正三角形格子上で発現する自明解とその安定性の解明

木暮 洋介[1]・池田 清宏[2]・恩田 幹久[3]・相澤 大輝[4]

[1]学生会員 東北大学 大学院工学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6）
E-mail: yosuke.kogure.t2@dc.tohoku.ac.jp
[2]フェロー会員 東北大学教授 大学院工学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6）
E-mail: kiyohiro.ikeda.b4@tohoku.ac.jp
[3]学生会員 東北大学 大学院工学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6）
E-mail: mikihisa.onda.p8@dc.tohoku.ac.jp
[4]学生非会員 東北大学 大学院工学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6）
E-mail: hiroki.aizawa.p3@tohoku.ac.jp

空間経済モデルの分析においては，パラメータの変化による均衡解の複雑な分岐現象が不可避的に発生するため，安定な均衡解を完全に網羅することは事実上困難である．この複雑な分岐挙動を体系的に把握するための方法論として，本論文では，パラメータに依存することなく対称性を保存する自明解の存在に着目した．自明解は，モデルの支配方程式が有する対称性を記述する群を用いて，理論的に予測することが可能である．本論文では，周期境界を有する正三角形格子を空間経済モデルに適用し，この経済空間において発現する自明解の一般的特性の解明を試みた．具体的には，格子サイズ（立地点数）が比較的小さい場合に発現する自明解の網羅的な特定と分類を行った．

Key Words: *hexagonal lattice, trivial solution, group theory, bifurcation*

1. はじめに

(1) 背景

中心地理論[1)]やその応用研究[2)]，そして，多くの実証研究[3),4)]から，経済集積の空間的配置には規則性があることが示唆されている．土木計画学分野においては，大規模交通インフラ整備等，経済効果に地域的な偏在を伴う土木計画を合理的に評価したいという背景から，そうした経済集積の空間的パターンを理論的に把握することが重要な課題となっている．

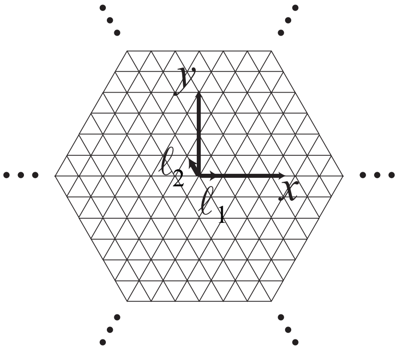
経済集積を扱う理論として，新経済地理学（NEG）分野において，Dixit and Stiglitz 型の独占的競争に基づく一般均衡の枠組みによって経済集積を説明可能な，種々の NEG モデル[5),6),7)]が構築されている．二次元経済空間における NEG モデルの分析を通した，経済集積の空間的パターンの解明への期待が高まっている．

(2) 本研究の位置づけ

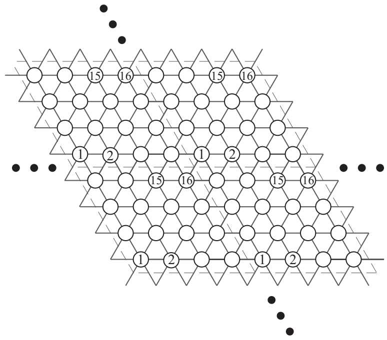
土木計画学分野への応用上，多様な経済集積を観察することが重要となる．そのためには，現実的な多数の都市を扱った，多都市 NEG モデルの分析を行う必要がある．しかし，既往研究の多くは，空間の退化した 2 都市 NEG モデルに依存している．その最大の原因は，分岐現象が発生することである．分岐現象とは，モデルの構造パラメータが変化することによって，均衡解の安定性と個数が変化する現象である．多都市 NEG モデルは極めて複雑な分岐挙動を示すため，事実上，解析的な分析を行うことができない．これに対し，いくつかの既往研究[8),9),10)]では，多都市 NEG モデルの分析を数値計算により行っている．しかし，そこでは多くの試行錯誤を伴い，断片的に均衡解を示すに留まっている．

以上の状況を踏まえると，分岐現象に左右されないアプローチによって，多都市 NEG モデルの分析を行う必要がある．そこで本論文では,「既往研究で示されている安定な均衡解の大半は，構造パラメータが変化してもその幾何学的パターンを保つ自明解である.」という知見に着目する．自明解は，モデルの複雑な分岐挙動の追跡を介さずとも，パターンの幾何学的分析によって特定することが理論上可能である．そのためこの知見は，未だ広く理解されていないものの，モデルの均衡解を合理的・体系的に発見する上で画期的なものである．

本論文では，正三角形格子[11)]を適用した多都市 NEG モデルにおける自明解を網羅的に特定し，既往研究で明らかにされていなかった多様な集積パターンを示す．なお，本論文の構成は，以下のとおりである．第 2 章では，正三角形格子を定式化する．第 3 章では，空間



図–1 無限格子



図–2 周期境界を有する $n \times n$ 有限格子 ($n = 4$ の場合)

経済モデル（多都市 NEG モデル）を定式化する．第 4 章では，正三角形格子を適用した空間経済モデルにおける，自明解の特定と考察を行う．第 5 章では，結論と今後の課題を述べる．

2. 正三角形格子の設定

(1) 無限格子

図–1 に示すような格子から構成された無限空間を考え，基底ベクトルを次のように定義する．

$$\boldsymbol{\ell}_1 = d(1, 0)^\top \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\ell}_2 = d(-1/2, \sqrt{3}/2)^\top \tag{2}$$

ここで，$d > 0$ は基底ベクトルの長さを表す．これより，無限格子 $\mathcal{H}$ を以下のように定義する．

$$\mathcal{H} = \{n_1\boldsymbol{\ell}_1 + n_2\boldsymbol{\ell}_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \tag{3}$$

ここで，$\mathbb{Z}$ は整数からなる集合である．

(2) 周期境界を有する有限格子

無限格子 $\mathcal{H}$ の部分集合として，n^2 個の節点を持つ $n \times n$ 有限格子 $\mathcal{H}_n$ を以下のように定義する．

$$\mathcal{H}_n = \{n_1\boldsymbol{\ell}_1 + n_2\boldsymbol{\ell}_2 \mid n_i \in \mathbb{Z},\ 0 \le n_i \le n-1\ (i = 1, 2)\} \tag{4}$$

また，$\mathcal{H}_n$ に対し，2 次元の周期境界を与える．具体的には，$\mathcal{H}$ 上の任意点 $n_1\boldsymbol{\ell}_1 + n_2\boldsymbol{\ell}_2$ が，

$$n_1' \equiv n_1 \bmod n,\ n_2' \equiv n_2 \bmod n \tag{5}$$

という関係によって与えられる $\mathcal{H}_n$ 上の点 $n_1'\boldsymbol{\ell}_1 + n_2'\boldsymbol{\ell}_2$ に等しいと仮定する．**図–2** に示すように，$\mathcal{H}_n$ を周期的に拡張したものとして，$\mathcal{H}$ を疑似的に表現する．

(3) 格子の群対称性

有限格子の対称性は，回転や鏡映，並進などの変換を元とする群に対する不変性により，以下のように記述される．

$$G = \mathrm{D}_6 \ltimes (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) = \langle r, s, p_1, p_2 \rangle \tag{6}$$

ここで，正六角形の対称性を表す D_6 は 6 次二面体群，並進対称性を表す $\mathbb{Z}_n$ は n 次巡回群であり，$\ltimes$ は半直積を表す．また，r は $\pi/3$ の時計回りの回転変換，s は x 軸に関する鏡映変換，p_1 および p_2 は $\boldsymbol{\ell}_1$ および $\boldsymbol{\ell}_2$ 軸に沿う並進変換である．

3. 空間経済モデルの設定

(1) 空間経済モデル

K 個の都市が存在する都市経済システムを考え，効用関数 $\boldsymbol{v}\colon \Delta \to \mathbb{R}^K$ を定義する．ここで，$\Delta = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_K) \in \mathbb{R}_+^K \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$ は $K-1$ 次元の単体であり，λ_i は都市 i に立地する労働者の人口を表す．Δ が決定することにより，各都市の間接効用 v_i が決定する．均衡条件は，λ_i および v_i を用いて，以下のように定義できる．

$$\begin{cases} v^* - v_i(\boldsymbol{\lambda}) = 0 & \text{if} \quad \lambda_i > 0 \\ v^* - v_i(\boldsymbol{\lambda}) \ge 0 & \text{if} \quad \lambda_i = 0 \end{cases} \tag{7}$$

ここで，v^* は均衡効用水準である．

(2) Replicator dynamics

Sandholm (2010) [12] により，均衡条件 (7) を満たす均衡解を決定する問題は，replicator dynamics

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\lambda}, \tau) \tag{8}$$

の停留点を決定する問題に変換できる．ここで，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\lambda}, \tau) = (F_i(\boldsymbol{\lambda}, \tau) \mid i = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

$$F_i(\boldsymbol{\lambda}, \tau) = (v_i(\boldsymbol{\lambda}, \tau) - \bar{v}(\boldsymbol{\lambda}, \tau))\lambda_i \tag{10}$$

である．また，

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

は平均効用である．

Replicator dynamics の停留点 $(\boldsymbol{\lambda}^*, \tau)$ は，以下の支配方程式を解くことで決定できる．

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\lambda}^*, \tau) = \boldsymbol{0} \tag{11}$$

ここで，Jacobi 行列

$$J(\boldsymbol{\lambda}^*, \tau) = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}^*, \tau)$$

を用いることにより，停留点の安定性を以下のように分類できる．

$$\begin{cases} \text{漸近安定：} & J \text{ の全ての固有値の実部が負} \\ \text{不安定：} & J \text{ の 1 つ以上の固有値の実部が正} \end{cases}$$

(3) 停留点の分類

Replicator dynamics の停留点 $(\boldsymbol{\lambda}^*, \tau)$ は，全ての都市の人口が正となる内点解と，一部の都市の人口が 0 となる端点解に分類される．このとき，一般性を損なうことなく，変数 $\boldsymbol{\lambda}^*$ を

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_+ \\ \boldsymbol{\lambda}_0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

に置き換える．ここで，$\boldsymbol{\lambda}_+ = \{\lambda_i > 0 \mid i = 1, \ldots, m\}$, $\boldsymbol{\lambda}_0 = \boldsymbol{0}$ であり，$\boldsymbol{\lambda}_0$ は内点解においては喪失する．

また停留点は，**自明解**と**非自明解**に分類される．停留点は支配方程式 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\lambda}, \tau) = \boldsymbol{0}$ を満たす解曲線 $(\boldsymbol{\lambda}(\tau), \tau)$ によって表されるが，$\boldsymbol{\lambda}(\tau) = \bar{\boldsymbol{\lambda}}$ となるものを自明解と呼び，そうでないものを非自明解と呼ぶ．ここで，$\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ は $\tau \in (0, \infty)$ に依らず一定値をとる空間パターンである．

4. 正三角形格子上で発現する自明解

(1) 理論的基礎

m 個の都市に一様に人口が集積した端点解

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_+ \\ \boldsymbol{\lambda}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}\boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{13}$$

に着目する．そして，以下に示す補題を利用し，正三角形格子上で発現する自明解を特定する．

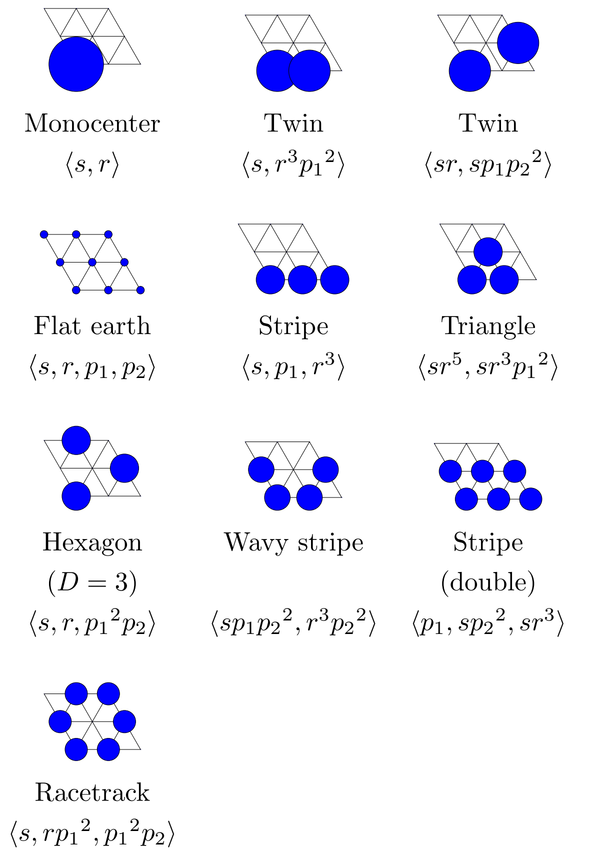
補題 1 m 個の都市に一様に人口が集積した端点解 (13) のうち，以下に示す 2 つの条件を満たすものが自明解となる．

条件 1： 式 (6) に示す G のある部分群 $\hat{G}$ の変換作用に対して，$\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ が不変となる．

条件 2： $\hat{G}$ の表現行列 $T_+(g)$ $(g \in \hat{G})$ によって，$\boldsymbol{\lambda}_+$ の任意の成分どうしを置換できる．

(2) 自明解の特定

本論文では，$n = 3$ 及び $n = 4$ の場合に発現する自明解を網羅的に特定した．その結果を**図–3** 及び**図–4** に示す．また，図中の各自明解の下部に，パターンの特徴を示す呼称と，パターン対称性を示す部分群 $\hat{G}$ の生成元を示す．



図–3 自明解 $(n = 3)$

(3) 考察

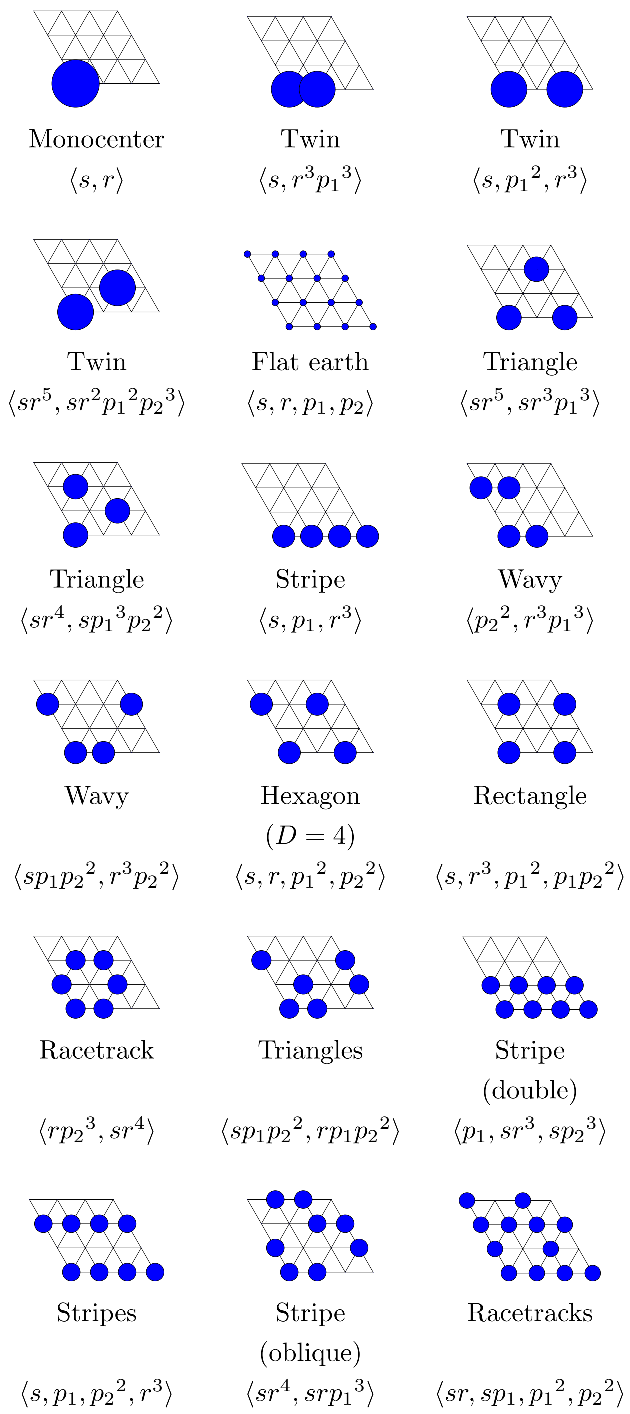
格子サイズ n に依らず発現したパターンは，

- 直線上に人口が並んだ Stripe パターン，及び Stripe（double）パターン
- 円周上に人口が並んだ Racetrack パターン

である．これらのパターンは任意の n において発現するものと考えられ，正三角形格子上で発現する自明解の一般的特性を示している．なお，Monocenter パターン・Twin パターン・Flat earth パターンに関しては，Ikeda et.al.[13] により，任意の n において自明解となることが証明されており，本論文の分析においても発現が確認できた．

中心地理論で予測されていた Hexagon パターンとして，$n = 3$ では $D = 3$ のパターン，$n = 4$ では $D = 4$ のパターンが自明解として発現している．このことは，格子サイズによって表現可能なパターンに違いがあることを如実に表しており，パターンの格子サイズ依存性を示している．

ここでは，自明解を網羅的に特定するというコンセプトのもとで，発現し得る全てのパターンを示した．しかし，これらの自明解の多くは，均衡解として存在はするものの実際には安定化せず，重要なものは一部に限られるものと予想される．



図–4 自明解 $(n = 4)$

5. 結論

本論文では，正三角形格子上で発現する自明解うち，格子サイズが小さい場合 ($n \leq 4$ の場合) に発現するものを網羅的に特定し，その幾何学的特性を明らかにした．本論文で得られた自明解に関する知見は，モデルに適用した経済空間である正三角形格子の対称性に着目することで得たものである．そのため，本論文の知見はモデルの子細に依らない一般的な結果を示しており，経済集積現象を把握するための有用な理論的基盤となる．今後は，格子サイズが大きい場合の自明解の特定を行っていく．本論文の結果からも分かるように，格子サイズの増加に伴い，発現する自明解の数が大きく増加している．そのため，格子サイズを更に増加させることで，より多様なパターンを観察することが可能となる．しかし一方で，パターンの対称性を記述する部分群が複雑化するため，分析が難化するという課題もある．また，特定した自明解の安定性の検証についても行う必要がある．

付録 I　端点解の安定性・持続性

支配方程式 (11) は，以下に示すように置き換えられる．

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{\lambda}_+, \boldsymbol{\lambda}_0, \tau) \\ \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{\lambda}_+, \boldsymbol{\lambda}_0, \tau) \end{bmatrix} \tag{I.1}$$

また，Jacobi 行列についても，以下のように書き換えられる．

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} J_+ & J_{+0} \\ O & J_0 \end{bmatrix}, \tag{I.2}$$

ここで，

$$\begin{aligned} J_+ =\ & \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\ \{\partial(v_i - \bar{v})/\partial\lambda_j\} \\ & i, j = 1, \ldots, m \\ J_{+0} =\ & \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\ \{\partial(v_i - \bar{v})/\partial\lambda_j\} \\ & i = 1, \ldots, m; j = m+1, \ldots, K \\ J_0 =\ & \mathrm{diag}(v_{m+1} - \bar{v}, \ldots, v_K - \bar{v}) \end{aligned}$$

である．

均衡解が安定となるための条件は，$\hat{J}$ の全ての固有値が負となることである．そして，それは以下に示すの 2 つの条件を満たすことと同値である．

$\boldsymbol{\lambda}_+$ の安定性条件： J_+ の全ての固有値が負
$\boldsymbol{\lambda}_0$ の存続性条件： J_0 の全ての対角成分が負

J の特異点は，J_+ が特異行列となる *break bifurcation point* [1] と，$v_i - \bar{v} = 0$ $(i = m+1, \ldots, n)$ となる *non-break point* に分類される．break point においては，対称性を喪失した分岐解が発生する．non-break point においては，$\boldsymbol{\lambda}_+$ の一部の成分が 0 に至る．

付録 II　補題 1 について

(1) 証明

$\boldsymbol{\lambda}_+$ の m 個の成分の各々が，表現行列 $T_+(g)$ $(g \in \hat{G})$ によって置換できることから，$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 1/m$, $v_1 = \cdots = v_m$ を得る．このとき，$\bar{v} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = v_i$

[1] 別種の特異点として，τ の極大・極小点も存在するが，本論文の議論においては重要な役割を果たさない．

となり，$v_i - \bar{v} = 0\ (i = 1, \ldots, m)$ を得る．これにより，$\boldsymbol{F}_+(\frac{1}{m}\mathbf{1}, \mathbf{0}, \tau) = \mathbf{0}$ が満たされる．また，$n-m$ 個の成分が 0 であることから，$\lambda_j = 0\ (i = m+1, \ldots, n)$ を得て，$\boldsymbol{F}_0(\frac{1}{m}\mathbf{1}, \mathbf{0}, \tau) = \mathbf{0}$ が満たされる．これは，$(\boldsymbol{\lambda}_+, \boldsymbol{\lambda}_0, \tau) = (\frac{1}{m}\mathbf{1}, \mathbf{0}, \tau)$ が自明解であることを示している．

(2) 補足

この補題のもと，支配方程式 (I.1) は以下の対称性条件式を満たす．

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{\lambda}_+, \boldsymbol{\lambda}_0, \tau) = \boldsymbol{F}_+(T_+(g)\boldsymbol{\lambda}_+, \boldsymbol{\lambda}_0, \tau), \\ &T_+(g)J_+ = J_+T_+(g),\ g \in \hat{G} \end{aligned} \tag{II.1}$$

参考文献

1) Christaller, W. : *Die zentralen Orte in Süddeutschland,* Gustav Fischer, Jena, 1933. English translation: *Central Places in Southern Germany,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966.
2) Lösch, A. : *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft,* Gustav Fischer, Jena, 1940. English translation: *The Economics of Location,* Yale University Press, New Haven, 1954.
3) Ikeda, K., Murota, K., Takayama, Y. and Kamei, M. : Hexagonal distributions of cities in Southern Germany and Eastern USA: Group-theoretic spectrum analysis *MPRA Paper*, University Library of Munich, Germany, pp.1–63, 2017.
4) 恩田幹久, 木暮洋介, 池田清宏, 高山雄貴, 大澤実：都市分布の群論的スペクトル解析法, 土木学会論文集 D3（土木計画学）, Vol.73, No.3, pp. 148–164, 2017.
5) Krugman, P. : Increasing returns and economic geography, *Journal of Political Economy*, Vol. 99, pp. 483–499, 1991.
6) Forslid, R. and Ottaviano, G. I. P. : An analytically solvable core-periphery model, *Journal of Economic Geography*, Vol. 3, pp. 229–340, 2003.
7) Pflüger, M. : A Simple Analytically Solvable, Chamberlinian Agglomeration Model, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.34, pp.565–573, 2004.
8) Ikeda, K., Murota, K. and Akamatsu, T. : Self-organization of Lösch's hexagons in economic agglomeration for core-periphery models, *International Journal or Bifurcation and Chaos* Vol.22, No.8, pp.1230026-1-1230026-29, 2012.
9) Ikeda, K., Murota, K., Akamatsu, T., Kono, T. and Takayama Y. : Self-organization of hexagonal agglomeration patterns in new economic geography models, *Journal of Economic Behavior & Organization* Vol.99, pp.32-52, 2014.
10) Ikeda, K., Murota, K. and Takayama, Y. : Stable economic agglomeration patterns in two dimensions: beyond the scope of central place theory, *Journal of Regional Science*, Vol.57, pp.132-172, 2017.
11) Ikeda, K. and Murota,K. : *Bifurcation Theory for Hexagonal Agglomeration in Economic Geography*, Springer-Verlag, Tokyo, 2014.
12) Sandholm, W. H. : *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, 2010.
13) Ikeda, K., Onda, M., Takayama, Y. : Bifurcation theory of a square lattice economy: Racetrack economy analogy in an economic geography model, *MPRA Paper*, University Library of Munich, Germany, pp.1–56, 2017.

(2018．4．27 受付)

STUDY OF TRIVIAL SOLUTIONS ON A HEXAGONAL LATTICE ECONOMY AND THEIR STABILITY

Yosuke KOGURE, Kiyohiro IKEDA, Mikihisa ONDA and Hiroki AIZAWA