第 56 回土木計画学研究発表会・講演集

集積経済モデルの数理解析とその周辺

大澤　実 [1]

[1]正会員　東北大学助教　大学院工学研究科　土木工学専攻（〒 980–8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6–6–06）
E-mail: minoru.osawa.a5@tohoku.ac.jp

空間経済学分野をはじめとする関連諸分野において，内生的な集積メカニズムを考慮した様々な立地均衡モデルが考案されてきた．これらのモデル，特に一般均衡状態を表現可能なモデルは，原理的には社会基盤整備等の都市・地域政策がもたらす長期的経済効果の予測および評価へと援用しうるポテンシャルを秘める一方で，工学的応用を見据えた場合には十分な体系化が為されているとは言い難かった．本稿では，筆者らが行ってきた立地均衡モデルの数理解析と，それに基づくモデルの系統的分類について可能な限り自己完結的に紹介する．また，現在みられるこうしたモデルの計量的展開に関して，モデルの数理的特性の観点から考察を加える．

Key Words: *equilibrium, stability, agglomeration, quantitative spatial economics*

1.　はじめに

交通網を始めとする社会基盤の空間的配置やこれに依存する生産者・消費者・公的機関の行動の空間的相互依存関係は，人口・経済活動等の複雑かつ多様な空間的集積および分散現象を惹起する．これを理解・表現し，合理的な地域・都市政策案の経済評価を可能とする理論的枠組み・モデルを整備することは，土木計画学分野における重要な課題の一つである．この背景のもと，完全競争の枠組みに依拠する空間応用一般均衡モデルや応用都市経済モデルに関する多くの研究蓄積が存在する．特に，我が国は 2000 年代後半より人口減少社会に突入し，地方の衰退も以前にまして深刻な社会問題となりつつある．このような状況下にある我が国にとって，地域・都市政策案の社会経済評価を合理的に行う重要性はいや増している．政策的意思決定の判断材料として，完全競争に基づく既存の方法論の更なる精緻化および普及の重要性は疑うべくもない．

一方で，人口および経済活動の空間的な集積および分散が内生的に生ずるメカニズムを理解するためには，集積によってもたらされる集計的な規模の経済，**集積の経済**を考慮した立地均衡の分析が重要である．例えば，人口集積が企業集積を呼び込み，この企業集積が更なる人口集積を誘導するという循環的な相互作用がそれである[1]．土木計画学分野では，例えば小林[53]や上田・松葉[54]などの立地均衡モデルに関する理論研究がこうした問題意識に基づくものであろう．政策案の長期的評価のためには，完全競争の枠組みでは計測不可能な便益を表現するために，不完全競争や収穫逓増といった集積の経済の源泉となりえる条件を考慮した分析が必要であることも，かねてより指摘されているところである（e.g., Harris,[17] Bröcker & Mercenier[8]）．

経済学分野では，空間を強調した経済理論は空間経済学と総称される．集積の経済を導入した空間経済学理論で特に注目すべきものとしては，Krugman[24] を嚆矢とする**新経済地理学** (New Economic Geography; NEG) がある．NEG 分野で提案されてきた一群の立地均衡モデルは，集積の経済を表現しつつも，一般均衡状態を表現しうるものであり，強固なミクロ経済学的整合性をもっている．また，生産要素の空間的移動を考慮可能であり，土木計画分野で求められる都市・地域政策の長期的影響評価に応用可能な枠組みを提供している．実際，近年では久武・山崎[48]，石倉[60]，高山他[51),52]に代表されるような，集積の経済を考慮した空間応用一般均衡分析がなされるようになっている．

地域科学・工学分野一般とは趣を異にし，空間応用一般均衡分析が興味の対象となってこなかった経済学分野においても，近年では集積の経済を考慮した一般均衡型の立地均衡モデルの計量化が国際貿易に背景をもつ人々によって盛んに行われている．ひとつには，空間的に詳細なデータが利用可能になったことおよび計算機能力の飛躍的向上という研究環境上の必要条件があり，もうひとつには，その黎明期を除き解析可能性の観点から 2 立地点空間に過剰に依存してきた NEG および関連分野における理論研究に対する揺り戻しがある．例えば Redding & Sturm[42] や Allen & Arkolakis[4] の研究を契機とする**定量的空間経済学** (Quantitative Spatial Economics; QSE) と呼ばれる潮流がみられ（Redding & Rossi-Hansberg[41]），NEG 以降の空間経済学の知見が

[1] 集積の経済，および関連する理論モデルの整理については藤田・ティス[63]を参照されたい．

鳴り物入りで計量分析へ導入されつつある状況にある．

土木計画学分野の研究者は，特に経済学分野における近年の QSE の流れ，およびそこから得られつつある学術的知見を，政策立案上参考にすべき研究成果として諸手を挙げて歓迎するべきであろうか？ 本小論では，必ずしもそうとは言えず，慎重な検討が必要であるということを論ずる．

読者は，「任意の研究成果は批判的精神でもって検討されるべきものであるから，上記主張は恒真である」と思われるかもしれない．もちろん，集積の経済を考慮した立地均衡モデルによる計量分析という固有の文脈においてこの主張に何がしかの説得力を持たせるためには，前提的議論が必要である．ここでは，特に理論モデルの数理解析を通じて見えてくる風景を紹介するとともに，その立場から上記の見解に到達することを試みたい．以下，最低限度以上の前提知識なしに筆者の言わんとする意図を理解可能なように，迂遠さを厭わずなるべく自己完結的に，できれば興味を持って頂けるように，整理する．本稿の構成は以下の通りである．

1. はじめに **1**

2. 基本型の集積経済モデルとその類型化 **2**
(1) 基本型の集積経済モデル 2
(2) 競技場経済とその特長 3
(3) 分散均衡解の安定性 4
(4) 集積経済モデルの類型化 5

3. 複数主体モデルへの展開 **8**
(1) 確率安定性概念に基づく大域安定性解析 8
(2) 基本型の集積経済モデルの解析 10
(3) 複数主体モデルの解析 11

4. モデルの数理解析がもたらす視点 **13**
(1) QSE の掲げる目的と基本的アプローチ 13
(2) モデル・クラスの限定がもたらす含意 . 14

5. おわりに **15**

2. 基本型の集積経済モデルとその類型化

以下，集積の経済を考慮した立地均衡モデルを総称して**集積経済モデル**と呼ぼう．集積経済モデルは，モデルの外生変数の如何によって，一般には**複数均衡**を持ち，また外生変数の変化に伴って均衡パターンが不連続的に変化し得る．特に NEG 分野では，地域間輸送費用の低下に伴う内生的な集積形成を表現しうる点が注目された．本章では，集積経済モデルのうち最も単純かつ標準的なクラスのモデルを問題とし，その数理解析および類型化について議論する[2]．

[2] 本章の内容は，方法論については赤松他[56] および Akamatsu et al.[3] に，モデルの類型化については大澤他[59]，Osawa et al.[33]，大澤・赤松[58]，Akamatsu et al.[2] に基づくものである．方法論に焦点を当てた概説は，高山[49] も参照されたい．

(1) 基本型の集積経済モデル

この論文で扱う立地均衡モデルは，ゾーン・地域・国家等，何らかの離散化された空間単位（立地点）の集合を前提として構築される．以下では，最も基本的な形の離散空間の集積経済モデルを定義する．本節で定義するモデルを**基本型の集積経済モデル**と呼ぼう．

離散的な立地点の総数を n とする．また，立地点の集合を $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ で表現する．本章および次章では，経済には企業或いは労働者など単一種類の移動主体が存在し，それぞれの主体が唯一の立地点を選択することができると仮定する．立地点 i に立地する主体の数を連続値 $x_i \geq 0$ によって表現する．外部への，または外部からの移住のない閉鎖経済を仮定する．一般性を失うことなく主体数を 1 に正規化すると，主体数の保存は $\sum_{i\in\mathcal{N}} x_i = 1$ と表現される．以降ではこれを満足する人口分布 $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in\mathcal{N}}$ の集合を $\mathcal{X} \equiv \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{1} = 1\}$ で表現する．ここに $\boldsymbol{1}$ は全要素が 1 の適切な次元のベクトルである．

人口分布 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ を所与とした場合に各立地点において行動主体が得る利得，つまり効用または利潤 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = (v_i(\boldsymbol{x}))_{i\in\mathcal{N}}$ を定義し，個々の移動主体が利得を最大化している，換言すれば立地選択を変更する誘引をもたない，静学的な均衡状態を考えるのが最も基本的なタイプの集積経済モデルである．即ち，利得関数 $\boldsymbol{v} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ を与件として，以下の**変分不等式**

$$\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \rangle \leq 0 \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \tag{1}$$

を満足する状態 $\boldsymbol{x}^*$ が，集積経済モデルの均衡解である．以下では，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ は必要な回数だけ微分可能であるとする．この問題は静学的ではあるが，例えば Beckmann 型の交通ネットワーク均衡モデル[6] とは異なり，利得関数 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ は必ずしも単調ではない．従って，均衡解は一意とは限らない．また，一般には $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ は積分不可能であり，最適化問題に変換できない．

利得関数 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ の関数として陽に指定してもよいが，NEG のモデルなど応用上興味のあるような一般均衡型モデルでは，人口分布を固定した条件下における移動主体の間接効用関数がこれに該当する．この場合，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ は例えば消費者の効用最大化・企業の利潤最大化・財市場の清算・労働市場の清算を考慮した一般均衡の結果であるから，陽に得られるとは限らない．また，モデルの出力には人口分布 $\boldsymbol{x}^*$ および利得水準 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*)$ のみならず財価格・賃金なども含まれることに注意する．

典型的な単一主体の集積経済モデルにおいては，地点 ij 間の空間的な相互作用の強度は，外生的な定数 $d_{ij}(\phi) \in (0, 1)$ に依存すると仮定される．なお，$\phi \in (0, 1)$ は輸送技術の水準を表現する，モデルの**構造パラメタ**である．ϕ が小さいほど輸送技術が低く交通費

用が高い状況を，ϕ が大きいほど輸送技術が高く交通費用が低い状況を表現する．この定数をまとめた行列 $\boldsymbol{D}(\phi) \equiv [d_{ij}(\phi)]$ を赤松他 [56] に倣って**空間割引行列**と呼ぼう．すると，利得関数 $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{D}(\phi)$ をパラメタとして含むことになる．

輸送技術の水準 ϕ，即ち地点間の空間的相互作用のしやすさの水準が変化することによって，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ の性質，ひいては解の性質が不連続的に変化し得るのが集積経済モデルの特徴である[3]．具体的には，均衡解の数および安定性がパラメタ依存的に変化する現象が生ずる．これは**解の分岐**と呼ばれる現象である．例えば，Krugman[25] においては，2 地域間の輸送費用が低下するのに伴って，均等に労働者が分布する均衡が一意である状態から，1 地域への集積を含む 3 通りの均衡解が存在する状態へとモデルの構造が変化する．

複数均衡を持ち得るモデルにおいては，行動主体が合理的ならば実現不可能と考えられる均衡も存在し得るため，それらを排除する手続きを踏む必要がある．これを**均衡選択**と呼ぶ．この方法の一つとして，利得 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ に依存して行動論的に尤もらしい方向へと人口分布を調整する何らかの微分方程式，即ち**調整動学** $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (F_i(\boldsymbol{x}))_{i\in\mathcal{N}}$ を導入し，$\boldsymbol{F}$ のもとで人口分布に対する微小な摂動 $\boldsymbol{x}^* \mapsto \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{\epsilon}$ に対して頑健な解，即ち**局所安定解**を興味の対象とするのが通例である．

均衡の局所安定性の変化と分岐挙動を具体的に調べるためには，$\boldsymbol{x}$ の調整動学のクラスを特定するのが便利である．本章では，調整動学 $\boldsymbol{F}$ は (i) 総人口 1 を保存し，(ii) 必要なだけ微分可能であり，(iii) 変分不等式 (1) の解 $\boldsymbol{x}^*$ において $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ を満足し，また (iv) 利得と整合的な方向に調整が生ずる[4]，と仮定する．これらを満足する調整動学の例には，数理生態学分野において導入されたレプリケータ・ダイナミクスがある：

$$\dot{x}_i = F_i(\boldsymbol{x}) = x_i\big(v_i(\boldsymbol{x}) - \bar{v}(\boldsymbol{x})\big) \qquad \forall i \in \mathcal{N}. \tag{2}$$

なお $\bar{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i\in\mathcal{N}} x_i v_i(\boldsymbol{x})$ は状態 $\boldsymbol{x}$ における平均利得．

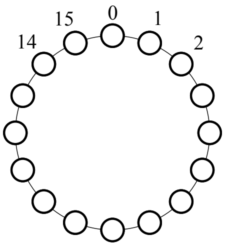
調整動学 $\boldsymbol{F}$ を導入し，輸送技術パラメタ ϕ を明示的に書けば，我々が興味のある問題は，支配方程式

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \phi) = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

の局所安定解 $\boldsymbol{x}^*$ の ϕ に関する挙動である．

(2) 競技場経済とその特長

構造パラメタ ϕ の変化に伴う支配方程式 (2) の解の分岐挙動は，仮定する地理空間の構造，即ち空間割引行列 $\boldsymbol{D}(\phi)$ の構造によっては，解析的に調べることは困難になる．従って，解析的な結果を導くためには，分析上の興味を損わない範囲で限定する必要がある．特に経済学分野の理論研究では，なぜ空間的な集積が生ずるのかという点に興味が集中し，2 立地点のみが存在する地理空間がひろく用いられてきた現状がある．



図–1: 競技場経済 ($n = 16$)

一方，土木計画学分野の興味は経済学分野とは対照的に，どのような集積が生ずるかに興味がある．基幹的な交通プロジェクトは一般にその効果が地域的に偏在し，効果の空間的帰着を合理的な方法で把握したい需要があるからである．そのためには，2 立地点経済における理論解析では不十分である．より非集計化された多立地点の地理空間において分析しなければならない．

この問題意識に応え得る地理空間の一つとして，以下この論文を通じて，**競技場経済**と呼ばれる地理空間上において分析を展開する．競技場経済の例を**図–1** に示す．図中小さな白丸は立地点を表現し，その間の実線は交通リンクを表現する．全ての立地点は，単位円周上に等間隔に配置されており，番号が順に割り振られている．輸送は交通リンクを通じてのみ可能であるとし，空間割引行列の要素は，円周上における地点 ij 間の最短経路距離を ℓ_{ij} として[5]，$d_{ij}(\phi) = \phi^{\ell_{ij}}$ と定義する．これと併せて，例えば各立地点における土地面積などのモデル上で外生変数とされる変数について，立地点間の異質性は存在しないとする．

競技場経済は，以下に述べる 3 つの理由から，支配方程式の局所安定解の分岐特性，或いは集積経済モデルの数理特性を調べるための理想的環境である．

第一に，地理的異質性を捨象した，モデル内の純粋に経済的な空間的相互作用のみがもたらす結果を調べることができる．競技場経済においては，全ての立地点が他の立地点に対して地理的に対等であり，集積が生ずるとすれば人口の集中が何らかの内生的・循環的な正の効果をもたらした場合のみである．地理的異質性の捨象は，集積経済モデル固有の性質を分析する上で最重要である．なぜならば，地理空間そのものの異質性がもたらす経済活動の空間的集中は，集積の経済を考慮せずとも表現可能であり，むしろ Matsuyama[27]

[3] 問題の性質は実際にはその他様々なモデルの構造パラメタに依存し得る．ここでは交通インフラ整備政策等がモデル上もたらす結果に注目するため，また NEG 分野における多くの既往理論研究との整合性のため，輸送技術パラメタ ϕ のみに注目する．

[4] 正確には，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\rangle > 0 \; \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$．この条件は集団ゲームの文脈では positive correlation と呼ばれる [44]．

[5] 具体的には，$\ell_{ij} = \min\{K^{-1}|i-j|, 1 - K^{-1}|i-j|\}$.

にみられるように集積の経済が存在しないモデルを用いて分析すべきだからである．

第二に，モデルの解析的な取り扱いが容易になる．競技場経済において存在し得る均衡解は，支配方程式のもつ対称性によって大域的に特徴付けられる [20),61)]．また，均衡解の局所安定性と分岐挙動を調べる上で必要となる均衡解における $\boldsymbol{F}$ の Jacobi 行列の固有値解析も，均衡解がもつ対称性および空間割引行列 $\boldsymbol{D}(\phi)$ が**巡回対称行列**であるという事実によって，解析的に実行可能となる [2),3),56)]．加えて，$n = 2$ とすれば，多くの理論研究が採用している 2 地点空間を特殊例として包含するという意味で，自然な一般化となっている．

第三に，以上のような利点にも関わらず，この地理空間は現実の多立地点空間経済が持つ重要な特性である立地点間距離の多様性を有している．従って，立地主体にとって空間上の相対的位置が重要となる．また，2 立地点経済では空間的集積の程度のみしか表現できないのに対して，競技場経済においては集積の形状を議論可能である．これらの特性は，多立地点空間を対象とした既往研究でみられる 2 立地点モデルのもう一つの一般化手法である等間隔 n 立地点経済（$d_{ii} = 1$, $d_{ij} = \phi\ \forall i \neq j$）にはない優れた特性である．

(3) 分散均衡解の安定性

集積経済モデルの分析における常套手段は，なんら集積の存在しない**分散状態**が局所安定である状態から始め，$\bar{\boldsymbol{x}}$ の不安定化による集積形成を調べることである．前節で導入した，立地点間の異質性を排除した競技場経済において，立地主体が空間的に一様に分布した完全分散状態 $\bar{\boldsymbol{x}} \equiv (1/n)\boldsymbol{1} = [1/n, 1/n, \ldots, 1/n]^\top$ が均衡解であるのは明らかであろう．分散状態が不安定であるならば，それは即ち何らかの集積の形成を意味し [36)]，特に 2 立地点モデルでは一方の立地点への集積を意味する．では，そもそも分散状態 $\bar{\boldsymbol{x}}$ の安定性を如何に調べればよいであろうか？ また，$\bar{\boldsymbol{x}}$ が不安定化した場合には何が生ずるであろうか？

この問いに答えるのが**線形安定性解析**である．一般に，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*, \phi) = \boldsymbol{0}$ なる解 $\boldsymbol{x}^*$ を考え，この点における $\boldsymbol{F}$ の Jacobi 行列 $\boldsymbol{J}(\phi) \equiv \nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*, \phi)$ を考える．全ての $\boldsymbol{J}(\phi)$ の固有値 $\boldsymbol{\lambda}(\phi) \equiv \{\lambda_k(\phi)\}_{k\in\mathcal{N}}$ について，全てが実数であり，かつ非零であるとしよう．このとき，(a) 全ての固有値が負であれば $\boldsymbol{x}^*$ は安定であり，(b) 正の固有値が存在するならば $\boldsymbol{x}^*$ は不安定であることが知られている．人口分布の摂動 $\boldsymbol{\epsilon}$ の発展は $\boldsymbol{x}^*$ の近傍では $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{J}(\phi)\boldsymbol{\epsilon}$ なる線形微分方程式に従うと見做せることから直感的には明らかであろう．なお，競技場経済における分散状態 $\bar{\boldsymbol{x}}$ では，$\boldsymbol{J}$ は実対称行列であり，固有値・固有ベクトルは実数であることに注意する．

安定な均衡解からの分岐による空間的集積パターンの形成は，固有値の符号の変化によって検出可能である．即ち，全ての固有値 $\boldsymbol{\lambda}(\phi)$ が負である状態から，パラメタ ϕ の変化に伴ってある特定の固有値 $\lambda_k(\phi)$ が正となった場合，対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\eta}_k = (\eta_{ki})_{i\in\mathcal{N}}$ 方向へと空間パターンが変化する．同様に，複数の固有値が同時に正となった場合には，対応する固有ベクトルたちの線形結合の方向へと変化する[6]．このような分岐挙動を，あくまで特定の均衡解に着目した局所的な分岐という意味で，**局所的分岐**と呼ぶ．

一般の地理空間では，線形安定性解析に基づく局所的分岐挙動の分析を解析的に実行するのは困難であり，数値計算に頼る必要がある．しかし，競技場経済における基本形の集積経済モデルの均衡解，特に分散状態 $\bar{\boldsymbol{x}}$ においては，解析的分析が容易となる．

利得関数の分散状態 $\bar{\boldsymbol{x}}$ における Jacobi 行列を $\boldsymbol{V}(\phi) \equiv \nabla \boldsymbol{v}(\bar{\boldsymbol{x}}, \phi)$ とし，$\boldsymbol{D}(\phi)$ を行和で正規化した行列を $\bar{\boldsymbol{D}}(\phi)$ とする．また，$\lambda_k(\phi)$, $\omega_k(\phi)$, $\mu_k(\phi)$ をそれぞれ $\boldsymbol{J}(\phi)$, $\boldsymbol{V}(\phi)$, $\bar{\boldsymbol{D}}(\phi)$ の第 k 固有値としよう．

競技場経済においては，まず $\{\mu_k(\phi)\}_{k\in\mathcal{N}}$ を解析的に計算できる．更に，あるモデル固有の関数 $G(\mu)$ が存在して $\lambda_k(\phi)$, $\omega_k(\phi)$, $\mu_k(\phi)$ は

$$\mathrm{sgn}[\lambda_k(\phi)] = \mathrm{sgn}[\omega_k(\phi)] \qquad k \in \mathcal{N} \setminus \{0\} \tag{4}$$

$$\mathrm{sgn}[\omega_k(\phi)] = \mathrm{sgn}[G(\mu_k(\phi))] \qquad k \in \mathcal{N} \tag{5}$$

を満足する[7]．なお，全ての $k \geq 1$ について $\mu_k(\phi) \in (0, 1)$ かつ $\mathrm{d}\mu_k(\phi)/\mathrm{d}\phi < 0$ が成立する．また，各第 k 固有値に対応する固有ベクトルも陽に与えられる．特に，$\boldsymbol{J}(\phi)$, $\boldsymbol{V}(\phi)$, $\bar{\boldsymbol{D}}(\phi)$ が全て巡回対称行列であることにより，固有ベクトルは全て共通である．なお，$\boldsymbol{J}(\phi)$ の第 0 固有値 $\lambda_0(\phi)$ は平均人口の増減を意味し，総人口一定を仮定する限りにおいて無視してよい．結果として，$G(\mu_k(\phi)) < 0$ が全ての $k \geq 1$ について成立するならば，$\bar{\boldsymbol{x}}$ は安定であることが理解できる．

式 (4) を眺めると，$\lambda_k(\phi)$ の符号は，人口分布が対応固有ベクトル $\boldsymbol{\eta}_k$ 方向へ変化した際に主体が被る利得の増減の如何に対応していることがわかる．具体的には，

$$\boldsymbol{v}(\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\eta}_k) - \boldsymbol{v}(\bar{\boldsymbol{x}}) \approx \boldsymbol{V}(\phi)\boldsymbol{\eta}_k = \omega_k(\phi)\boldsymbol{\eta}_k \tag{6}$$

であるから，もしも $\lambda_k(\phi) > 0$，即ち $\omega_k(\phi) > 0$ ならば，$\eta_{ki} > 0$ なる立地点 $i \in \mathcal{N}$，即ち主体数が増加した立地点においては利得が増加し，逆も真である．従ってこの場合には移住した主体は利得の増加を享受し，移住しなかった主体は移住しなかったという事実によって利得

[6] 分岐の説明としてこの内容は数学的には不正確であるが，基本型の集積経済モデルを考える限りにおいて以上の理解で十分である．分岐理論一般に関しては Hirsch & Smale [19)]，Kuznetsov [26)]，Guckenheimer & Homes [15)] などを参照されたい．

[7] 実際には $\omega_k(\phi)$ は $\mu_k(\phi)$ の関数として陽に書き下せる．ここでは関数 $G(\mu)$ に興味があるために符号条件のみで整理する．同様に $\lambda_k(\phi)$ も $\boldsymbol{F}$ を特定すれば $\omega_k(\phi)$ を用いて陽に書き下せる．

の減少を被る．このような場合，明らかに分散状態は不安定である．逆に，もし全ての k について $\lambda_k(\phi) < 0$ ならば以上の逆が成立し，分散状態は安定である．

即ち，$\boldsymbol{J}(\phi)$ の固有値 $\lambda_k(\phi)$ は，実質的には $\boldsymbol{V}(\phi)$ の固有値 $\omega_k(\phi)$ に対応しており，主体の利得の増減の如何を表現している．分散状態が安定である条件とは，人口分布が変化した際に移住者が損をするための条件に他ならず，その不安定化とは ϕ の変化に伴なって何れかの移住パターン $\boldsymbol{\eta}_k$ が移住者にとって利益をもたらす状態が訪れるということである．ここから，$\boldsymbol{V}(\phi)$ の固有値 $\omega_k(\phi)$ の符号を支配するモデル固有の関数 $G(\mu)$ の正体も見えてくる．

(4) 集積経済モデルの類型化

a) 自明な集積経済モデル

例として, 次の非常に簡単な利得の特定化を考えよう :

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}(\phi)\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \tag{7}$$

この利得関数は，近接する立地点に他の行動主体が存在するほど利得が高いという，Beckmann[5)] 型の立地外部性を表現しており，立地点間の距離構造 $\boldsymbol{D}(\phi)$ に依存する集積の経済のモデル化のうち，凡そ考え得る最も単純な形式のものである．

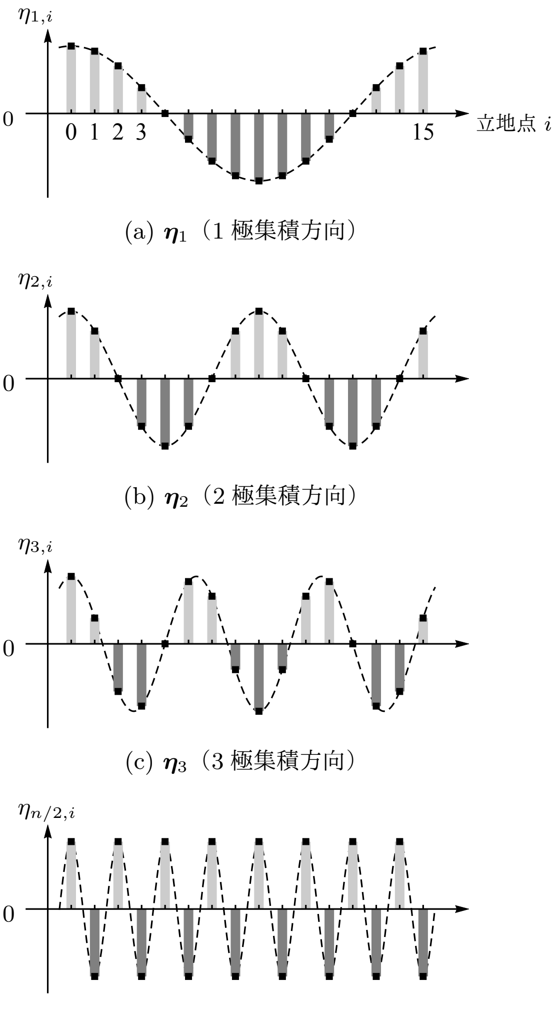
明らかに任意の人口分布 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ において利得関数の Jacobi 行列は $\boldsymbol{V}(\phi) = \boldsymbol{D}(\phi)$ であって，その固有値は

$$\omega_k(\phi) = d(\phi)\mu_k(\phi) \qquad \forall k \in \mathcal{N} \tag{8}$$

と導くことができる．但し，$d(\phi) > 0$ は $\boldsymbol{D}(\phi)$ の行和である[8]．全ての k について $\mu_k(\phi) > 0$ が従うので, $\omega_k(\phi)$ また $\lambda_k(\phi)$ も同様に正であり，分散状態は自明に不安定である．分散を安定化しうる効果が存在しないことから，この結果は直観的にも明らかであろう．

モデル (7) の場合，符号を支配しない $d(\phi)$ を除けば, $G(\mu) = \mu$ であることがわかる．この関数は，$\boldsymbol{V}(\phi)$ に距離行列 $\bar{\boldsymbol{D}}(\phi)$ に関して 1 次の正の項が存在するのに対応しており，式 (7) がモデル化する距離依存的な集積の経済を端的に反映している．

全ての固有値が正であることから，分散状態 $\bar{\boldsymbol{x}}$ を初期値とするならば空間分布は移住者が得られる効用増分が最大の方向, 即ち集積力 $\omega_k(\phi)$ が最大の方向へと引き寄せられる．従って，$\omega_k(\phi) = d(\phi)\mu_k(\phi)$ の大小関係に興味がある．いま $G(\mu) = \mu$ であることから，$\omega_k(\phi)$ の大小関係の問題は, 結局 $\mu_k(\phi)$ の大小関係を比較する問題へと帰着されたことに注意されたい．空間割引行列 $\bar{\boldsymbol{D}}(\phi)$ の固有値 $\mu_k(\phi)$ について，最大固有値は $\mu_1(\phi)$ であり，最小固有値は $\mu_{n/2}(\phi)$ である[9]．また，$\mu_k(\phi)$ は大雑把に言えば k に関して単調減少であることがいえる[10]．即ち $k = 1$ が最大の効用増分をもたらす．



(a) $\boldsymbol{\eta}_1$（1 極集積方向）

(b) $\boldsymbol{\eta}_2$（2 極集積方向）

(c) $\boldsymbol{\eta}_3$（3 極集積方向）

(d) $\boldsymbol{\eta}_{n/2}$（8 極集積方向）

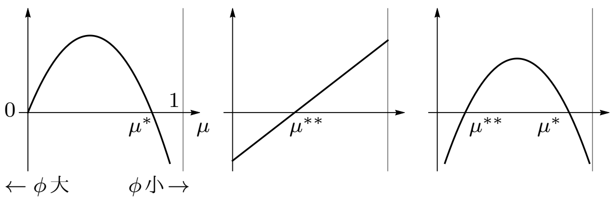
図–2: 固有ベクトル $\boldsymbol{\eta}_k$ ($n = 16$; $k = 1, 2, 3, n/2$)

この大小関係の意味は，固有ベクトル $\{\boldsymbol{\eta}_k\}_{k \in \mathcal{N}}$ が表現する集積の方向を見ることで理解可能である．**図–2** に，$n = 16$ の競技場経済の分散状態 $\bar{\boldsymbol{x}}$ における固有ベクトルの例として，$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_{n/2}$ を示す．うち最大の固有値に対応する $\boldsymbol{\eta}_1$ は，大域的な一極集積の形成を意味しているから，モデル (7) から生ずるのは一極集積パターンであることがわかる．また，$\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_{n/2}$ は多極集積の形成を表現しており，k は集積の極の数に対応している．従って，k が増加するにつれて利得増分 $\omega_k(\phi) = d(\phi)\mu_k(\phi)$ の値が減少するのは，k が増加するにつれて近接する行動主体が減少して集積の経済効果が減少することを反映しており，直観に一致する．特に，$\mu_{n/2}$ の最小性は，対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\eta}_{n/2}$ が最も一つ一つの集積の大きさが小さくなる方向に対応することから理解できる．

[8] $\boldsymbol{D}(\phi)$ は巡回行列であるので，行和は行に依存しない．

[9] 議論を簡単にするために，立地点数 n を 4 の倍数とする．

[10] 厳密には，$k > n/2$ については $\mu_k(\phi) = \mu_{n-k}(\phi)$ であり，かつ十分 n が大きいとき ϕ の広い範囲で $1 > \mu_1(\phi) > \mu_2(\phi) > \cdots > \mu_{n/2}(\phi) > 0$ である．



(a) クラス I　　(b) クラス II　　(c) クラス III

図–3: 各モデル・クラスに対応する $G(\mu)$ の例

なお，$k \geq 1$ について $\mu_k(\phi)$ は $(0, 1)$ に値をとる ϕ の単調減少関数であり，$\phi \to 0$ で $\mu_k(\phi) \to 1$ かつ $\phi \to 1$ で $\mu_k(\phi) \to 0$ である．これは，以上の解釈を勘案すれば，輸送技術が向上するにつれて立地点間の距離が重要でなくなる効果を反映するものである．

b) モデル固有の関数 $G(\mu)$ による類型化

モデル (7) に対応して $G(\mu) = \mu$ なる関数が導かれたことから，$\mu_k(\phi)$ の大小関係を介した議論によって，このモデルでは 1 極集積が形成されることが形式的に結論できた．実は，このような議論は，基本型の集積経済モデル一般に拡張される．各々のモデルに対してある固有の関数 $G(\mu)$ が計算でき，分散状態から形成される集積パターンを予測できる．

一般のモデルにおいて，関数 $G(\mu)$ はモデルの**集積力**と**分散力**の距離依存構造とその相対的トレードオフ関係を表現し，与えられたモデルの分散状態から如何なる空間分布が内生的に形成され得るかを決定づける．ここで集積力とは，分散状態の不安定化を指向し，行動主体の集積を導くモデルの内生的メカニズム，即ち集積の経済を指す．集積の経済は λ を正にしようとする働きを持つから，$G(\mu)$ において正の項として現われる．一方，人口集中に伴う混雑効果など集積の不経済は分散力として働き，$G(\mu)$ においては負の項として現れることとなる．距離への依存性は，$\bar{\boldsymbol{D}}(\phi)$ の固有値 μ への依存性として現れる．モデル (7) では，距離に依存する集積力の存在が $G(\mu) = \mu$ なる関係に現れている．

実は，これまで提案されてきた基本型の集積経済モデルは，モデルに固有な関数 $G(\mu)$ の特徴によって，高々 3 通りの**モデル・クラス**に類型化可能であることが示される [2)]．しかも，それぞれのモデル・クラスごとに表現可能な集積パターンが異なる．これらモデル・クラス間の峻別は，モデルが仮定する分散力の特徴に注目することに相当する．以下では 3 つのモデル・クラスを I, II, III と番号付けしよう．

クラス I のモデルでは，$G(\mu)$ は c_1, c_2 を正の係数として以下のようである：

$$G(\mu) = c_1\mu - c_2\mu^2 \tag{9}$$

ともに，第 1 項は集積力を表現しており，第 2 項が分散力を表現している．**クラス II** のモデルでは，同様に c_0, c_1 を正係数として $G(\mu)$ は

$$G(\mu) = -c_0 + c_1\mu \tag{10}$$

であり，第 1 項が分散力，第 2 項が集積力を表現する．最後に，**クラス III** のモデルについては $G(\mu)$ は

$$G(\mu) = -c_0 + c_1\mu - c_2\mu^2 \tag{11}$$

で与えられ，第 1 項・第 3 項が分散力を，第 2 項が集積力を表現する．いずれも，μ に依存する項は距離に依存する集積力・分散力である．

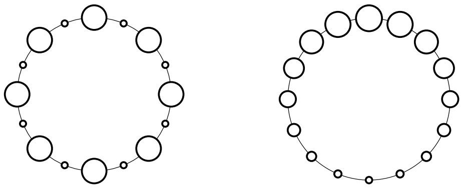
c) モデル・クラスと集積パターン

分散状態 $\bar{\boldsymbol{x}}$ が局所安定である状態が ϕ の変化に伴って不安定化するとき，それぞれのモデル・クラスから形成され得る集積パターンおよび集積が生ずるメカニズムは互いに質的に異なっている．分散状態が不安定化し得るように，ある $\mu \in (0, 1)$ において $G(\mu) > 0$ が成立すると仮定しよう．このような状況における $G(\mu)$ を**図–3** に示す．分散状態 $\bar{\boldsymbol{x}}$ が安定であるのは全ての k について $G(\mu_k(\phi)) < 0$ である場合であり，分岐が生じて集積が生ずるのはある k について $G(\mu_k(\phi)) > 0$ となったときである．**図–3** から見て取れるように，該当する k に対して $\mu_k(\phi) = \mu^*$ または $\mu_k(\phi) = \mu^{**}$ なる ϕ が分岐点である．

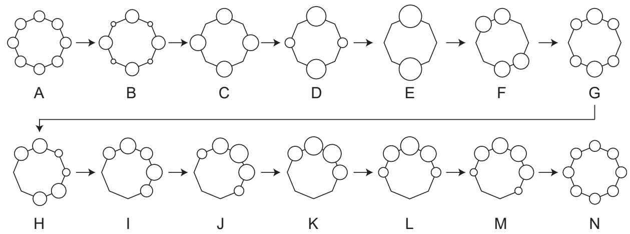
クラス I のモデルにおいて分散状態 $\bar{\boldsymbol{x}}$ が安定化するとすれば，それは全ての $\mu_k(\phi)$ が大きい領域，つまり輸送技術パラメタ ϕ が小さく立地点間の輸送費用が高い領域においてである．即ち，$\bar{\boldsymbol{x}}$ の安定性は立地点間の輸送費用に依存した分散力によって維持されている．以降ではこのような分散力を，**大域的分散力**と呼ぶ．クラス I のモデルを特徴付けるのは，大域的分散力の存在である．大域的分散力は，集積の外から移動主体を引き寄せようとする分散力であり，例えば企業が移動主体であるならば，空間的に分散した消費者からの財需要によって生み出される．

クラス I のモデルにおいて $G(\mu) = \mu(c_1 - c_2\mu)$ と整理できることに注意すれば，分散状態が不安定化するのは輸送技術の向上つまり ϕ の増加に伴って μ が減少し，分散力が集積力に破れた点においてである（**図–3** (a) の μ^*）．実は，$\phi \approx 0$ からの ϕ の増加を考える場合，最初に正となるのは第 $n/2$ 固有値であり，形成されるのは**図–4** (a) に示す $n/2$ 極パターン，局所的に広がりをもたない集積が競技場経済上に大域的に配置された人口分布であることが示される．単純モデルを用いた前節の議論を応用すれば，$n/2$ 極集積方向に対する分散力が常に最も弱く，最初に集積が生ずるのが $n/2$ 極方向であることは直観的である．

同様に，クラス II のモデルにおいて分散状態 $\bar{\boldsymbol{x}}$ が安定化するのは，全ての $\mu_k(\phi)$ が小さい領域，つまり ϕ



図–4: $n/2$ 極集積と 1 極集積 ($n=16$)



図–5: クラス III のモデルが示す集積挙動 ($n=8$)

が大きく，立地点間の輸送費用が低い領域においてである．しかも，$G(\mu)<0$ は距離に依存しない第 1 項によって保証される．即ち，$\bar{\boldsymbol{x}}$ の安定性は立地点間の空間的相互作用によって維持されるのではなく，集積の内部で生じ，集積の外へと移動主体を押し出そうとする分散力に依存している．以降ではこのような分散力を**局所的分散力**と呼ぶ．クラス II のモデルを特徴付けるのは，分散状態を安定化し得る分散力が局所的分散力のみである点である．例えば，人口増に伴う個別の立地点における地代の高騰・交通混雑等によって発生する都市費用は，局所的分散力の例である．

クラス II のモデルの分散力は輸送技術 ϕ に依存しない定数である．従って，このクラスのモデルで分散状態が不安定化するのは，ϕ の変化に伴って集積力が分散力を上回った場合であり（**図–3** (b) の μ^{**}），クラス I とは対照的である．既にモデル (7) を用いて議論したように，最大の集積力は 1 極集積方向に働くため，形成されるのは**図–4** (b) に示す 1 極集積パターンであることが示される．この人口分布においては，集積は大域的に唯一である．一方集積の形状は，クラス I とは異なり局所的な広がりをもっている．

クラス III のモデルは，クラス I, II の複合型であり，局所的・大域的分散力の両方を有する．従って，分散状態は，$\phi\to 1$ および $\phi\to 0$ の両方で安定化し，また**図–4** (a), (b) の両方のパターンが分散状態の不安定化に伴なって形成される．また，次節に見るように，このクラスのモデルは，ϕ の単調な増加に伴う集積進展過程において，集積が大域的に分散しつつ，かつそれぞれの集積の内部においては局所的に分散するという特徴的挙動を示す．

d) 大域的な集積挙動

以上の議論は，分散状態からの局所的分岐に注目している．**図–5** に，クラス I, II, III を代表して，クラス III モデルにおける ϕ の単調な増大に伴う集積の進展を示す（Akamatsu et al.[2] から抜粋）．なお，図中 A→B の変化が**図–3** (c) の μ^{*} における分岐に，M→N の変化が μ^{**} における分岐に対応することに注意されたい．

図–5 中，A〜E の変化は，大域的に分散した局所的な集積が段階的に形成される様子を示しており，大域的分散力の低下に支配される集積プロセスである．クラス I のモデルは，ϕ の増大に伴って同様の挙動を示す．この過程では，集積が生ずる点は大域的に数を減らしつつ，一つ一つの集積のサイズは大きくなり，集積同士の間隔は広がっていく．

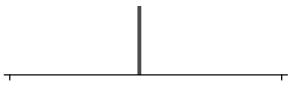
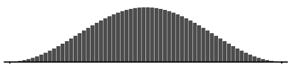
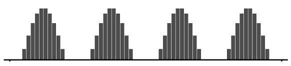
一方，K〜N の変化は，形成された 1 極集中的な集積が交通費用の低下，すなわち局所的分散力の相対的強まりに伴って崩壊する過程であり，クラス II のモデルはこの区間と同様の挙動を示す．この区間においては，地域間輸送技術の向上に伴なって集積は局所的に分散し，最終的に崩壊する．

クラス III モデルを特徴付けるのは，F〜J 間にみられる，集積の大域的分散と局所的分散とが互いに影響しつつ変化する挙動である．この区間においては，輸送技術パラメタ ϕ の増大は非自明な結果をもたらす．

以上に見たように，基本型の集積経済モデルの分散状態 $\bar{\boldsymbol{x}}$ における線形安定性解析は，この状態におけるモデルの集積力・分散力の構造をモデル固有の関数 $G(\mu)$ に集約することを可能とする．また，$G(\mu)$ から，内生的に形成される集積パターンを特定可能である．このような解析は，分散状態のみならず例えば**図–5** 中の C, E などの集積が進展した状態においても実行可能であるし，関数 $G(\mu)$ が表現する集積力・分散力の構造は，これらの状態においても保持されていることが示される．即ち，モデルが内生的に表現可能な人口分布の特性は，分散状態 $\bar{\boldsymbol{x}}$ の利得 Jacobi 行列 $\boldsymbol{V}(\phi)$ から導かれる $G(\mu)$ を見ることで解析的に判定できる．

表–1 に，過去提案されてきた様々な基本型の集積経済モデルを上記モデル・クラスに対応させたものを示し，同時に 1 次元空間において形成される特徴的な集積パターンの模式図を示した．これらのモデル・クラスは，ここまでに議論したように，モデルから生ずる分散力が大域的か局所的かという点によって決定づけられる．特に，本稿冒頭で述べた QSE においては，クラス II のモデルが採用されていることに注意されたい．即ち，Redding & Sturm,[42] Allen & Arkolakis[4] および Redding & Rossi-Hansberg[41] のモデルがそれである．この事実が意味するところは **4.** で改めて議論する．

表–1: 基本型の集積経済モデルの類型化

	分散力の構成	集積パターンと ϕ の増大に対する応答	モデル例
–	なし（集積力のみ）	単一地域への集積 （単峰パターン） 	自明な集積経済モデル［式 (7)］
クラス I	大域的分散力のみ	大域的分散・局所的集積 （多峰パターン）  ϕ 増大 → 集積の進展	Krugman[25] Puga[40] Forslid & Ottaviano[13] Pflüger[38] Harris & Wilson[16]
クラス II	局所的分散力のみ	大域的集積・局所的分散 （単峰パターン）  ϕ 増大 → 集積の崩壊	Helpman[18] Murata & Thisse[29] Redding & Strum[42] Allen & Arkolakis[4] Redding & Rossi-Hansberg[41] (§3) Beckmann[5] Mossay & Picard[28] Blanchet et al.[7] 上田・松葉 [54]
クラス III	大域的・局所的分散力	大域的分散・局所的分散 （多峰パターン）  ϕ 増大の効果は非自明	Tabuchi[46] Pflüger & Südekum[39] 高山・赤松 [50]

3. 複数主体モデルへの展開

前章では，確定論的な調整動学に基づく局所安定性解析による基本型の集積経済モデルの分析を議論し，モデルが分散力の特徴の如何によって 3 通りに類型化されることを示した．ここでは，**大域安定性解析**を導入するとともに，これを用いた**ポテンシャル・ゲーム**と呼ばれるクラスに属する集積経済モデルの解析例を紹介する．特に，モデルがポテンシャル・ゲームである場合，基本型モデルに含まれないモデルを分析可能であることを紹介する．なお，本章の内容も「はじめに」で述べた問題意識と関係しているが，前章と比較するとより技術的でありかつ補論に近いゆえ，場合によっては読み飛ばして **4.** へと進んでも構わない．

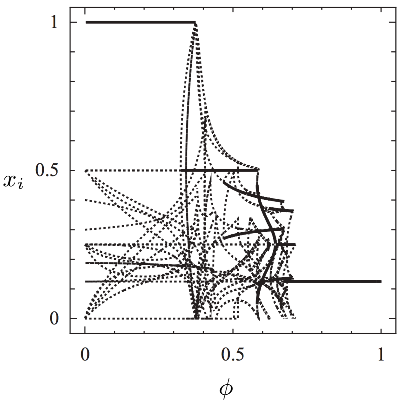
(1) 確率安定性概念に基づく大域安定性解析

a) 局所安定性解析の限界

前章で均衡選択のための方法論として用いた局所安定性概念には，幾つかの課題が存在する．第一に，特定の輸送技術水準 ϕ に対しても，複数の局所安定な均衡解が存在し得る．前章のクラス I モデルの議論では，分散状態から $n/2$ 極パターンが形成されることを述べ，ϕ の増大に伴なって更なる段階的集積が生ずる例を**図–5** に示した．しかし，実際には**図–5** に描画したもの以外にも様々の均衡解が存在し，ϕ の値によっては同時に安定化する．これらの複数の安定均衡解のうち，何れがより尤もらしいのかに関しては，局所安定性解析のみを通じて直接的に知ることはできない．**図–6** に，$n = 8$ なる競技場経済における Krugman[25] モデルの集積挙動を示す[11]．図中，黒実線は安定均衡解を示す．同一の輸送技術水準 ϕ の値に対しても，複数の安定均衡が存在し得ることを確認されたい．

第二に，本質的に立地誘引が異なる複数種類の主体が存在する場合には，競技場経済を仮定した場合でも解析が困難となる．例えば，**表–1** に取り上げた全ての NEG モデルについて，個別の立地点の企業数 y_i は労働者数 x_i と比例関係にあって，労働者 = 消費者の人口分布 $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in\mathcal{N}}$ を定めれば企業の分布 $\boldsymbol{y} = (y_i)_{i\in\mathcal{N}}$ も

[11] Ikeda et al.[20] から引用．



図–6: Krugman (1991) モデルの集積挙動 ($n = 8$)

同時に定まる．一方，立地点間の通勤が生ずる場合には，企業と労働者の立地誘引は必ずしも一致せず，独立した複数種類の立地主体の同時分布 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を考える必要がある．関東をはじめとする大都市圏において，通勤を捨象することは正当化され得ないと考えられるが，前章で取り扱った全ての NEG モデルは，地域レベルを考慮することで消費者の立地点間の通勤行動を捨象している[12]．しかし，通勤・立地を含むようなモデルへ前章の解析手法を単純に拡張することはできない．例えば，異なる立地主体が存在する場合の調整動学をどのように定義するのが尤もらしいのかについて直ちに答えを与えるのは難しい[13]．調整動学の定義に妥当性に関する疑義を無視し，例えば単一階層のレプリケータ・ダイナミクスを仮定したとしても，非対称かつ双方向的な相互作用が存在する場合には解析が煩雑となり，モデルに特殊な仮定を置かない限り解析的結論は得づらい．特に，輸送技術水準に関して大域的な分析は実行困難である．

b) 大域的安定性解析

第一の課題を解決する方法論を総称して大域安定性解析と呼ぶ．大域安定性解析手法は，調整動学のモデルを強めることによって，局所安定解の集合からより尤もらしい，多くの場合唯一の均衡を選び取る手続きである．例えば，立地主体の将来を見越した完全予見的な立地選択を仮定した**完全予見動学**によって，各輸送技術水準 ϕ に対して複数の局所安定解のうちから唯一の均衡を選択することが可能である（Oyama[34),35)]）．或いは，行動主体の選択にランダムな誤りを考慮した**確率的調整動学**を仮定し，その確定論的極限を考えることによって，定常確率の集中に基づく**確率安定性解析**が可能となり，この場合も多くのケースでモデルの構造パラメタのそれぞれの値に対して大域的・唯一の均衡選択が可能である（Wallace & Young[47)]）[14]．後者，特に Kandori–Mailath–Rob[22)] 型のエラーあり最適応答動学を用いた確率安定性解析は，ネットワーク形成ゲームの理論研究においてよく利用されており，土木計画学分野においても導入されている（Kotani[23)]）．

大域安定性解析は，特に**ポテンシャル・ゲーム**と呼ばれるクラスの均衡モデルにおいて，簡便に実行可能である．ポテンシャル・ゲームとは，具体的には利得関数 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ が積分可能，即ちあるスカラー関数 $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ が存在して，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ において $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ が成立するクラスのモデルを指す[15]．このような関数 f は，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ に対する**ポテンシャル関数**と呼ばれる．ポテンシャルが存在するモデルにおいては，変分不等式 (1) の解は下記の最適化問題

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} f(\boldsymbol{x}) \equiv \oint_{\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\omega}) \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \tag{12}$$

の解と対応づけられる．特に，均衡解が一意であれば，これらの問題は等価である．静学的な交通ネットワーク均衡配分の文脈ではよく用いられる変換であることは周知の通りであろう [6),62)]．

集積経済モデルの場合には，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ は必ずしも単調ではなく，解集合は一般に非凸である．従って，問題 (1) と問題 (12) とは必ずしも等価ではない．しかし，これらの問題はある意味ではより強く関係することが言える．具体的には，ポテンシャル・ゲームにおいては (i) 問題 (12) の Karush–Kuhn–Tucker 条件を満足する点が均衡解であり，(ii) 広いクラスの確定論的調整動学のもとで，局所最大化解が局所安定均衡解，局所最小化解および鞍点が不安定均衡解となる [44)]．

ポテンシャル・ゲームにおいては，ポテンシャル関数の**大域的最大化点**が大域安定であることが知られている[16]．即ち，大域に安定な均衡は，最適化問題 (12) の大域解を同定することによって求められる．特に，明らかに局所安定解のうちに大域安定解が存在することから，ある ϕ に対応する局所安定解 $\{\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \ldots\}$ が既知ならば，これらに対するポテンシャル関数値 $\{f(\boldsymbol{x}_1^*), f(\boldsymbol{x}_2^*), \ldots\}$ を比較することで大域安定解を特定可能である．この

[12] 例えば，Murata & Thisse[29)] および Tabuchi[46)] においては，通勤は各立地点（地域）内においてのみ考慮されている．

[13] 問題に長期・短期の階層的な構造を仮定し，それぞれの階層において異なる調整速度の動学を考えるのが自然に思われるが，進化ゲーム理論分野においても，階層的な構造を持った調整動学の理論は発展途上である．

[14] なお，確定論的極限を考えない場合，定常確率に基づく状態予測が可能となる．土木計画学関連の応用としては，集積経済モデルの文脈における織田澤・赤松 [55)]，交通均衡モデルの文脈における Shittaka & Nagae[45)] を挙げられる．

[15] 許容領域 $\boldsymbol{X}$ は有界凸集合であることから，利得関数が積分可能であることは利得関数の Jacobi 行列 $\nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ が任意の $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ において対称であることと同値である．なお，ゲーム理論分野における正確な定義は，$\mathcal{X}$ の接錐に射影した上での一致というより弱い条件を課す．即ち，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ における $\mathcal{X}$ への射影演算を $P_{\boldsymbol{x}}$ とすれば $P_{\boldsymbol{x}} \nabla f(\boldsymbol{x}) = P_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ が正確なポテンシャル・ゲームの定義である．

[16] 正確には，十分割引率が低い完全予見的動学のもとで大域的に吸引的であり [34),35)]，或いは既約かつ非周期的な Markov 過程を導く有限人口（有限状態）の確率的調整動学の連続・確定論的極限のもとで定常確率が正である [43),47)]．

ためには均衡を列挙することが必要であるから，一般に困難だが，競技場経済においては代表的な均衡を列挙可能であり，大域安定性を調べることができる．

(2) 基本型の集積経済モデルの解析

一般に，NEG モデル等の一般均衡型モデルにおいては，立地点の人口増は非対称な効果をもたらす．従って，競技場経済を仮定したとしても，$\nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ は必ずしも対称ではなく，ポテンシャル・ゲームとはならない．本節では，ポテンシャル・ゲームとなる基本型の集積経済モデルとして，Beckmann[5)] 型 Social Interaction モデルの 2 種類の変形を取り上げる[17]．

実は，これらのモデルは前章で述べたクラス I, II に帰着され得るモデルのうち，極小なモデルの組を成している．以降本節では，単純化のために $n = 4$ なる競技場経済を仮定する．4 立地点という設定は，基本型モデルにおいてクラス I, II を峻別するために最小の経済環境であることに注意されたい．

a) クラス II 型 Social Interaction モデル

Beckmann[5)] のオリジナルのモデルでは，都市内構造を問題とする．都市の住民は，他の全ての住民との交流を求めることから，近接して立地する住民が多いほど高い利得を享受する．これを表現するため，式 (7) で表現される集積の経済を仮定する．一方，土地を需要することから，人口が集中する立地点には地代による局所的分散力が働く．この結果として，住民の利得関数は最も単純化すると以下の形式に帰着される：

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = -\alpha \boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}(\phi)\boldsymbol{x} \tag{13}$$

このモデルの利得関数の Jacobi 行列は，任意の人口分布 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ に対して $\boldsymbol{V}(\phi) = -\alpha \boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}(\phi)$ で与えられ，

$$G(\mu) = -\alpha + d(\phi)\mu \tag{14}$$

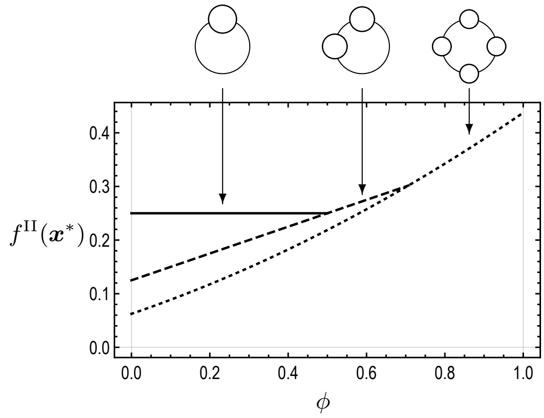
が成立するから，このモデルはクラス II モデルである．これを **SI–(II)** モデルと呼ぼう．

空間割引行列 $\boldsymbol{D}(\phi)$ が対称行列であることから，$\boldsymbol{V}(\phi)$ もまた対称である．SI–(II) モデルに対するポテンシャル関数は以下で与えられることが確認できる：

$$f^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{D}(\phi)\boldsymbol{x}. \tag{15}$$

うち第 1 項は分散力に対応し，狭義凹関数である．また，第 2 項は集積力に対応し，準凸関数である．前者は $\mathcal{X}$ の内点解，即ち分散を指向し，後者は端点解，即ち少数地域への集積を指向することを確認されたい．例えば混雑効果 α 十分大きければ，$f^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x})$ は全体として凹であり，極大点は任意の ϕ に対して完全分散状態のみとなることは明らかであろう．

4 立地点競技場経済において，SI–(II) モデルの均衡



図–7: SI–(II) モデルの大域安定解 ($\alpha = 1/2$)

解 $\boldsymbol{x}^*$ は以下のように列挙可能である：

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{cases} \boldsymbol{x}^4 \equiv \frac{1}{4}[1,1,1,1]^\top & \phi \in (0,1), \\ \boldsymbol{x}^{1'} \equiv \frac{1}{2}[1,1,0,0]^\top & \phi \in (0, 1-\alpha), \\ \boldsymbol{x}^1 \equiv [1,0,0,0]^\top & \phi \in (0, \sqrt{1-\alpha}). \end{cases} \tag{16}$$

このうち，$\boldsymbol{x}^4$ は分散状態，$\boldsymbol{x}^1$ は完全 1 極集中状態，$\boldsymbol{x}^{1'}$ は局所的に分散した 1 極集中状態を表現している．同一の ϕ の値に対しても，複数の均衡解が存在することを観察されたい．

図–7 は，これらの均衡解に対するポテンシャル関数値を表現している．これらの曲線の上位包絡線に対応するのが，SI–(II) モデルの大域安定均衡である．実際，輸送技術パラメタ ϕ が大きいとき分散状態は安定であり，ϕ が小さくなるに従って 1 極集中パターンが創発し，完全 1 極集中状態に至るという，**図–5** K〜N に示したような，クラス II のモデルに特徴的な挙動が大域安定解において確認できる．なお，SI–(II) に関する以上の結果は局所安定性解析によっても容易に同一の結果を得ることができる．

b) クラス I 型 Social Interaction モデル

SI–(II) モデルの局所的分散力を大域的分散力によって置き換えることを考える．立地主体を商業企業と解釈し，集積の経済が同一業種店舗の集積によるものと解釈しよう[64)]．また，大域的分散力を生ずる要因として，Harris & Wilson[16)] のモデルに見られるような，空間的に分布した消費者からの非弾力的なグラビティ型需要を考慮する．具体的には，各立地点の需要は一定値 α であり，立地点 i から j への取引額が以下で与えられるとする：

$$\alpha \frac{d_{ij}(\phi) x_j}{\sum_{k \in \mathcal{N}} d_{ik}(\phi) x_k}. \tag{17}$$

このとき，行列 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \phi) = [m_{ij}(\boldsymbol{x}, \phi)]$ を $m_{ij}(\boldsymbol{x}, \phi) \equiv d_{ij} / \sum_{k \in \mathcal{N}} d_{ik}(\phi) x_k$ で定義すれば，利得関数は

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}(\phi)\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \phi)^\top \boldsymbol{1} \tag{18}$$

[17] 本節は Osawa[30)] 第 3 章，Osawa & Akamatsu[32)] に基づく．

のように与えられる[18]．この利得関数の Jacobi 行列は，分散状態 $\boldsymbol{x}^4$ において $\boldsymbol{V}(\phi) = \boldsymbol{D}(\phi) - \alpha\{\bar{\boldsymbol{D}}(\phi)\}^2$ で与えられ，$G(\mu)$ は以下

$$G(\mu) = d(\phi)\mu - \alpha\mu^2 \tag{19}$$

のように与えられるので，クラス I モデルであることがわかる．このモデルを，**SI–(I) モデル**と呼ぼう．

このモデルはポテンシャル・ゲームであり，利得関数 (18) に対応するポテンシャル関数は次で与えられることを確認できる：

$$f^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{D}(\phi)\boldsymbol{x} + \alpha \sum_{i\in\mathcal{N}} \log\big(\sum_{j\in\mathcal{N}} d_{ij}(\phi)x_j\big).$$

SI–(II) モデルと同様に，第 1 項が集積力を表現している．一方，第 2 項は消費者の企業へのアクセシビリティに対応し，大域的分散力に対応している．

このモデルは NEG 等のモデルと比較して非常に単純であることから，均衡解を全て列挙できる：

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{cases} \boldsymbol{x}^4 = \frac{1}{4}[1,1,1,1]^\top & \phi \in (0,1), \\ \boldsymbol{x}^2 \equiv \frac{1}{2}[1,0,1,0]^\top & \phi \in (\phi_2, 1), \\ \boldsymbol{x}^{1'} = \frac{1}{2}[1,1,0,0]^\top & \phi \in (\phi_{1'}, 1), \\ \boldsymbol{x}^1 = [1,0,0,0]^\top & \phi \in (\phi_1, 1), \\ \boldsymbol{x}^{4\to 2} \equiv \boldsymbol{x}^4 + \epsilon(\phi)\boldsymbol{\eta} & \epsilon(\phi) \in [0,1), \\ \boldsymbol{x}^{4\to 1'} \equiv \boldsymbol{x}^4 + \bar{\epsilon}(\phi)\bar{\boldsymbol{\eta}} & \bar{\epsilon}(\phi) \in [0,1), \\ \boldsymbol{x}^{1'\to 1} \equiv \boldsymbol{x}^{1'} + \hat{\epsilon}(\phi)\hat{\hat{\boldsymbol{\eta}}} & \hat{\epsilon}(\phi) \in [0,1), \\ \boldsymbol{x}^{2\to 1} \equiv \boldsymbol{x}^2 + \hat{\epsilon}(\phi)\hat{\boldsymbol{\eta}} & \hat{\epsilon}(\phi) \in [0,1). \end{cases} \tag{20}$$

ここに，$\phi_2, \phi_{1'}, \phi_1$ はそれぞれ閾値である．$\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\hat{\boldsymbol{\eta}}}, \bar{\boldsymbol{\eta}}$ はそれぞれ下記：

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \tfrac{1}{4}[1,-1,1,-1]^\top, \tag{21}$$

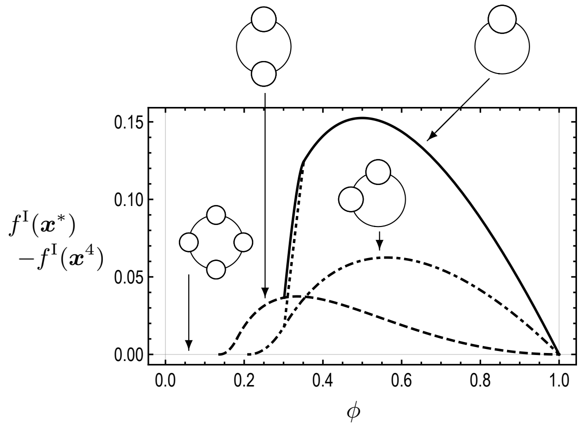
$$\hat{\boldsymbol{\eta}} \equiv \tfrac{1}{2}[1,0,-1,0]^\top,\ \hat{\hat{\boldsymbol{\eta}}} \equiv \tfrac{1}{2}[1,-1,0,0]^\top, \tag{22}$$

$$\bar{\boldsymbol{\eta}} \equiv \tfrac{1}{4}[1,1,-1,-1]^\top, \tag{23}$$

で定義される．$\epsilon(\phi)$, $\hat{\epsilon}(\phi)$, $\bar{\epsilon}(\phi)$ は ϕ に関する単調増加関数であり，解析的に導くことができる．なお，$\boldsymbol{x}^{\cdot\to\cdot}$ のように表記した解は，$\to$ の前後の数字に対応する解を接続する遷移状態の役割を果たしている．

図–8 は，(20) に示した均衡解に対応するポテンシャル関数値を示す．ただし，見易さのために分散状態のポテンシャル関数値からの差分 $f^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}^*) - f^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}^4)$ を示している．**図–7** と同様に，描画された曲線の上位包絡線に対応する解が大域的に安定な均衡解である．なお，模式図としては，均等に人口が分布したパターンである $\boldsymbol{x}^4, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^{1'}, \boldsymbol{x}^1$ のみを示した．図より，SI–(I) モデルの大域安定解が示す集積挙動は，$\boldsymbol{x}^4 \to \boldsymbol{x}^2 \to \boldsymbol{x}^1$ という，前章の**図–5** 中 A〜E に見られる挙動と合致している．

[18] SI–(I) モデルの定式化の詳細については高山・赤松 [50] を参照（ポテンシャル関数の議論を除く）．第 1 項の空間割引行列と第 2 項で用いる空間割引行列はそれぞれ区別すべきものであるが，ここでは単純のため両者に同一の空間割引行列を用いる．



図–8: SI–(I) モデルの大域安定解 ($\alpha = 2$)

以上の結果は，クラス I, II というモデル・クラス毎の集積挙動に関する前章の結果が，均衡選択基準を大域安定性へと強化しても頑健に成立する特性であることを示している．換言すれば，局所分岐解析から得られた結果であるが，実は大域安定性という意味においても代表的挙動を選択していたことになる．

(3) 複数主体モデルの解析

前節 SI–(I),(II) の両モデルを通じて，$\boldsymbol{x}^4, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^{1'}, \boldsymbol{x}^1$ なる，行動主体が存在する立地点に関して均等分散となっている均衡解を問題とした．これらの均衡解は，レプリケータ・ダイナミクス等，複製型の確定論的な調整動学の輸送費用によらない停留点となることが証明されている（Ikeda et al.[21]）．このような，構造パラメタ ϕ の値に人口分布が依存しない均衡解を**自明解**と呼ぼう．本節では，自明解の大域的安定性の如何に注目することで，ここまでの分析では取り扱いが実質的に不可能な，立地誘引が異なる複数の主体が存在するモデルの基本的特性を分析可能であることを紹介する[19]．

a) FO モデルおよび対応する最適化問題

Fujita & Ogawa[14] のモデル（以下，**FO モデル**）は，通勤および集積の経済を考慮した複数主体モデルのうちで最も単純な構造を持つモデルであり，多極的な都市内構造の形成を表現しようとするモデルである．比較的単純な構造を持つにも関わらず，このモデルの均衡解の安定性および構造パラメタの変化に関する応答は，筆者らの研究 [31),57)] 以前にはほぼ未知であった．

このモデルには，居住地および勤務地を選択する労働者と，立地点を選択する企業の 2 種類の主体が存在する．労働者の立地・勤務地選択パターンを $\boldsymbol{x} = (x_{ij})_{i,j\in\mathcal{N}}$，企業の空間分布を $\boldsymbol{y} = (y_i)_{i\in\mathcal{N}}$ で書く．ここに，$x_{ij} \geq 0$ は，地点 i に居住し地点 j へと通勤する労働者の数であり，$y_i \geq 0$ は地点 i に立地する企業の数である．な

[19] 本節は Osawa[30] 第 4 章，および大澤・赤松,[57] Osawa & Akamatsu[31] に基づく．

お，各地点における土地供給は非弾力的に 1 単位であり，地代は全て不在地主が受け取るものとする．また，企業が生産する財は全て都市の外に輸出される．

労働者は土地を非弾力的に 1 単位消費し，労働 1 単位を非弾力的に供給して企業から賃金を支給される．企業は前節と同様の企業同士の立地外部性のもとで，非弾力的に土地 1 単位および労働 L 単位を投入して生産を行う．ここでは，立地点 i において享受される集積の経済効果を原論文に倣って

$$A_i(\boldsymbol{y}) = \sum_{j \in \mathcal{N}} \exp[-\tau \ell_{ij}] y_j \tag{24}$$

と表現する．なお，ℓ_{ij} は ij 間の最短経路距離である．即ち，$\boldsymbol{D}(\tau) \equiv [\exp[-\tau \ell_{ij}]]$ として $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{D}(\tau)\boldsymbol{y}$ であり，前節までの SI–(I),(II) モデルと空間割引行列の定義以外は同一である．また，労働者は通勤費用を考慮した勤務地選択を行うので，企業は労働を確保するために通勤費用を補償するだけの賃金を支払う必要があるのが特徴的である．

FO モデルの輸送技術パラメタは，企業間の交流のしやすさを表現する距離減衰パラメタ $\tau > 0$ と，労働者の単位距離あたりの通勤費用 $t > 0$ である．前節までの基本型の集積経済モデルでは唯一のパラメタ ϕ に関する安定解の変遷が問題となったが，FO モデルにおいては 2 種類の構造パラメタに対する反応，即ち (τ, t)-平面上における安定解の分類が課題となる．

詳細は別の機会に譲るが，実はこのモデルに対しては以下の最適化問題が対応することが示される [31),57)]：

$$\max_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv -t\,\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{x} + \frac{1}{2} \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{D}(\tau) \boldsymbol{y} \tag{25}$$

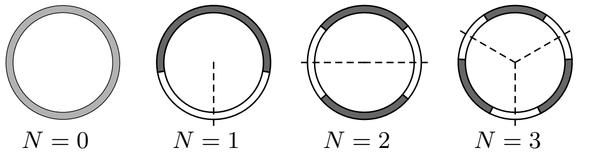
ただし $\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{x} \equiv \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{N}} \ell_{ij} x_{ij}$ であり，許容領域は

$$\mathcal{X} \equiv \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq \boldsymbol{0} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{ij} \leq X, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{ij} + y_i \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ L m_j \leq \sum_{i \in \mathcal{N}} x_{ij} \quad \forall j \in \mathcal{N} \end{array} \right\}$$

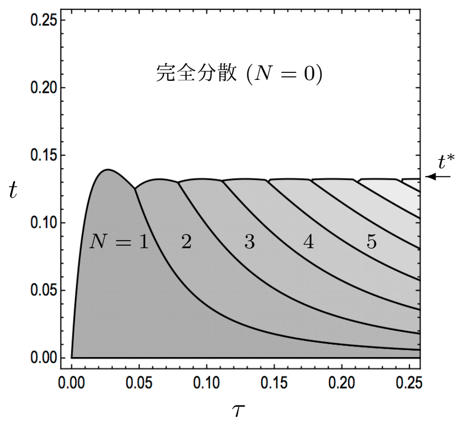
で与えられる．なお，X は全労働者数，L は 1 企業あたりの労働需要である．$\mathcal{X}$ の定義はそれぞれ労働者数の保存，土地の供給，労働の供給に関する制約を表現し，それぞれの Lagrange 乗数が労働者の均衡効用，地代，賃金に対応している．目的関数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の第 1 項は通勤によって生ずる総費用を表現しており，労働者が空間的に分散している状況においては企業にとっては分散力を表現する[20]．第 2 項は，これまでと同様に集積力を表現している．

b) 自明解による安定均衡解の予測

前節までの結果を念頭に置けば，調整動学の詳細によらず，$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $\mathcal{X}$ 上で最大化する解に注目することで安定解を選ぶことができ，FO モデルの安定な解が示す基本的な特性を把握可能であると期待できる．なお，以下では，本来の FO モデルが対象とする連続空間を表現するために，十分大きい立地点数 n の競技場経済を仮定し，空間を連続近似した場合における均衡解を考える．この際に，使用されない土地が生じない，即ち，$\sum_{i,j \in \mathcal{N}} x_{i,j} + \sum_{i \in \mathcal{N}} y_i = n$ であると仮定する．



図–9: FO モデルの自明解候補の例



図–10: (τ, t)-平面におけるポテンシャル最大自明解の分類

このような場合における企業の立地に注目しよう．企業が一様分散した状態は明らかに均衡解である．また，円周上に $N = 1, 2, 3, \ldots$ 個の同一サイズの企業集積が等間隔に存在する状態も，明らかに解となり得る．実際，t が十分小さければ，消費者の行動を考慮した場合にも τ の値の如何によって均衡解となることを示せる．

即ち，一様分散状態を $N = 0$ とすれば，N を企業集積の数として $N = 0, 1, 2, \ldots$ に対応する自明解が存在する．**図–9** に，連続近似した円周上における FO モデルに対する解候補 $(N = 0, 1, 2, 3)$ を示す．図中 $N \geq 1$ について，黒で示した部分が企業の立地する点（業務地区），白で示した部分が労働者の立地する点（居住地）である．灰色で示した $N = 0$ は，各立地点に均等に企業が分散し，また労働者も一様に分布する状態である．

これらの自明解におけるポテンシャル関数値を比較し，最大のポテンシャル関数値を与えるパターンを選択すると，**図–10** に示したような分類図を導ける [57)]．白抜きの領域は分散状態のポテンシャル関数値が最大となる領域であり，灰色で示されているのは $N \geq 1$ 極なる集積パターンのポテンシャル関数値が最大となる領域である．t に閾値 t^* が存在するのが確認できる．ま

[20] この力は，企業と労働者を近づけようとする集積力を表現しているとも解釈可能である [37)]．

た，灰色の領域は集積の極の数 N によって区分されているが，N が増加する程 τ の大きい領域に配置される．

まとめると，FO モデルの集積特性は以下の通りである．まず，(i) 単位距離あたりの労働者の通勤費用 t が十分高い場合 ($t \gg t^*$) には企業は完全分散し，(ii) t が低い範囲 ($t \ll t^*$) においては集積を生じ得る．また，(iii) 企業の集積が生ずる範囲において，距離減衰係数 τ が大きい程多数の集積が生じ，τ が小さくなる（輸送費用が下がる）につれて集積の数は減少するとともに，最終的に完全分散が生ずる．なお，(iv) $N \to \infty$ の極限において，N 極解のポテンシャル関数値は完全分散パターン ($N = 0$) のそれと一致することを確認できる．即ち，FO モデルにおいて $t \ll t^*$ なる範囲で t を固定し τ の変化に注目すれば，生ずる集積挙動は**図–5** に示したクラス III モデルのそれと類似している．

FO モデルがこのような挙動を示すメカニズムとしては，近似モデルを介した分析によって，労働者の交通費用を考慮した通勤行動が企業にとっての大域的分散力を生み出すことが明らかとなっている [57]．即ち，「多極的な集積パターンが安定な均衡解として内生的に形成されるためには大域的分散力の存在が必要である」という，基本型の集積経済モデルの類型化を通じて導かれた観察は，FO モデルにおいても成立している．換言すれば，分散力の特性によるモデル・クラスの分類は，基本型の集積経済モデルを越えた広がりを見せつつある．

4. モデルの数理解析がもたらす視点

以上 **2.** および **3.** を通じて，多地域空間経済における集積経済モデルの理論解析を紹介した．本章では，以上の理論解析の結果を背景として，特に空間経済学における一つの大きな潮流といえる QSE における研究を参照する上で留意すべきと思われる事項を整理する．

本章の議論は Akamatsu et al.[2] 第 6 章 3 節に基づいている．なお，同 1 節においてはそもそも産業集積を如何に検出すべきかを，また同 2 節においては輸送インフラ整備の効果に関する誘導系回帰分析[21]を議論している．これらの話題に関心のある向きにはぜひ参照されたい．

(1) QSE の掲げる目的と基本的アプローチ

QSE の現在の到達点および展望を包括的にレビューしている Redding & Rossi-Hansberg[41] (RR) によれば，QSE は，Eaton & Kortum[11] 以降の国際貿易における計量分析の展開を背景にもつ一群の計量分析，特に生産要素の移動を考慮した枠組みを指すようである[22]．また，QSE とは本稿で問題としてきたような内生的な集積メカニズムを弱い形で考慮するものであるとしており，QSE の文脈で構築されてきたモデル群の目的を以下のように説明している（強調筆者）：

> In contrast to the previous theoretical work, this research does not aim to provide a fundamental explanation for the agglomeration of economic activity, but instead aims to provide an empirically-relevant quantitative model to perform general equilibrium counterfactual policy exercises. **Agglomeration in these models is simply the result of exogenous local characteristics, augmented by endogenous economic mechanisms.**

実際，典型的な QSE モデルにおいては，集積の経済をモデル上では考慮しつつも，輸送技術水準の如何によらない均衡の一意性が保証されるもとでの分析が中心となっている．

均衡の一意性が担保されている場合，例えば交通ネットワークの形状がもたらす地理的優位性，固有アメニティ，生産性など**外生的な立地点固定効果**を与件とした場合，モデル $\mathcal{M}$ はそれらの固定効果の組 $\boldsymbol{A}$ から均衡人口分布 $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A})$ を導く対応

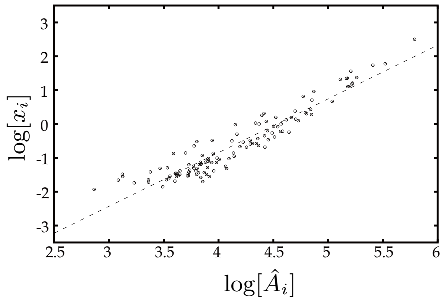
$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\mathcal{M}} \boldsymbol{x}^*$$

であると言えよう．この対応は仮定により一意であるから，逆に現況の人口分布が $\boldsymbol{x}$ であった場合に，これが均衡状態にあると仮定すれば，逆の対応

$$\boldsymbol{x} \xrightarrow{\mathcal{M}^{-1}} \hat{\boldsymbol{A}} \tag{26}$$

を考えれば，立地点固定効果 $\hat{\boldsymbol{A}}$ を "復元" できる．従って，$\hat{\boldsymbol{A}}$ の一部を変形するような政策介入に関する反実仮想実験が可能となる．特に，均衡の一意性が保証されるのであればモデルの求解は容易となる．

ただし，上記引用でも明言されているように，このようなアプローチは内生的な集積形成を考慮せず，一般均



図–11: QSE モデル [42] における人口と外生変数

[21] 例えば地域 i の時点 t における集積サイズ指標を SIZE_{it}，アクセシビリティ指標を ACCESS_{it}，時点間で不変の共変量を x_i とした，下記のような回帰：

$$\mathrm{SIZE}_{it} = C_0 + C_1 \mathrm{ACCESS}_{it} + C_2 x_i + (\text{error term}).$$

例えば，この係数 C_1 に関する符号条件は，前提とするモデル・クラスによって真逆となる場合がある．

[22] この論文では経済学分野における一般の応用一般均衡分析については触れているが，工学および地域科学分野で蓄積されてきた空間応用一般均衡分析の既存研究に関しては触れていない．

衡効果を考慮しつつも，基本的には立地点固定効果のみによって人口を表現しようとする方法である．従って，現況人口 $\boldsymbol{x}$ から復元される外生パラメタの値 $\hat{\boldsymbol{A}}$ は，実際の人口分布を完全に説明する状態に設定されることとなる．しかも，実際にはモデルの一般均衡効果はほぼ影響を与えないようにすら見える．

例として，**図–11** は，Redding & Sturm[42] について立地点 i の人口シェア x_i を外生変数の推定値 $\hat{A}_i$ に対してプロットしたものであるが，ほぼ直線に乗ってしまう．実際，この例では，一般均衡効果は高々人口分布の 10% を説明するに過ぎず，他の 90% は立地点固定効果のみによって定まっている．これは，集積の経済が非常に弱い，解の一意性が保証される範囲を仮定していることと果たして無関係なのであろうか．

上述のような危うさはありつつも，一意均衡のもとで実行可能となる多彩な反実仮想実験は，政策分析ツールとして一見強力かつ魅力的に映ることは否めない．直近では，Fajgelbaum & Schaal[12] など，交通ネットワークの最適化をも統合したモデルも登場するなど，QSE の文脈で提案されるモデルはいよいよ複雑化の一途を辿り，より精緻な分析がなされているように錯覚する．

だが，本稿の視点から見た場合，「一般均衡下において集積の経済効果を複数均衡を生じない程度に考慮する」という QSE の基本的アプローチは，**使用するモデル・クラスの限定**に依存している．その結果，これら QSE 研究が提示する適用計算の結果を解釈する上では，十分な注意，特に使用されているモデルの数理特性に関する慎重な検討を要する．

(2) モデル・クラスの限定がもたらす含意

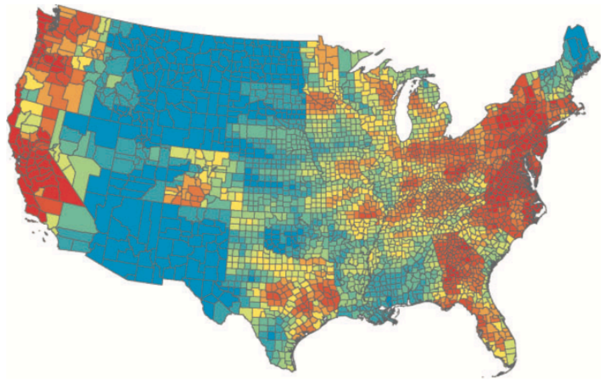
QSE の基本的アプローチは，輸送費用の水準に依存せずに均衡解が一意となるようにその他のモデルの構造パラメタを設定することに依存している．競技場経済においては分散状態は常に均衡解であることを勘案すると，均衡の一意性は分散状態が ϕ の如何によらず常に安定であることを意味する．**図–3** を見れば理解できるように，これが可能となるのは，モデルがクラス II 或いはクラス III に属す場合のみである．なぜならば，これらのモデルにおいては ϕ に関して定数として現われる局所的分散力が十分強い状況を考えることで，分散状態を任意の ϕ に対して安定化可能だからである．一方，クラス I モデルでは，分散状態が必ず不安定化することから，常に複数均衡が存在する．

Redding & Strum[42] および Allen & Arkolakis[4] など，代表的な QSE 研究例は，悉くクラス II モデルを採用している．クラス II のモデルを使用した場合，複数均衡下においては 1 極集中パターンのみしか表現し得ず，多極パターンを表現し得るクラス I モデルとは性質が異なることは **2.** で議論した通りである．均衡解の一意性を仮定した場合に，複数均衡下での挙動の違いに着目することで得られたモデル・クラスの分類は果たして問題となるであろうか？

問題となるのである．分散力の特徴の如何は，分散状態が不安定化し得るか否かとは無関係であることに注意されたい．実は，立地点間輸送費用の低下が人口分布に与える影響は，モデル・クラス毎に異なるのである．具体的には，ϕ の増大は，クラス I に属するモデルにおいては地域固定効果がもたらす相対的優位性を増幅する方向に働き，クラス II に属するモデルにおいてはその逆であることを証明可能である[23]．これは，分岐が発生する状況下においてクラス I モデルにおいては一つ一つの集積のサイズが ϕ の増大に伴って増加し，クラス II モデルでは逆であることと対応している．

即ち，クラス II モデルを前提とする限りにおいて，輸送アクセスの改善は，立地点固有効果がもたらす相対的優位性によって生じた**見掛け上の集積**[24]を必ず崩壊させる．クラス II のモデルを利用すると決めた瞬間に，この結果が数値計算をせずとも予測できるという点が重要である．

図–12 は，クラス II モデルを用いた Allen & Arkolakis[4] から Figure XVIII を抜粋したものである．この図は，州間高速道路を除去した場合に生ずる人口の増減の如何を描画しており，赤い部分は人口増を，青い部分は人口減を表現する．州間高速道路の除去は輸送アクセスの改悪を意味し，クラス II モデルにおいては集積の促進をもたらす．結果，もともとの大都市部，即ち QSE のアプローチの特性として外生効果 $\hat{\boldsymbol{A}}$ が大きく設定された地域においては人口増が，それ以外の地域においては人口減がもたらされていると理解可能である．



図–12: QSE モデル [4] における交通アクセスの悪化の影響

[23] Akamatsu et al.[2] Appendix D を参照のこと．
[24] ここでは，行動主体の集中がもたらす集積の経済によって内生的に生じたものではないという意味で見掛け上の集積と呼ぶ．

クラス II モデルが持つこの数理的特性を理解し，意図的に用いている限りにおいて問題はないかもしれない．例えば，現実が集積の崩壊段階にあるとの解釈のもと，空間的な効果の帰着の如何を問うならば，このような分析も正当化可能であろう．しかし，QSE の多くの研究において，必ずしも **2.** で述べたようなモデル類型に関する背景知識のない計算例の提示に終始しているようであり，そうした結果の解釈には注意を要する．

最近では，QSE の文脈においても，解の一意性を前提しないアプローチが導入されつつある．特に，Ahlfeld et al.[1] は，**3.** で取り上げた FO モデルと同様の労働者の立地点間通勤を考慮したモデルによる計量分析を提示している．しかし，モデルの安定均衡解の一般的特性は未解明であり，解釈には注意を要する．その他，本稿で議論し得る範疇を超えるが，Desmet & Rossi-Hansberg,[10] Desmet et al.[9] などの動学的モデルの展開も注目すべき流れである．しかし，これらのモデルにおいても，定常解の一般的特性は未知であり，結果を素直に解釈するのは難しい．

5. おわりに

本稿では，競技場経済という理想的環境における集積経済モデルの数理解析を議論した．**2.** においては，確定論的調整動学のもとでの分散状態からの分岐に着目することで，既往の集積経済モデルが少数のクラスに分類されることを示した．**3.** においては，ポテンシャル・ゲームにおける大域安定性解析を議論し，**2.** で導いたモデル・クラスへの類型化を再検討するとともに，**2.** では扱えなかった複数主体モデルの分析を議論した．最後に，**4.** においては，モデル・クラス分類の知識を前提とした場合の QSE の位置付けを検討した．

4. で見たように，モデルの数理的特性を十分理解すれば，実経済を対象とするような一般均衡モデルの大規模計算の結果であっても，定性的に解の変化方向を予測することすら可能である．更に，ミクロ経済学的整合性の意味では同等のモデルであっても，数理的には全く異なった挙動を示し得ることは，集積経済モデルを用いた反実仮想実験において十分留意する必要がある．即ち，数理的特性が未解明の集積経済モデルを用いた計算例は，モデルの論理的整合性が担保されている場合においても，結局のところ結果が生ずるメカニズムが不明という意味では説明可能性がない．本稿で展開したような解析的分析を行う必要はなくとも，なるべくなら競技場経済・線分経済など，理想化された系における系統的な数値解析を通じてモデルの基本特性を把握する必要がある，というのが全体を通じて得られた知見である．

集積経済モデルの数理解析で積み残された課題は多数ある．そのうち，本稿で述べた内容の次のステップとして (a) より対称性が低いグラフ上における集積形成メカニズムの分析と競技場経済との比較，(b) 都市内–都市間の階層構造を持つ空間経済における大域安定パターンの特性，(c) 多数種類の主体が存在する経済におけるソーティングと都市規模分布の冪則の関係，を筆者の考える重要課題として挙げ，本小論を閉じたい．

謝辞：　経験の頗る浅い筆者に招待論文執筆の機会という身に余る名誉を与えて下さいました土木計画学研究委員会に深く御礼申し上げます．論文奨励賞の受賞論文『Harris & Wilson (1978) モデル再考：集積の経済を考慮した商業立地 モデル分岐解析』は，東北大学赤松隆教授・金沢大学高山雄貴准教授との共同研究の一部です．特に，赤松教授には，筆者の学部生時代から博士課程修了までの長年にわたり的確かつ丁寧な研究指導を賜りましたこと，深甚たる感謝の意を表します．また，研究テーマが深く関連する高山准教授をはじめ，東北大学長江剛志准教授・東京大学和田健太郎助教など，赤松研究室の諸先輩方には折に触れて様々の叱咤激励を頂きました．更に，東北大学池田清宏教授，東北大学河野達仁教授，京都大学森知也教授をはじめ，ここに挙げ切れない多くの方々から貴重なご意見・ご助言を頂きつつ歩んで参りました．ここに記して，感謝申し上げるとともに，今後とも変わらぬご指導とご鞭撻をお願い申し上げます．

参考文献

1) Ahlfeldt, G. M., Redding, S. J., Sturm, D. M. and Wolf, N.: The economics of density: Evidence from the berlin wall, *Econometrica*, Vol. 83, No. 6, pp. 2127–2189, 2015.
2) Akamatsu, T., Mori, T., Osawa, M. and Takayama, Y.: Spatial scale of agglomeration and dispersion: Theoretical foundations and empirical implications, MPRA Paper No. 80689, 2017.
3) Akamatsu, T., Takayama, Y. and Ikeda, K.: Spatial discounting, fourier, and racetrack economy: A recipe for the analysis of spatial agglomeration models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 36, No. 11, pp. 1729–1759, 2012.
4) Allen, T. and Arkolakis, C.: Trade and the topography of the spatial economy, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 129, No. 3, pp. 1085–1140, 2014.
5) Beckmann, M. J.: Spatial equilibrium in the dispersed city, in Papageorgiou, Y. Y. ed., *Mathematical Land Use Theory*, Lexington Book, 1976.
6) Beckmann, M., McGuire, C. B. and Winsten, C. B.: *Studies in the Economics of Transportation*, Yale University Press, 1956.
7) Blanchet, A., Mossay, P. and Santambrogio, F.: Existence and uniqueness of equilibrium for a spatial model of social interactions, *International Economic Review*, Vol. 57, No. 1, pp. 36–60, 2016.
8) Bröcker, J. and Mercenier, J.: General equilibrium

models for transportation economics, in Palma, de A., Lindsey, R., Quinet, E. and Vickerman, R. eds., *A Handbook of Transport Economics*, pp. 21–45, Edward Elgar Cheltenham, 2011.

9) Desmet, K., Nagy, D. K. and Rossi-Hansberg, E.: The geography of development, *Journal of Political Economy*, Vol. forthcoming, , 2017.
10) Desmet, K. and Rossi-Hansberg, E.: Spatial development, *American Economic Review*, Vol. 104, No. 4, pp. 1211–1243, 2014.
11) Eaton, J. and Kortum, S.: Technology, geography, and trade, *Econometrica*, Vol. 70, No. 5, pp. 1741–1779, 2002.
12) Fajgelbaum, P. D. and Schaal, E.: Optimal transport network in spatial equilibrium, NBER Working Paper 19492, 2017.
13) Forslid, R. and Ottaviano, G. I. P.: An analytically solvable core-periphery model, *Journal of Economic Geography*, Vol. 33, No. 3, pp. 229–240, 2003.
14) Fujita, M. and Ogawa, H.: Multiple equilibria and structural transformation of non-monocentric urban configurations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 12, pp. 161–196, 1982.
15) Guckenheimer, J. and Holmes, P. J.: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
16) Harris, B. and Wilson, A. G.: Equilibrium values and dynamics of attractiveness terms in production-constrained spatial-interaction models, *Environment and Planning A*, Vol. 10, No. 4, pp. 371–388, 1978.
17) Harris, R.: Applied general equilibrium analysis of small open economies with scale economies and imperfect competition, *The American Economic Review*, Vol. 74, No. 5, pp. 1016–1032, 1984.
18) Helpman, E.: The size of regions, in Pines, D., Sadka, E. and Zilcha, I. eds., *Topics in Public Economics: Theoretical and Applied Analysis*, pp. 33–54, Cambridge University Press, 1998.
19) Hirsch, M. W., Smale, S. and Devaney, R. L.: *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Academic press, 2012.
20) Ikeda, K., Akamatsu, T. and Kono, T.: Spatial period–doubling agglomeration of a core–periphery model with a system of cities, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 36, No. 5, pp. 754–778, 2012.
21) Ikeda, K., Onda, M. and Takayama, Y.: Bifurcation theory of a racetrack economy in a spatial economy model, Unpublished manuscript, 2017.
22) Kandori, M., Mailath, G. J. and Rob, R.: Learning, mutation, and long run equilibria in games, *Econometrica*, pp. 29–56, 1993.
23) Kotani, H.: *Evaluation of the Function of Local Assets on the Formation of Social Networks and a Resident's Identity*, PhD thesis, Doctoral Dissertation, Graduate School of Engineering, Department of Urban Management, Kyoto University, 2016.
24) Krugman, P.: Increasing returns and economic geography, *Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 3, pp. 483–499, 1991.
25) Krugman, P. R.: Increasing returns and economic geography, *Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 3, pp. 483–499, 1991.
26) Kuznetsov, Y. A.: *Elements of Applied Bifurcation Theory (3rd Eds.)*, Springer-Verlag, 2004.
27) Matsuyama, K.: Geography of the world economy, Unpublished manuscript, 1999.
28) Mossay, P. and Picard, P. M.: On spatial equilibria in a social interaction model, *Journal of Economic Theory*, Vol. 146, No. 6, pp. 2455–2477, 2011.
29) Murata, Y. and Thisse, J.-F.: A simple model of economic geography à la Helpman–Tabucbi, *Journal of Urban Economics*, Vol. 58, No. 1, pp. 137–155, 2005.
30) Osawa, M.: *Monocentric and Polycentric Patterns in the Spatial Economy: A Unification of Intra-city and Inter-regional Theories*, PhD thesis, Doctoral Dissertation, Graduate School of Information Sciences, Tohoku University, 2016.
31) Osawa, M. and Akamatsu, T.: Emergence of urban landscape: Equilibrium selection in a location choice game, Unpublished manuscript, 2017.
32) Osawa, M. and Akamatsu, T.: On stable spatial equilibria in a social interaction model, Unpublished manuscript, 2017.
33) Osawa, M., Akamatsu, T. and Takayama, Y.: Harris and wilson (1978) model revisited: The spatial period-doubling cascade in an urban retail model, *Journal of Regional Science*, Vol. 57, No. 3, pp. 442–466, 2017.
34) Oyama, D.: Agglomeration under forward-looking expectations: Potentials and global stability, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 39, No. 6, pp. 696–713, 2009.
35) Oyama, D.: History versus expectations in economic geography reconsidered, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 33, No. 2, pp. 394–408, 2009.
36) Papageorgiou, Y. Y. and Smith, T. R.: Agglomeration as local instability of spatially uniform steady-states, *Econometrica*, Vol. 51, No. 4, pp. 1109–1119, 1983.
37) Papageorgiou, Y. Y. and Thisse, J.-F.: Agglomeration as spatial interdependence between firms and households, *Journal of Economic Theory*, Vol. 37, No. 1, pp. 19–31, 1985.
38) Pflüger, M.: A simple, analytically solvable, chamberlinian agglomeration model, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 34, No. 5, pp. 565–573, 2004.
39) Pflüger, M. and Südekum, J.: Integration, agglomeration and welfare, *Journal of Urban Economics*, Vol. 63, No. 2, pp. 544–566, 2008.
40) Puga, D.: The rise and fall of regional inequalities, *European Economic Review*, Vol. 43, No. 2, pp. 303–334, 1999.
41) Redding, S. J. and Rossi-Hansberg, E.: Quantitative spatial economics, *Annual Review of Economics*, Vol. 9, pp. 21–58, 2017.
42) Redding, S. J. and Sturm, D.: The cost of remoteness: Evidence from german division and reunification, *American Economic Review*, Vol. 98, No. 5, pp. 1766–1797, 2008.
43) Sandholm, W. H.: Orders of limits for stationary distributions, stochastic dominance, and stochastic stability, *Theoretical Economics*, Vol. 5, No. 1, pp. 1–26, 2010.
44) Sandholm, W. H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, 2010.
45) Shittaka, Y. and Nagae, T.: An evolutionary game model and MCMC estimation for analyzing stochastic properties of traffic state on a road network, *IEEE International Conference on Agents 2016, Matsue, Japan*, pp. 82–85, 2016.

46) Tabuchi, T.: Urban agglomeration and dispersion: A synthesis of alonso and krugman, *Journal of Urban Economics*, Vol. 44, No. 3, pp. 333–351, 1998.
47) Wallace, C. and Young, H. P.: Chapter 6 - stochastic evolutionary game dynamics, Vol. 4 of *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, pp. 327 – 380, Elsevier, 2015.
48) 久武昌人, 山崎清：独占的競争等を取り入れた多地域 CGE モデルの開発, *RIETI Discussion Paper Series*, pp. NO. 06–J–046, 2006.
49) 高山雄貴：空間経済システムにおける経済集積のパターン形成メカニズム, 土木学会論文集 D3(土木計画学), Vol. 69, No. 5, pp. I31–I46, 2013.
50) 高山雄貴, 赤松隆：空間競争を考慮した Social Interaction モデルによる複数都心の創発, 土木学会論文集 D3, Vol. 67, No. 1, pp. 1–20, 2011.
51) 高山雄貴, 赤松隆, 石倉智樹：新経済地理学に基づく空間応用一般均衡モデルの開発, 土木学会論文集 D3(土木計画学), Vol. 70, No. 4, pp. 245–258, 2014.
52) 高山雄貴, 赤松隆, 石倉智樹：生産要素の地域間移動と集積の経済を考慮した空間応用一般均衡モデルの開発, 土木学会論文集 D3, Vol. 72, No. 2, pp. 211–230, 2016.
53) 小林潔司：知識生産と企業の立地均衡に関する理論的研究, 土木学会論文集, No. 395/IV-9, pp. 95–104, 1988.
54) 上田孝行, 松葉保孝：都市群システムにおける構造の安定性と変化に関するモデル分析, 土木学会論文集, No. 542/IV-32, pp. 33–44, 1996.
55) 織田澤利守, 赤松隆：集積経済下における地域間移住タイミング選択の均衡ダイナミクス, 土木学会論文集 D, Vol. 63, No. 4, pp. 567–578, 2007.
56) 赤松隆, 高山雄貴, 池田清宏, 菅澤晶子, 佐藤慎太郎：1 次元多都市システムにおける人口集積パターンの創発メカニズム, 土木学会論文集 D, Vol. 66, No. 4, pp. 442–460, 2010.
57) 大澤実, 赤松隆：Stochastic stability analysis of a model of endogenous urban subcenter formation, 土木計画学研究・講演集 (CD-ROM), Vol. 55, , 2016.
58) 大澤実, 赤松隆：集積経済理論の実証におけるモデル構造選択の課題, 土木学会論文集 D3(土木計画学), Vol. 73, No. 1, pp. 1–15, 2017.
59) 大澤実, 赤松隆, 高山雄貴：Harris & Wilson (1978) モデル再考：集積の経済を考慮した商業立地モデルの分岐解析, 土木学会論文集 D3(土木計画学), Vol. 71, No. 3, pp. 141–155, 2015.
60) 石倉智樹：人口減少に伴う都市の縮退と集積に関する基礎的定量分析, 都市計画論文集, Vol. 47, No. 1, pp. 68–73, 2012.
61) 池田清宏, 河野達仁, 赤松隆, 柳本彰仁, 八巻俊二：都市の集積・分散モデルの対称性破壊分岐：群論的分岐理論によるアプローチ, 土木学会論文集 D, Vol. 63, No. 4, pp. 553–566, 2007.
62) 土木学会：交通ネットワークの均衡分析：最新の理論と解法, 土木学会, 1998.
63) 藤田昌久, ジャック・F・ティス：集積の経済学：都市，産業立地，グローバル化, 東洋経済新報社, 2017, (Fujita, M. and Thisse, J.-F., Economics of Agglomeration: Cities, Industrial Location, and Globalization (2nd Edition), Cambridge University Press, 2013.).
64) 力石真, 西川文人, 瀬谷創, 藤原章正, 張峻屹：非市場的相互作用を考慮した住宅地区住民の買物目的地選択行動のモデル分析, 土木学会論文集 D3(土木計画学), Vol. 72, No. 5, pp. I595–I605, 2016.

AN INVITATION TO ECONOMIC THEORIES OF SPATIAL PATTERN FORMATION: FLUITS OF ANALYSES IN AN IDEALIZED ECONOMY

Minoru OSAWA

Racetrack economy provides an ideal testbed for elucidating mathematical properties of spatial economic models with endogenenous agglomeration, or *spatial agglomeration models*. Local and global stability analyses of equilibria of these models on the geographical setup allow one to reduce the models in the literature into three major categories based on the nature of the assumed dispersion force(s). The resultant classification has strong implications regarding how one should interpret the counterfactuals reported in the context of the so-called "quantitative spatial economics."