0, 0, w, \tilde{\tau}) = 0 \quad (\text{III.33})$$

$$\tilde{F}_3(w, 0, 0, w, 0, 0, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_1(0, w, 0, 0, w, 0, \tilde{\tau}) = 0 \quad (\text{III.34})$$

最後に, $(a, b, c, d, e, g) = (a, 0, 0, d, 0, 0)$ を式 (III.21) に代入すると以下となる.

$$a - d - 1 \equiv 0 \pmod{\hat{n}} \quad (\text{III.35})$$

$$a - d - 1 \equiv 0 \pmod{\hat{n}} \quad (\text{III.36})$$

式 (III.35) より,

$$a - d - 1 = p\hat{n}, \quad p \in \mathbb{Z}$$

であるから, $A \neq \emptyset$ である. $\tilde{F}_1(w, 0, 0, w, 0, 0, \tilde{\tau})$ は式 (III.20) と同様である.

以上により, 式 (III.1)–(III.3) が既約表現 $(6; k, 0, +)$, $(6; k, k, +)$ の双方で成立することを示せた. 同様の手順により,

$$\begin{cases} \tilde{F}_1(0, w, 0, 0, w, 0, \tilde{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_2(0, w, 0, 0, w, 0, \tilde{\tau}) = (\text{III.20}) \\ \tilde{F}_3(0, w, 0, 0, w, 0, \tilde{\tau}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{F}_1(0, 0, w, 0, 0, w, \tilde{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_2(0, 0, w, 0, 0, w, \tilde{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_3(0, 0, w, 0, 0, w, \tilde{\tau}) = (\text{III.20}) \end{cases}$$

が成立する. 最後に, $\tilde{F}_1(w, 0, 0, w, 0, 0, \tilde{\tau})$ を展開した形を以下に示す.

$$\begin{cases} \tilde{F}_1 = A_{100000}(\tilde{\tau})w + A_{000200}w^2 + \text{h.o.t.} & (\hat{n} = 3) \\ \tilde{F}_1 = A_{100000}(\tilde{\tau})w + (A_{000300}(\tilde{\tau}) + A_{200100}(\tilde{\tau}))w^3 + \text{h.o.t.} & (\hat{n} = 4) \\ \tilde{F}_1 = A_{100000}(\tilde{\tau})w + A_{200100}(\tilde{\tau})w^3 + \text{h.o.t.} & (\hat{n} \geq 5) \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

付録 IV 12 重分岐点近傍における安定性

ここでは, 12 重分岐点近傍における正六角形パターン及び, ストライプパターンの安定性を調査する.

(1) 分岐方程式の漸近形の決定

まず, 複素数空間を用いるために, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{12})$ を用いて

$$\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_6) = (w_1 + iw_2, \dots, w_{11} + iw_{12}) \quad (\text{IV.1})$$

と定義する. 12 重分岐点における既約表現 μ は以下のとおりである.

$$\mu = (12; k, \ell) \quad \text{with } 1 \leq \ell \leq k - 1, \quad 2k + \ell \leq n - 1$$

まず、既約表現 $\mu = (12; k, \ell)$ の表現行列 $T^{(12; k, \ell)}$ (式 (22), (23)) による z の変換は以下となる。

$$r : \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \bar{z}_3 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_5 \\ \bar{z}_6 \\ \bar{z}_4 \end{bmatrix}, \quad s : \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

$$p_1 : \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \omega^k z_1 \\ \omega^\ell z_2 \\ \omega^{-k-\ell} z_3 \\ \omega^k z_4 \\ \omega^\ell z_5 \\ \omega^{-k-\ell} z_6 \end{bmatrix}, \quad p_2 : \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \omega^\ell z_1 \\ \omega^{-k-\ell} z_2 \\ \omega^k z_3 \\ \omega^{-k-\ell} z_4 \\ \omega^k z_5 \\ \omega^\ell z_6 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

ここに、 $\omega = \exp(i2\pi/n)$ である。複素数空間を用いることにより、分岐方程式の次元は実質 6 次元となり、

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_6) = \\ [\tilde{F}_1(z_1, \dots, z_6, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_6, \tilde{\tau}), \dots, \tilde{F}_6(z_1, \dots, z_6, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_6, \tilde{\tau})]^\top = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

と表現される。続けて、分岐方程式の同変性 (5) を利用する。式 (5) に式 (IV.4), (22) (または (23)) を代入すると、各変換による同変性は次のとおりである。

$$r : \overline{\tilde{F}_3(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)} = \tilde{F}_1(\bar{z}_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_5, \bar{z}_6, \bar{z}_4) \quad (\text{IV.5})$$

$$\overline{\tilde{F}_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)} = \tilde{F}_2(\bar{z}_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_5, \bar{z}_6, \bar{z}_4) \quad (\text{IV.6})$$

$$\overline{\tilde{F}_2(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)} = \tilde{F}_3(\bar{z}_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_5, \bar{z}_6, \bar{z}_4) \quad (\text{IV.7})$$

$$\overline{\tilde{F}_5(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)} = \tilde{F}_4(\bar{z}_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_5, \bar{z}_6, \bar{z}_4) \quad (\text{IV.8})$$

$$\overline{\tilde{F}_6(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)} = \tilde{F}_5(\bar{z}_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_5, \bar{z}_6, \bar{z}_4) \quad (\text{IV.9})$$

$$\overline{\tilde{F}_4(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)} = \tilde{F}_6(\bar{z}_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_5, \bar{z}_6, \bar{z}_4) \quad (\text{IV.10})$$

$$s : \tilde{F}_{i+3}(z_1, \dots, z_6) = \tilde{F}_i(z_4, z_5, z_6, z_1, z_2, z_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{IV.11})$$

$$\tilde{F}_i(z_1, \dots, z_6) = \tilde{F}_{i+3}(z_4, z_5, z_6, z_1, z_2, z_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{IV.12})$$

$$p_1 : \omega_{1i} \tilde{F}_i(z_1, \dots, z_6) = \tilde{F}_i(\omega_{11} z_1, \dots, \omega_{16} z_6), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{IV.13})$$

$$p_2 : \omega_{2i} \tilde{F}_i(z_1, \dots, z_6) = \tilde{F}_i(\omega_{21} z_1, \dots, \omega_{26} z_6), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{IV.14})$$

ここに、

$$(\omega_{11}, \dots, \omega_{16}) = (\omega^k, \omega^\ell, \omega^{-k-\ell}, \omega^k, \omega^\ell, \omega^{-k-\ell})$$

$$(\omega_{21}, \dots, \omega_{26}) = (\omega^\ell, \omega^{-k-\ell}, \omega^k, \omega^{-k-\ell}, \omega^k, \omega^\ell)$$

である。

分岐方程式の 1 つの要素 $\tilde{F}_1(z_1, \dots, z_6, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_6, \tilde{\tau})$ の一般形を級数展開で表現すると以下となる。

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(z_1, \dots, z_6, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_6, \tilde{\tau}) \\ = \sum_{a=0} \sum_{b=0} \dots \sum_{u=0} A_{abcdefghijstu}(\tilde{\tau}) z_1^a z_2^b z_3^c z_4^d z_5^e z_6^f \bar{z}_1^g \bar{z}_2^h \bar{z}_3^i \bar{z}_4^j \bar{z}_5^k \bar{z}_6^l \tilde{\tau}^u \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

ただし、12 重分岐点である条件より、

$$A_{000000000000}(0) = 0, \quad (\text{IV.16})$$

$$A_{100000000000}(0) = \dots = A_{000000000001}(0) = 0. \quad (\text{IV.17})$$

式 (IV.15) に同変性 (IV.5)–(IV.14) を適用する。まず、変換 r による同変性 (IV.5)–(IV.10) により、全ての $A_{ab\dots tu}(\tilde{\tau})$ は実数である。続けて、変換 r と s によ

る同変性 (IV.5)–(IV.12) により、 F_1, \dots, F_6 の間において次の関係が成立する。

$$\tilde{F}_2(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \tilde{F}_1(z_2, z_3, z_1, z_6, z_4, z_5) \quad (\text{IV.18})$$

$$\tilde{F}_3(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \tilde{F}_1(z_3, z_1, z_2, z_5, z_6, z_4) \quad (\text{IV.19})$$

$$\tilde{F}_4(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \tilde{F}_1(z_4, z_5, z_6, z_1, z_2, z_3) \quad (\text{IV.20})$$

$$\tilde{F}_5(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \tilde{F}_1(z_5, z_6, z_4, z_3, z_1, z_2) \quad (\text{IV.21})$$

$$\tilde{F}_6(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \tilde{F}_1(z_6, z_4, z_5, z_2, z_3, z_1) \quad (\text{IV.22})$$

最後に、 p_1, p_2 による同変性 (IV.13), (IV.14) により、 $A_{ab\dots tu}(\tilde{\tau})$ が消失しない係数であるための必要十分条件が以下のように示される。

$$\begin{aligned} \hat{k}(a-h) + \hat{\ell}(b-i) - (\hat{k} + \hat{\ell})(c-j) + \hat{k}(d-s) \\ + \hat{\ell}(e-t) - (\hat{k} + \hat{\ell})(g-u) \equiv \hat{k} \pmod{\hat{n}} \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

$$\begin{aligned} \hat{\ell}(a-h) - (\hat{k} + \hat{\ell})(b-i) + \hat{k}(c-j) - (\hat{k} + \hat{\ell})(d-s) \\ + \hat{k}(e-t) + \hat{\ell}(g-u) \equiv \hat{\ell} \pmod{\hat{n}} \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

ここに、

$$\hat{k} = \frac{k}{\gcd(k, \ell, n)}, \quad \hat{\ell} = \frac{\ell}{\gcd(k, \ell, n)}, \quad \hat{n} = \frac{n}{\gcd(k, \ell, n)}$$

である。

分岐方程式の要素の漸近 (具体) 形、つまり、 $F_1(z_1, \dots, z_6, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_6, \tilde{\tau})$ の漸近形は条件式 (IV.23), (IV.24) によって決定される。したがって、既約表現 $\mu = (12; k, \ell)$ における k, ℓ 及び、 n に代入する値によって $F_1(z_1, \dots, z_6, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_6, \tilde{\tau})$ の具体形が定まる。ただし、本論文では分岐方程式の漸近形を用いて安定性を決定するので、ヤコビ行列を求めるための分岐方程式の項は、2 次まで与えられれば十分であった。そこで、分岐方程式の具体形を 2 次項まで調べた結果を表-3 に示す。

表-3 分岐方程式の漸近形

$(\hat{n}, \hat{k}, \hat{\ell})$	$\tilde{F}_i \quad (a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, 4)$
(7, 2, 1)	$\tilde{F}_1 = a_1(\tilde{\tau})z_1 + (a_2(\tilde{\tau})\bar{z}_2\bar{z}_3 + a_3(\tilde{\tau})\bar{z}_1z_3 + a_4(\tilde{\tau})z_2^2) + \text{h.o.t.}$
other $(\hat{n}, \hat{k}, \hat{\ell})$'s	$\tilde{F}_1 = a_1(\tilde{\tau})z_1 + a_2(\tilde{\tau})\bar{z}_2\bar{z}_3 + \text{h.o.t.}$
<small>$a_1(\tilde{\tau}) \equiv A_{100000000000}(\tilde{\tau}), a_2(\tilde{\tau}) \equiv A_{00000000110000}(\tilde{\tau}), a_3(\tilde{\tau}) \equiv A_{001000100000}(\tilde{\tau}), a_4(\tilde{\tau}) \equiv A_{020000000000}(\tilde{\tau})$</small>	

(2) $\tilde{F}_1 = a_1 z_1 + (a_2 \bar{z}_2 \bar{z}_3 + a_3 \bar{z}_1 z_3 + a_4 z_2^2) + \text{h.o.t}$ である場合の安定性

式 (IV.15)–(IV.22) の漸近形は次のようになる。

$$\tilde{F}_i(z, \tilde{\tau}) = 0 \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (\text{IV.25})$$

$$\tilde{F}_1(z, \tilde{\tau}) = a_1(\tilde{\tau})z_1 + (a_2(\tilde{\tau})\bar{z}_2\bar{z}_3 + a_3(\tilde{\tau})z_3\bar{z}_1 + a_4(\tilde{\tau})z_2^2) + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.26})$$

$$\tilde{F}_2(z, \tilde{\tau}) = a_1(\tilde{\tau})z_2 + (a_2(\tilde{\tau})\bar{z}_3\bar{z}_1 + a_3(\tilde{\tau})z_1\bar{z}_2 + a_4(\tilde{\tau})z_3^2) + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.27})$$

$$\tilde{F}_3(z, \tilde{\tau}) = a_1(\tilde{\tau})z_3 + (a_2(\tilde{\tau})\bar{z}_1\bar{z}_2 + a_3(\tilde{\tau})z_2\bar{z}_3 + a_4(\tilde{\tau})z_1^2) + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.28})$$

照されたい.)

$$\tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_2(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_3(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau})$$

$$\tilde{F}_4(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_5(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_6(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = 0 \quad (\text{IV.48})$$

$$\tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = a'_1(0)\tilde{\tau}w + (a_2(0) + a_3(0) + a_4(0))w^2 + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.49})$$

式 (IV.49) より, 分岐解 $\tilde{\tau}_1$ が存在するので, 分岐方程式 (IV.32)–(IV.37) において, 解 $\mathbf{w}^{(2)}$ は解として存在する. $\mathbf{w}^{(3)}$ についても同様に成立し, また, 分岐解も等価である.

最後に, $\mathbf{w}^{(4)}$ に着目する. 式 (IV.32)–(IV.37) に代入すると, 次のようになる. (解が成立する条件は付録 VI を参照されたい.)

$$\tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}) = a'_1(0)\tilde{\tau}w + A_{2000000100000}(0)w^3 + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.50})$$

$$\tilde{F}_2(\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}) = A_{000000003000}(0)w^3 + A_{0010000004000}(0)w^5 + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.51})$$

$$\tilde{F}_3(\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}) = a_4(0)w^2 + A_{030000010000}(0)w^4 + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.52})$$

$$\tilde{F}_4(\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_5(\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_6(\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}) = 0 \quad (\text{IV.53})$$

ここで, $A_{003000000000}(0), A_{0010000004000}(0)$ は, 式 (IV.23), (IV.24) から導出した. 式 (IV.50)–(IV.52) より, $\mathbf{w}^{(4)}$ は分岐方程式の解として一般に成立しない. $\mathbf{w}^{(5)}, \dots, \mathbf{w}^{(9)}$ についても同様である.

a) Type V パターンにおける解の安定性

初めに, $(\hat{n}, \hat{k}, \hat{\ell}) = (7, 2, 1)$ の場合は Type M パターンの正六角形パターンは存在しない⁵⁾ ことに注意されたい.

$(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}_1)$ を式 (IV.43), (IV.44) に代入し,

$$a_1(\tilde{\tau}_1) \simeq a'_1(0)\tilde{\tau}_1 \simeq -(a_2(0) + a_3(0) + a_4(0))w$$

であることを利用して行列 (IV.42) の固有値を計算すると, 次のようになる.

$$\lambda_1 \simeq (a_2(0) + a_3(0) + a_4(0))w \quad (\text{IV.54})$$

$$\lambda_2 \simeq \left[-\left(2a_2(0) + \frac{a_3(0)}{2} + 2a_4(0)\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(2a_4(0) - a_3(0)) \right] w \quad (\text{IV.55})$$

$$\lambda_3 \simeq \left[-\left(2a_2(0) + \frac{a_3(0)}{2} + 2a_4(0)\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(2a_4(0) - a_3(0)) \right] w \quad (\text{IV.56})$$

$$\lambda_4 \simeq -(3a_2(0) + a_3(0) - a_4(0))w \quad (\text{IV.57})$$

$$\lambda_5 \simeq \left[-\left(\frac{5}{2}a_3(0) + 2a_4(0)\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(2a_4(0) - a_3(0)) \right] w \quad (\text{IV.58})$$

$$\lambda_6 \simeq \left[-\left(\frac{5}{2}a_3(0) + 2a_4(0)\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(2a_4(0) - a_3(0)) \right] w \quad (\text{IV.59})$$

ここに, 固有値 (IV.54)–(IV.59) は全て重解である. 分岐解の安定性は固有値の実部に着目すればよい. 固有値 (IV.54)–(IV.59) の実部は少なくとも一つは正であるので不安定である. (証明は付録 VII を参照)

b) Type T パターンにおける解の安定性

$(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}_1)$ を式 (IV.43), (IV.44) に代入すると, $B_1(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}_1) = B_1(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}_1)$ であり, 固有値を計算すると, $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ は式 (IV.54)–(IV.59) と等価である. また, $\lambda_7 \simeq -(a_2(0) + a_3(0) + a_4(0))w$ (6 重解) となる. ここで, $(a_2(0) + a_3(0) + a_4(0))w$ の符号にかかわらず正の固有値が一つ存在するので, Type T の正六角形

パターンが発現する分岐解も, その分岐点近傍では不安定である.

(3) $F_1 = a_1z_1 + a_2\bar{z}_2\bar{z}_3 + \text{h.o.t}$ である場合の安定性式 (IV.15)–(IV.22) の漸近形は次のようになる.

$$\tilde{F}_i(\mathbf{z}, \tilde{\tau}) = 0 \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (\text{IV.60})$$

$$\tilde{F}_1(\mathbf{z}, \tilde{\tau}) = a_1(\tilde{\tau})z_1 + a_2(\tilde{\tau})\bar{z}_2\bar{z}_3 + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.61})$$

$$\tilde{F}_2(\mathbf{z}, \tilde{\tau}) = a_1(\tilde{\tau})z_2 + a_2(\tilde{\tau})\bar{z}_3\bar{z}_1 + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.62})$$

$$\tilde{F}_3(\mathbf{z}, \tilde{\tau}) = a_1(\tilde{\tau})z_3 + a_2(\tilde{\tau})\bar{z}_1\bar{z}_2 + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.63})$$

$$\tilde{F}_4(\mathbf{z}, \tilde{\tau}) = a_1(\tilde{\tau})z_4 + a_2(\tilde{\tau})\bar{z}_5\bar{z}_6 + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.64})$$

$$\tilde{F}_5(\mathbf{z}, \tilde{\tau}) = a_1(\tilde{\tau})z_5 + a_2(\tilde{\tau})\bar{z}_6\bar{z}_4 + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.65})$$

$$\tilde{F}_6(\mathbf{z}, \tilde{\tau}) = a_1(\tilde{\tau})z_6 + a_2(\tilde{\tau})\bar{z}_4\bar{z}_5 + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.66})$$

式 (IV.61)–(IV.66) に $z_k = w_{2k-1} + iw_{2k}$ ($k = 1, \dots, 6$) を代入すると, 次のようになる.

$$\tilde{F}_1(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) = \{a_1w_1 + a_2(w_3w_5 - w_4w_6)\} + i\{a_1w_2 - a_2(w_4w_5 + w_3w_6)\} + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.67})$$

$$\tilde{F}_2(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) = \{a_1w_3 + a_2(w_5w_1 - w_6w_2)\} + i\{a_1w_4 - a_2(w_6w_1 + w_5w_2)\} + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.68})$$

$$\tilde{F}_3(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) = \{a_1w_5 + a_2(w_1w_3 - w_2w_4)\} + i\{a_1w_6 - a_2(w_2w_3 + w_1w_4)\} + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.69})$$

$$\tilde{F}_4(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) = \{a_1w_7 + a_2(w_9w_{11} - w_{10}w_{12})\} + i\{a_1w_8 - a_2(w_{10}w_{11} + w_9w_{12})\} + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.70})$$

$$\tilde{F}_5(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) = \{a_1w_9 + a_2(w_{11}w_7 - w_{12}w_8)\} + i\{a_1w_{10} - a_2(w_{12}w_7 + w_{11}w_8)\} + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.71})$$

$$\tilde{F}_6(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) = \{a_1w_{11} + a_2(w_7w_9 - w_8w_{10})\} + i\{a_1w_{12} - a_2(w_8w_9 + w_7w_{10})\} + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.72})$$

ヤコビ行列 $J(\mathbf{w}, \tilde{\tau})$ は次のようになる.

$$J(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} C_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & C_2 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.73})$$

$$C_1(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) \equiv \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2w_5 & -a_2w_6 & a_2w_3 & -a_2w_4 \\ 0 & a_1 & -a_2w_6 & -a_2w_5 & -a_2w_4 & -a_2w_3 \\ a_2w_5 & -a_2w_6 & a_1 & 0 & a_2w_1 & -a_2w_2 \\ -a_2w_6 & -a_2w_5 & 0 & a_1 & -a_2w_2 & -a_2w_1 \\ a_2w_3 & -a_2w_4 & a_2w_1 & -a_2w_2 & a_1 & 0 \\ -a_2w_4 & -a_2w_3 & -a_2w_2 & -a_2w_1 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.74})$$

$$C_2(\mathbf{w}, \tilde{\tau}) \equiv \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2w_{11} & -a_2w_{12} & a_2w_9 & -a_2w_{10} \\ 0 & a_1 & -a_2w_{12} & -a_2w_{11} & -a_2w_{10} & -a_2w_9 \\ a_2w_{11} & -a_2w_{12} & a_1 & 0 & a_2w_7 & -a_2w_8 \\ -a_2w_{12} & -a_2w_{11} & 0 & a_1 & -a_2w_8 & -a_2w_7 \\ a_2w_9 & -a_2w_{10} & a_2w_7 & -a_2w_8 & a_1 & 0 \\ -a_2w_{10} & -a_2w_9 & -a_2w_8 & -a_2w_7 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.75})$$

12 重分岐点における分岐方程式の解の候補を再び示す。

$$\begin{cases} \mathbf{w}^{(1)} = (w, 0, w, 0, w, 0, w, 0, w, 0) & (\text{六角形パターン : Type V, M}) \\ \mathbf{w}^{(2)} = (w, 0, w, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0) & (\text{六角形パターン : Type T}) \\ \mathbf{w}^{(3)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, w, 0) & (\text{六角形パターン : Type T}) \\ \mathbf{w}^{(4)} = (w, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) & (\text{ストライプパターン}) \\ \mathbf{w}^{(5)} = (0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) & (\text{ストライプパターン}) \\ \mathbf{w}^{(6)} = (0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0) & (\text{ストライプパターン}) \\ \mathbf{w}^{(7)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0) & (\text{ストライプパターン}) \\ \mathbf{w}^{(8)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0) & (\text{ストライプパターン}) \\ \mathbf{w}^{(9)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, w) & (\text{ストライプパターン}) \end{cases} \quad (\text{IV.76})$$

分岐方程式 (IV.67)–(IV.72) において、解 (IV.76) が成立することを確かめる。

まず、 $\mathbf{w}^{(1)}$ を式 (IV.67)–(IV.72) に代入すると、以下となる。

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}) &= \tilde{F}_2(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}) = \dots = \tilde{F}_5(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_6(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}) \\ \tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}) &= a'_1(0)\tilde{\tau}w + a_2(0)w^2 + \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (\text{IV.77})$$

式 (IV.77) より、以下の分岐解 ($\tilde{\tau}_2$ とする) を得ることができる。

$$\tilde{\tau}_2 \simeq -\frac{a_2(0)w}{a'_1(0)} \quad (\text{IV.78})$$

以上により、分岐方程式 (IV.67)–(IV.72) において、解 $\mathbf{w}^{(1)}$ は解として存在する。

続けて、 $\mathbf{w}^{(2)}$ に着目する。式 (IV.67)–(IV.72) に代入すると、次のようになる。(詳しくは付録 V を参照されたい。)

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) &= \tilde{F}_2(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_3(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) \\ \tilde{F}_4(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) &= \tilde{F}_5(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_6(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.79})$$

$$\tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = a'_1(0)\tilde{\tau}w + a_2(0)w^2 + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.80})$$

式 (IV.80) より、分岐解 $\tilde{\tau}_2$ が存在するので、分岐方程式 (IV.67)–(IV.72) において、解 $\mathbf{w}^{(2)}$ は解として存在する。 $\mathbf{w}^{(3)}$ についても同様に成立し、また、分岐解も等価である。

最後に、 $\mathbf{w}^{(4)}$ に着目する。式 (IV.67)–(IV.72) に代入すると、 z_i, \bar{z}_i ($i = 2, 3, 4, 5, 6$) のみからなる級数項が存在しなければ次のようになる。(詳細は付録 VI を参照されたい。)

$$\tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}) = a'_1(0)\tilde{\tau}w + a_5(0)w^3 + \text{h.o.t.} \quad (\text{IV.81})$$

$$\tilde{F}_i(\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}) = 0, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6 \quad (\text{IV.82})$$

ここで、 $a_5(0) \simeq A_{2000000100000}(\tilde{\tau})$ とした。式 (IV.81) より、以下の分岐解 ($\tilde{\tau}_3$ とする) を得ることができる。

$$\tilde{\tau}_3 \simeq -\frac{a_5(0)w^2}{a'_1(0)} \quad (\text{IV.83})$$

以上により、分岐方程式 (IV.67)–(IV.72) において、解 $\mathbf{w}^{(4)}$ は解として存在する。 $\mathbf{w}^{(5)}, \dots, \mathbf{w}^{(9)}$ についても同様に成立し、また、分岐解も等価である。

a) Type V, M パターンにおける解の安定性

正六角形パターンの解 ($\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}_2$) を式 (IV.74),(IV.75) に代入して、

$$a_1(\tilde{\tau}_2) \simeq a'_1(0)\tilde{\tau}_2 \simeq -a_2(0)w$$

であることを用いると以下となる。

$$\begin{aligned} C_1(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}_2) &= C_2(\mathbf{w}^{(1)}, \tilde{\tau}_2) \\ &= a_2(0)w \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.84})$$

行列 (式 (IV.73)) の固有値を計算すると、次のようになる。(式 (II.58) と同一であることを注意)

$$\lambda_1 \simeq -3a_2(0)w \quad (2 \text{ 重解}) \quad (\text{IV.85})$$

$$\lambda_2 \simeq -2a_2(0)w \quad (4 \text{ 重解}) \quad (\text{IV.86})$$

$$\lambda_3 \simeq 0 \quad (4 \text{ 重解}) \quad (\text{IV.87})$$

$$\lambda_4 \simeq a_2(0)w \quad (2 \text{ 重解}) \quad (\text{IV.88})$$

式 (IV.85),(IV.88) より、 a_2w の正負にかかわらず正の固有値が必ず一個存在するので一般に不安定である。

b) Type T パターンにおける解の安定性

($\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}_2$) を式 (IV.74),(IV.75) に代入すると以下となる。

$$C_1(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}_2) = a_2(0)w \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.89})$$

$$C_2(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}_2) = -a_2(0)w \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.90})$$

式 (IV.89)=式 (IV.84) より、Type T パターンにおいても正の固有値が必ず一つ存在するため不安定である。 $\mathbf{w}^{(3)}$ の場合も同様である。

c) ストライプパターンにおける解の安定性

解 ($\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}_3$) を式 (IV.74),(IV.75) に代入して、

$$a_1(\tilde{\tau}_3) \simeq a'_1(0)\tilde{\tau}_3 \simeq -a_5(0)w^2$$

であることを用いると以下となる。

$$C_1(\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}_3) = a_2(0)w \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.91})$$

$$C_2(\mathbf{w}^{(4)}, \tilde{\tau}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.92})$$

ここで、 $a_5(0)w^2$ は $a_2(0)w$ と比較して高次であるため無視した。行列 (式 (IV.73)) の固有値を計算すると、次

のようになる.

$$\lambda_1 \simeq -a_2(0)w \quad (2 \text{ 重解}) \quad (\text{IV.93})$$

$$\lambda_2 \simeq 0 \quad (8 \text{ 重解}) \quad (\text{IV.94})$$

$$\lambda_3 \simeq a_2(0)w \quad (2 \text{ 重解}) \quad (\text{IV.95})$$

式 (IV.93),(IV.95) より, $a_2(0)w$ の正負にかかわらず正の固有値が必ず一個存在するので, 不安定である. $\mathbf{w}^{(5)}, \dots, \mathbf{w}^{(9)}$ の場合も同様である.

付録 V Type T の正六角形パターンへの分岐解の存在について

ここでは Type T パターンの分岐解が存在することを分岐方程式からのアプローチで示す. 分岐方程式の非自明解 (分岐解) が存在するためには, 分岐方程式 $\tilde{\mathbf{F}}$ で, 自明にゼロが成立しない項は 1 種類でなければならない. そこで, ここでは

$$\tilde{F}_4(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_5(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_6(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = 0 \quad (\text{V.1})$$

であることを示す. まず, 式 (V.1) を展開すると以下となる.

$$\tilde{F}_i(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = \sum_{(d,e,g,s,t,u) \in Q} A_{000deg000stu}(\tilde{\tau})x^{d+e+g+s+t+u}, \quad i = 4, 5, 6 \quad (\text{V.2})$$

ここで,

$$T = \{(a, b, \dots, t, u) \in \mathbb{Z}^{12} \mid (\text{IV.23}), (\text{IV.24}), a, b, \dots, t, u \geq 0\}$$

$$Q = \{(d, e, g, s, t, u) \mid (0, 0, 0, d, e, g, 0, 0, 0, s, t, u) \in T\}$$

である.

ここからは, $Q = \emptyset$ であることを示す. そこで, まず $Q \neq \emptyset$ であると仮定する. Q の要素を式 (IV.23),(IV.24) に代入すると以下となる.

$$\hat{k}(d-s) + \hat{\ell}(e-t) - (\hat{k} + \hat{\ell})(g-u) \equiv \hat{k} \pmod{\hat{n}} \quad (\text{V.3})$$

$$-(\hat{k} + \hat{\ell})(d-s) + \hat{k}(e-t) + \hat{\ell}(g-u) \equiv \hat{\ell} \pmod{\hat{n}} \quad (\text{V.4})$$

式 (V.3),(V.4) を行列を用いて書き直すと以下となる.

$$[e-t-d+s \quad g-u-d+s] \begin{bmatrix} \hat{k} & \hat{\ell} \\ \hat{\ell} & -\hat{k}-\hat{\ell} \end{bmatrix} \equiv [\hat{\ell} \quad \hat{k}] \pmod{\hat{n}} \quad (\text{V.5})$$

ここで, 文献⁵⁾ より, Type T パターンの既約表現 $(\hat{n}, \hat{k}, \hat{\ell})$ において, 以下が証明されている.

Type T パターンが存在 \leftrightarrow

$$(\hat{k} - \hat{\ell}) \gcd(\hat{k}, \hat{\ell}) \text{ is divisible by } \gcd(\hat{k}^2 + \hat{k}\hat{\ell} + \hat{\ell}^2, \hat{n}) \leftrightarrow \quad (\text{V.6})$$

$$[u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} \hat{k} & \hat{\ell} \\ \hat{\ell} & -\hat{k}-\hat{\ell} \end{bmatrix} \not\equiv [\hat{\ell} \quad \hat{k}] \pmod{\hat{n}}$$

ここで, $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$ である. 式 (V.6) より, $Q \neq \emptyset$ であることに矛盾するので, $Q = \emptyset$ である. 以上により,

$$\tilde{F}_4(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_5(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = \tilde{F}_6(\mathbf{w}^{(2)}, \tilde{\tau}) = 0$$

であることが示される.

付録 VI 12 重分岐点におけるストライプパターンの存在について

式 (IV.18)–(IV.22) より, $F_1(z_1, \dots, z_6, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_6, \tilde{\tau})$ において, z_i, \bar{z}_i ($i = 2, 3, 4, 5, 6$) のみからなる級数項が存在しなければ以下の式が成立する.

$$\tilde{F}_2(w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0) = \tilde{F}_1(0, 0, w, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0) = 0 \quad (\text{VI.1})$$

$$\tilde{F}_3(w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0) = \tilde{F}_1(0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0) = 0 \quad (\text{VI.2})$$

$$\tilde{F}_4(w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0) = \tilde{F}_1(0, 0, w, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0) = 0 \quad (\text{VI.3})$$

$$\tilde{F}_5(w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0) = \tilde{F}_1(0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0) = 0 \quad (\text{VI.4})$$

$$\tilde{F}_6(w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0) = \tilde{F}_1(0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, w, 0) = 0 \quad (\text{VI.5})$$

そこで, 特定の条件によって, 次の式が成立することを示す.

$$T = \{(a, b, \dots, t, u) \in \mathbb{Z}^{12} \mid (\text{IV.23}), (\text{IV.24}), a, b, \dots, t, u \geq 0\}$$

$$(0, b, 0, 0, 0, 0, 0, i, 0, 0, 0, 0) \notin T$$

$$(0, 0, c, 0, 0, 0, 0, 0, j, 0, 0, 0) \notin T$$

$$(0, 0, 0, d, 0, 0, 0, 0, 0, s, 0, 0) \notin T$$

$$(0, 0, 0, 0, e, 0, 0, 0, 0, 0, t, 0) \notin T$$

$$(0, 0, 0, 0, 0, g, 0, 0, 0, 0, 0, u) \notin T$$

まず, $(a, b, \dots, t, u) = (0, b, 0, 0, 0, 0, 0, i, 0, 0, 0, 0)$ に着目する. 式 (IV.23),(IV.24) に代入すると以下となる.

$$\hat{\ell}v - p\hat{n} = \hat{k} \quad (\text{VI.6})$$

$$-(\hat{k} + \hat{\ell})v - q\hat{n} = \hat{\ell} \quad p, q \in \mathbb{Z} \quad (\text{VI.7})$$

ここで, $v = b - i \in \mathbb{Z}$ とした. 式 (VI.6),(VI.7) を行列を用いて書き直すと以下となる.

$$\begin{bmatrix} \hat{\ell} & -\hat{n} & 0 \\ -(\hat{k} + \hat{\ell}) & 0 & -\hat{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{\ell} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.8})$$

ここで, A を $m \times n$ 整数行列, \mathbf{b} を m 次元整数ベクトルとしたとき, 以下の二つは同値である⁵⁾.

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ において, 整数解 \mathbf{x} が存在する.
- 行列 A と, $[A \mid \mathbf{b}]$ は等価な determinantal divisors をもつ. すなわち, 以下の式が成立する.

$$\text{rank } A = \text{rank } [A \mid \mathbf{b}] \quad (\text{VI.9})$$

$$d_k(A) = d_k[A \mid \mathbf{b}] \quad \text{for all } k \quad (\text{VI.10})$$

ここで, $d_k(A)$ は, 行列 A の全ての $k \times k$ minors(subdeterminants) の最大公約数である.

ここからは,

$$A = \begin{bmatrix} \hat{\ell} & -\hat{n} & 0 \\ -(\hat{k} + \hat{\ell}) & 0 & -\hat{n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{\ell} \end{bmatrix}$$

として, 式 (VI.9),(VI.10) が成立するか確認する.

$$\text{rank } A = \text{rank} \begin{bmatrix} \hat{\ell} & -\hat{n} & 0 \\ -\hat{k} & -\hat{n} & -\hat{n} \end{bmatrix} = 2 \quad (\text{VI.11})$$

$$\text{rank } [A \mid \mathbf{b}] = \text{rank} \begin{bmatrix} \hat{\ell} & -\hat{n} & 0 & \hat{k} \\ -\hat{k} & -\hat{n} & -\hat{n} & \hat{k} + \hat{\ell} \end{bmatrix} = 2 \quad (\text{VI.12})$$

式 (VI.11) = (VI.12) より, 式 (VI.9) が成立する. 続けて,

$$d_1(A) = \gcd(\hat{k}, \hat{\ell}, \hat{n}) = 1 \quad (\text{VI.13})$$

$$d_1([A | \mathbf{b}]) = \gcd(\hat{k}, \hat{\ell}, \hat{n}) = 1 \quad (\text{VI.14})$$

$$d_2(A) = \gcd(\hat{k}\hat{n}, \hat{\ell}\hat{n}, \hat{n}^2) = \hat{n} \quad (\text{VI.15})$$

$$\begin{aligned} d_2([A | \mathbf{b}]) &= \gcd(\hat{k}\hat{n}, \hat{\ell}\hat{n}, \hat{n}^2, \hat{k}^2 + \hat{k}\hat{\ell} + \hat{\ell}^2) \\ &= \gcd(\hat{n}, \hat{k}^2 + \hat{k}\hat{\ell} + \hat{\ell}^2) \end{aligned} \quad (\text{VI.16})$$

である. まず, 式 (VI.13) = (VI.14) は常に成立する. また, 以下の式が成立すれば, 式 (VI.15) = (VI.16) が成立する.

$$\hat{k}^2 + \hat{k}\hat{\ell} + \hat{\ell}^2 = \gamma_1 \hat{n}, \quad \gamma_1 \in \mathbb{Z}^+ \quad (\text{VI.17})$$

以上により, 式 (VI.17) が成立する場合に (VI.9), (VI.10) が成立し整数解 $[v \ p \ q]^T$ が存在する. この場合, $(0, b, 0, 0, 0, 0, 0, i, 0, 0, 0, 0) \in T$ であり,

$$\tilde{F}_3(w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, \bar{\tau}) \neq 0 \quad (\text{VI.18})$$

となる. したがって, $(0, b, 0, 0, 0, 0, 0, i, 0, 0, 0, 0) \notin T$ (\leftrightarrow (VI.2)) であるためには以下の式を満足することが条件となる.

$$\hat{k}^2 + \hat{k}\hat{\ell} + \hat{\ell}^2 \neq \gamma_1 \hat{n}, \quad \gamma_1 \in \mathbb{Z}^+ \quad (\text{VI.19})$$

同様の手順により,

$$(0, 0, c, 0, 0, 0, 0, 0, j, 0, 0, 0) \notin T \leftrightarrow \hat{k}^2 + \hat{k}\hat{\ell} + \hat{\ell}^2 \neq \gamma_2 \hat{n} \quad (\leftrightarrow \text{VI.1}) \quad (\text{VI.20})$$

$$(0, 0, 0, d, 0, 0, 0, 0, 0, s, 0, 0) \notin T \leftrightarrow \hat{k}^2 + 2\hat{k}\hat{\ell} \neq \gamma_3 \hat{n} \quad (\leftrightarrow \text{VI.3}) \quad (\text{VI.21})$$

$$(0, 0, 0, 0, e, 0, 0, 0, 0, 0, t, 0) \notin T \leftrightarrow \hat{k}^2 - \hat{\ell}^2 \neq \gamma_4 \hat{n} \quad (\leftrightarrow \text{VI.4}) \quad (\text{VI.22})$$

$$(0, 0, 0, 0, 0, g, 0, 0, 0, 0, 0, u) \notin T \leftrightarrow \hat{\ell}^2 + 2\hat{k}\hat{\ell} \neq \gamma_5 \hat{n} \quad (\leftrightarrow \text{VI.5}) \quad (\text{VI.23})$$

である. ここで, $\gamma_i \in \mathbb{Z}^+ (i = 2, 3, 4, 5)$ である.

続けて,

$$\tilde{F}_1(\mathbf{w}^{(4)}, \bar{\tau}) = \sum_a \sum_h A_{a000000h00000}(\bar{\tau}) w^{a+h} \quad (\text{VI.24})$$

に着目し, 式 (IV.23) に $(a, 0, 0, 0, 0, 0, h, 0, 0, 0, 0, 0)$ を代入すると次のようになる. (式 (IV.24) も同様の結果となる.)

$$a - h \equiv 1 \pmod{\hat{n}} \quad (\text{VI.25})$$

式 (VI.25) より,

$$a = 1 + h + p\hat{n}, \quad p \in \mathbb{Z} \quad (\text{VI.26})$$

であるので, 式 (VI.25) を展開すると以下となる.

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, \bar{\tau}) &= \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} A_{1+q,q}(\bar{\tau}) w^{2q+1} \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} [A_{q+1+p\hat{n},q}(\bar{\tau}) w^{2q+1+p\hat{n}} + A_{q,q-1+p\hat{n}}(\bar{\tau}) w^{2q-1+p\hat{n}}] \\ &= A_{1,0}(\bar{\tau}) w + A_{2,1}(\bar{\tau}) w^3 + \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (\text{VI.27})$$

ここで, $A_{a,h}(\bar{\tau}) = A_{a000000h00000}(\bar{\tau})$ とした.

以上と同様の手順により, 条件 (VI.20)–(VI.23) が同時に満足する場合に次の式が成立する.

$$\begin{cases} \tilde{F}_1(0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_2(0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_3(0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_4(0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_5(0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_6(0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \end{cases} \quad (\text{VI.27})$$

$$\begin{cases} \tilde{F}_1(0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_2(0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_3(0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_4(0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_5(0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_6(0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \end{cases} \quad (\text{VI.27})$$

$$\begin{cases} \tilde{F}_1(0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_2(0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_3(0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_4(0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_5(0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_6(0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, 0, \bar{\tau}) = 0 \end{cases} \quad (\text{VI.27})$$

$$\begin{cases} \tilde{F}_1(0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_2(0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_3(0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_4(0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_5(0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_6(0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, w, \bar{\tau}) = 0 \end{cases} \quad (\text{VI.27})$$

$$\begin{cases} \tilde{F}_1(0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_2(0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_3(0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_4(0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_5(0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \\ \tilde{F}_6(0, 0, 0, 0, 0, w, 0, 0, 0, 0, 0, \bar{\tau}) = 0 \end{cases} \quad (\text{VI.27})$$

最後に, ストライプパターンの解の存在の判定例として $(\hat{n}, \hat{k}, \hat{\ell}) = (7, 2, 1), (6, 2, 1)$ に着目する. $(\hat{k}, \hat{\ell}) = (2, 1)$ の場合,

$$\begin{aligned} \hat{k}^2 + \hat{k}\hat{\ell} + \hat{\ell}^2 &= 7, \quad \hat{k}^2 + 2\hat{k}\hat{\ell} = 8, \\ \hat{k}^2 - \hat{\ell}^2 &= 3, \quad \hat{\ell}^2 + 2\hat{k}\hat{\ell} = 5 \end{aligned}$$

であるので, $(\hat{n}, \hat{k}, \hat{\ell}) = (7, 2, 1)$ の場合, z_2, \bar{z}_2 及び z_3, \bar{z}_3 のみからなる級数項が存在するので, $\tilde{F}_2(\mathbf{w}^{(4)}, \bar{\tau}) \neq 0, \tilde{F}_3(\mathbf{w}^{(4)}, \bar{\tau}) \neq 0$ となり, 分岐方程式の解として $\mathbf{w}^{(4)}$ は成立しない. 一方, $(\hat{n}, \hat{k}, \hat{\ell}) = (6, 2, 1)$ の場合, $\tilde{F}_i(\mathbf{w}^{(4)}, \bar{\tau}) = 0 (i = 2, 3, 4, 5)$ となるため, 分岐方程式の解として $\mathbf{w}^{(4)}$ が成立する. $\mathbf{w}^{(5)}, \dots, \mathbf{w}^{(9)}$ についても同様である.

付録 VII 固有値 (IV.54)–(IV.59) の実部の少なくとも一つが正であることの証明

固有値 (IV.54)–(IV.59) の実部の少なくとも一つが正であることを示すために, ここでは以下の不等式が同時に満足しないことを示す.

$$\text{Re}(\lambda_1) < 0, \text{Re}(\lambda_2) < 0, \text{Re}(\lambda_4) < 0, \text{Re}(\lambda_5) < 0 \quad (\text{VII.1})$$

そこで, 不等式 (VII.1) が成立すると仮定し, $w > 0$ と
して以下の式について考える.

$$\frac{\operatorname{Re}(\lambda_1)}{w} = a_2(0) + a_3(0) + a_4(0) < 0 \quad (\text{VII.2})$$

$$-2\frac{\operatorname{Re}(\lambda_2)}{w} = 4a_2(0) + a_3(0) + 4a_4(0) > 0 \quad (\text{VII.3})$$

$$-\frac{\operatorname{Re}(\lambda_4)}{w} = 3a_2(0) + a_3(0) - a_4(0) > 0 \quad (\text{VII.4})$$

$$-2\frac{\operatorname{Re}(\lambda_5)}{w} = 5a_3(0) + 4a_4(0) > 0 \quad (\text{VII.5})$$

式 (VII.3) より,

$$4(a_2(0) + a_3(0) + a_4(0)) - 3a_3(0) > 0 \quad (\text{VII.6})$$

であるから, 式 (VII.2),(VII.6) によって以下の不等式
が成立する.

$$3a_3(0) < 4(a_2(0) + a_3(0) + a_4(0)) < 0 \quad (\text{VII.7})$$

式 (VII.7) より, $a_3(0) < 0$ である. 続けて, 式 (VII.4)
より,

$$3(a_2(0) + a_3(0) + a_4(0)) - 2a_3(0) - 4a_4(0) > 0 \quad (\text{VII.8})$$

であるから, 式 (VII.2),(VII.8) によって以下の不等式
が成立する.

$$2a_3(0) + 4a_4(0) < 3(a_2(0) + a_3(0) + a_4(0)) < 0 \quad (\text{VII.9})$$

式 (VII.5),(VII.9) より, 以下の不等式が成立する.

$$2a_3(0) + 4a_4(0) < 5a_3(0) + 4a_4(0) \quad (\text{VII.10})$$

式 (VII.10) より, $a_3(0) > 0$ であるが, 先の $a_3(0) < 0$
と矛盾する. したがって, 不等式 (VII.1) は満足しない.
 $w < 0$ の場合も同様である. したがって, w の正負に
関わらず, 一般に固有値 (IV.54)–(IV.59) の実部の少な
くとも一つが正である.

参考文献

- 1) W. Christaller: *Die zentralen Orte in Süddeutschland*, Gustav Fischer, Jena,1933. English translation: *Central Places in Southern Germany*, Prentice Hall, Englewood Cliffs,1966.
- 2) A. Lösch: *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Gustav Fischer, Jena,1940. English translation: *The Economics of Location*, Yale University Press, New Haven,1954.
- 3) ピーター・K・ディッケン, ピーター・E・ロイド: 立地と空間上, 古今書院, 第3版,2004.
- 4) P. Krugman *Increasing Returns and Economic Geography*, Journal of Political Economy 99,483-499,1991
- 5) K. Ikeda, K. Murota: *Bifurcation Theory for Hexagonal Agglomeration in Economic Geography*, Springer-Verlag,Tokyo,2014.
- 6) 恩田 幹久, 木暮 洋介, 池田 清宏, 高山 雄貴, 大澤 実: 都市分布の群論的スペクトル解析法, 土木学会論文集 D3,Vol.73,No.3,pp.148-164,2017
- 7) K. Ikeda, K. Murota: *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials*, Springer-Verlag,pp.51-52,2010.

(2018. 4. 27 受付)