

交通量の確実性等価を考慮した 利用者均衡配分モデル

峪 龍一¹・内田 賢悦²

¹学生会員 北海道大学大学院 工学院 (〒060-8628 北海道札幌市北区北13条西8丁目)
E-mail:ryuichitani@eis.hokudai.ac.jp

³正会員 北海道大学大学院 工学研究院 (〒060-8628 北海道札幌市北区北13条西8丁目)
E-mail:uchida@eis.hokudai.ac.jp

本研究では、交通需要の不確実性を考慮した道路ネットワークにおける交通量配分モデルを提案する。提案するモデルでは、確率的な交通量の確実性等価を考えることによって、リンクコストを確定値によって代表させる。したがって、標準的な確定的利用者均衡配分モデルにおいて、交通量の不確実性を扱うことが可能となる。最後に、テストネットワークを用いた数値計算の結果を示し、提案するモデルの妥当性を検証する。

Key Words : *travel time reliability, user equilibrium assignment model, certainty equivalent, stochastic traffic demand*

1. はじめに

移動時間信頼性を考慮した数多くの交通量配分モデルが提案されている。多くの研究では交通需要の不確実性を扱うことによって、移動時間の不確実性を表現している。交通需要の不確実性を表現するため、これまで様々な確率分布が適用されてきた。Clark and Watling¹⁾はポアソン分布を、Nakayama and Takayama²⁾は二項分布を提案している。中でも、多くの研究において正規分布が採用されている。(例えば: Lam et al.³⁾; Uchida⁴⁾) 交通需要として正規分布を仮定するとき、正規分布の加法性によって、交通流の定式化は容易である。しかし、BPR関数等を用いて、確率的リンク移動時間を定式化するとき、正規分布のモーメントを得るために近似計算が必要となる。また、分布形状が非対称かつ常に非負の値をとることから、より現実的な交通現象を表しているとして、交通需要として対数正規分布を仮定する研究(例えば: Zhou and Chen⁵⁾; Sumalee and Xu⁶⁾)が存在する。対数正規分布では、正規分布の場合とは逆に、確率的リンク移動時間の定式化における近似計算は不要である。ただし、対数正規分布には加法性が保証されないため、交通流の定式化における近似計算が必要となる。そのため、いずれかの確率分布を採用する場合、近似計算が要求される。

さらに、近年、確率的な交通量あるいは移動時間の分布形状を特定することなく、交通量を配分するモデルが

提案されている。Qi et al.⁷⁾は確率的な移動時間の確実性等価を考慮した移動時間選好について議論している。ただし、交通量に関する不確実性の考慮が十分になされていない。

そこで本研究では、確実性等価の概念を交通流と移動時間の定式化部分に適用した利用者均衡配分モデルを提案する。確率的リンク交通量の確実性等価を考えることによって、リンク移動時間を交通量の不確実性を考慮した確定値として扱えるようになる。したがって、標準的な確定的利用者均衡配分モデルにおいて、確率的な交通需要を扱うことが可能となる。

2. 定式化

(1) 記号

本稿で使用する記号は以下の通りである。なお、確率変数は大文字、確定変数は小文字で示している。

Q_w :	ODペア w 間の確率的交通需要
q_w :	ODペア w 間の確率的交通需要の平均
$VMR_{w,:}$:	ODペア w 間の確率的交通需要の平均分散比
$F_{w,k}$:	ODペア w 間を通る経路 k の確率的交通量
$f_{w,k}$:	ODペア w 間を通る経路 k の確率的交通量の平均
V_a :	リンク a の確率的交通量
v_a :	リンク a の確率的交通量の平均

v_a^o : リンク a の確率的交通量の確実性等価
 c_a : リンク a の確率的交通容量
 $\delta_{w,k,a}$: リンク a が経路 k を含むとき 1 をとり、それ以外のとき 0 をとる変数

(2) 交通量の定式化

本研究では、確率的な交通需要（たとえば、正規分布など）を仮定する。ODペア w 間の確率的交通需要 Q_w の平均は $E[Q_w]=q_w$ 、分散は平均分散比 VMR_w を用いて、 $\text{var}[Q_w]=q_w \cdot VMR_w$ で与える。

(3) リンク交通量の確実性等価

一般に、確率変数 X と効用関数 $u(X)$ を考えるとき、

$$E[u(X)] = u(x_o) \quad (1)$$

となる x_o は X の確実性等価である⁸⁾。つまり、確率変数 X の確実性等価とは、効用関数の期待値を与える確定値である。ここで、確実性等価の概念を確率的な道路ネットワークに適用する。例えば、リンク交通量が確率変数として与えられるとき、リンク移動時間の期待値を与えるリンク交通量の確実性等価が求まる。ここで、リンク移動時間が以下のようなBPR関数によって与えられるものとする。

$$t_a(v_a, c_a) = t_a^0 \cdot \left(1 + \alpha_a \cdot \left(\frac{v_a}{c_a} \right)^n \right) \quad (2)$$

ここで、式(2)は以下の条件を満たす。

$$\frac{dt_a}{dv_a} > 0, \quad \frac{d^2t_a}{dv_a^2} \geq 0 \quad (3)$$

ドライバーにとって、移動時間は不効用である。そのため、リンクを通行する際の不効用はリンク移動時間を用いて以下のように表現できる。

$$u(v_a) = -t(v_a) \quad (4)$$

式(1)、(4)より、確率的リンク交通量の確実性等価を以下のように定める。

$$\begin{aligned} E[u(V_a)] &= u(v_a^o) \\ \Leftrightarrow E[-t_a(V_a)] &= -t_a(v_a^o) \\ \Leftrightarrow E[t_a(V_a)] &= t_a(v_a^o) \end{aligned} \quad (5)$$

また、確率的リンク交通量 V_a は、確定項 v_a と確率項 ε_a に分離できる。

$$V_a = v_a + \varepsilon_a \quad (6)$$

ここで、確率的リンク交通量のリスクプレミアム、 $-\pi_a$ は以下のように定義できる。

$$-\pi_a = v_a - v_a^o \quad (7)$$

リスクプレミアムを用いて、式(7)は式(5)、(6)より、以下のように書き換えられる。

$$E[t_a(v_a + \varepsilon_a)] = t_a(v_a + \pi_a) \quad (8)$$

式(8)の左辺と右辺のそれぞれについて、2次の Taylor 近似を施すと、式(9)、(10)のようになる。

$$\begin{aligned} E[t_a(v_a + \varepsilon_a)] &\approx E \left[t_a(v_a) + t_a'(v_a) \cdot \varepsilon_a \right. \\ &\quad \left. + t_a''(v_a) \cdot \frac{(\varepsilon_a)^2}{2} \right] \\ &= t_a(v_a) + t_a''(v_a) \cdot \frac{\text{var}[\varepsilon_a]}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

$$t_a(v_a + \pi_a) \approx t_a(v_a) - t_a'(v_a) \cdot \pi_a \quad (10)$$

式(9)、(10)より、 π_a は以下のように求まる。

$$\pi_a = -\frac{t_a'(v_a)}{t_a''(v_a)} + \sqrt{\left(\frac{t_a'(v_a)}{t_a''(v_a)} \right)^2 + VMR \cdot v_a} \quad (11)$$

したがって、確率的リンク交通量の確実性等価は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} v_a^o &= v_a + \pi_a \\ &= v_a - \frac{t_a'(v_a)}{t_a''(v_a)} + \sqrt{\left(\frac{t_a'(v_a)}{t_a''(v_a)} \right)^2 + VMR \cdot v_a} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、リンク交通量の分散が 0 に近づくとき、すなわちリンク交通量が確定値に近づくとき、 π_a は 0 に収束することに注意が必要である。

$$\lim_{\text{var}[V_a] \rightarrow 0} \pi_a = 0 \quad (13)$$

したがって、以上の確実性等価の概念を標準的な確定的利用者均衡配分モデルに適用できる。

$$\min \sum_{a \in A} \int_0^{v_a^o} t_a(w) dw \quad (14)$$

w.r.t

$$v_a \quad \forall a \in A \quad (15)$$

s.t

$$\sum_{k \in K_w} f_{k,w} = q_w \quad \forall w \in W \quad (16)$$

$$v_a = \sum_{w \in W} \sum_{k \in K_w} f_{k,w} \cdot \delta_{w,k,a} \quad \forall a \in A \quad (17)$$

where

$$v_a^o = v_a + \pi_a(v_a) \quad (18)$$

確率的リンク交通量のリスクプレミアムについて、BPR関数を例とした、具体的な導出過程を付録に示す。確率的リンク交通量の不確実性部分はリスクプレミアムに相当する。つまり、本研究が提案するモデルではリンク交通量の不確実性をリンク交通量の平均に対するリンク交通量の増分として扱えることを意味する。

(4) リンク間の確率的相関を考慮した確率的リンク移動時間

2.(3)までにおける経路選択行動は経路移動時間の平均に基づいている。しかし、ドライバーのリスク回避的な経路選択行動をモデルに反映させるためには、移動時間の分散を定式化する必要がある。また、上記までの定式化では、確率的リンク移動時間についてリンク間の統計的独立を仮定していた。しかし、現実的な交通量配分を実現するためにはリンク間の確率的な相関を考慮する必要がある。そこで、リンク移動時間の分散・共分散が求まるよう、上記までの定式化を拡張する。

まず、確率的リンク移動時間の分散を求めるにあたって、式(8)と同様に、確率的リンク移動時間の2次のモーメントを式(9)と式(10)のように、2次のTaylor近似を通じて求める。

$$E[t_a^2(v_a + \varepsilon_a)] = t_a^2(v_a + \tilde{\pi}_a) \quad (19)$$

ここで、 $\tilde{\pi}_a$ はリンク移動時間の2次のモーメントを与える、リンク交通量の増分である。式(19)の左辺と右辺はそれぞれ以下のように近似できる。

$$E[t_a^2(v_a + \varepsilon_a)] \approx t_a^2(v_a) + \left(t_a''(v_a) \cdot t_a(v_a) + (t_a'(v_a))^2 \right) \cdot \text{var}[V_a] \quad (20)$$

$$t_a^2(v_a + \tilde{\pi}_a) \approx t_a^2(v_a) + 2t_a'(v_a) \cdot t_a(v_a) \cdot \tilde{\pi}_a + \left(t_a''(v_a) \cdot t_a(v_a) + (t_a'(v_a))^2 \right) \cdot \tilde{\pi}_a^2 \quad (21)$$

上式を解くと、 $\tilde{\pi}_a$ は以下のように求まる。

$$\tilde{\pi}_a = - \frac{t_a'(v_a) \cdot t_a(v_a)}{t_a''(v_a) \cdot t_a(v_a) + (t_a'(v_a))^2} + \sqrt{\left(\frac{t_a'(v_a) \cdot t_a(v_a)}{t_a''(v_a) \cdot t_a(v_a) + (t_a'(v_a))^2} \right)^2 + \text{var}[V_a]} \quad (22)$$

なお、式(22)について、式(13)と同様な関係が得られる。

$$\lim_{\text{var}[V_a] \rightarrow 0} \hat{\pi}_a = 0 \quad (23)$$

次に、式(19)-(21)を基として、確率的リンク移動時間の共分散を確実性等価の概念を用いて求める。2種類のリンクについて、式(19)と同様に、以下のような対応関係

を得る。

$$E[t_a(v_a + \varepsilon_a) \cdot t_b(v_b + \varepsilon_b)] = t_a(v_a + \tilde{\pi}_a) \cdot t_b(v_b + \tilde{\pi}_b) \quad (24)$$

ここで、 $\tilde{\pi}_i \quad \forall i \in \{a, b\}$ はリンク間のリンク移動時間の相関を与えるリンク交通量の増分である。式(24)の左辺と右辺のそれぞれに対して、2次のTaylor近似を施す。

$$E[t_a(v_a + \varepsilon_a) \cdot t_b(v_b + \varepsilon_b)] \approx t_a(v_a) \cdot t_b(v_b) + \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} & t_a'(v_a) \cdot t_b(v_b) \cdot \text{var}[V_a] \\ & + 2t_a'(v_a) \cdot t_b'(v_b) \cdot \text{cov}[V_a, V_b] \\ & + t_b''(v_b) \cdot t_a(v_a) \cdot \text{var}[V_b] \end{aligned} \right) \quad (25)$$

$$t_a(v_a + \tilde{\pi}_a) \cdot t_b(v_b + \tilde{\pi}_b) = t_a(v_z) \cdot t_b(v_b) + \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} & t_a''(v_a) \cdot t_b(v_b) \cdot \left(\tilde{\pi}_a^2 + \frac{t_a'(v_a)}{t_a''(v_a)} \cdot \tilde{\pi}_a \right) \\ & + t_b''(v_b) \cdot t_a(v_a) \cdot \left(\tilde{\pi}_b^2 + \frac{t_b'(v_b)}{t_b''(v_b)} \cdot \tilde{\pi}_b \right) \end{aligned} \right) \quad (26)$$

ここで、リンク間の交通量が統計的に互いに独立であるとき、すなわち異なる2つのリンク a と b について、 $\text{cov}[V_a, V_b] = 0$ であるとき、 $\tilde{\pi}_i$ は π_i と等しくなる。

$$E[t_a(v_a + \varepsilon_a) \cdot t_b(v_b + \varepsilon_b)] = t_a(v_a + \tilde{\pi}_a) \cdot t_b(v_b + \tilde{\pi}_b) \Leftrightarrow t_a(v_a) \cdot t_b(v_b)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} & t_a'(v_a) \cdot t_b(v_b) \cdot \text{var}[V_a] \\ & + 2t_a'(v_a) \cdot t_b'(v_b) \cdot \text{cov}[V_a, V_b] \\ & + t_b''(v_b) \cdot t_a(v_a) \cdot \text{var}[V_b] \end{aligned} \right)$$

$$= t_a(v_z) \cdot t_b(v_b)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} & t_a''(v_a) \cdot t_b(v_b) \cdot \left(\tilde{\pi}_a^2 + \frac{t_a'(v_a)}{t_a''(v_a)} \cdot \tilde{\pi}_a \right) \\ & + t_b''(v_b) \cdot t_a(v_a) \cdot \left(\tilde{\pi}_b^2 + \frac{t_b'(v_b)}{t_b''(v_b)} \cdot \tilde{\pi}_b \right) \end{aligned} \right)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\pi}_a = \pi_a, \tilde{\pi}_b = \pi_b$$

(27)

次に、リンク間の交通量が統計的に互いに相関をもつとき、すなわち異なる2つのリンク a と b について、 $\text{cov}[V_a, V_b] \neq 0$ であるときを考える。 $\tilde{\pi}_i$ を式(11)において得られる π_i とその増加分 $\delta\pi_i$ を用いて、以下のように定義する。

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i + \delta\pi_i \quad \forall i \in \{a, b\} \quad (28)$$

式(24)の右辺を $\delta\pi_i$ について、2次のTaylor近似を施す。

$$t_a(v_a + \tilde{\pi}_a) \cdot t_b(v_b + \tilde{\pi}_b) \approx \left(t_a(v_a + \pi_a) + t_a'(v_a + \pi_a) \cdot \delta\pi_a \right) \cdot \left(t_b(v_b + \pi_b) + t_b'(v_b + \pi_b) \cdot \delta\pi_b \right) \quad (29)$$

ここで、 π_i についてはリンク交通量についてリンク間に相関が存在しないことから、式(24)、(25)より以下の関係を得る。

$$t_a(v_a + \pi_a) \cdot t_b(v_b + \pi_b) = t_a(v_a) \cdot t_b(v_b) + \frac{1}{2} \left(t_a'(v_a) \cdot t_b(v_b) \cdot \text{var}[V_a] + t_b''(v_b) \cdot t_a(v_a) \cdot \text{var}[V_b] \right) \quad (30)$$

式(24)は式(30)より、以下のように対応する。

$$E[t_a(v_a + \varepsilon_a) \cdot t_b(v_b + \varepsilon_b)] = t_a(v_a + \tilde{\pi}_a) \cdot t_b(v_b + \tilde{\pi}_b) \Leftrightarrow t_a(v_a) \cdot t_b(v_b) + \frac{1}{2} \left(t_a'(v_a) \cdot t_b(v_b) \cdot \text{var}[V_a] + 2t_a'(v_a) \cdot t_b'(v_b) \cdot \text{cov}[V_a, V_b] + t_b''(v_b) \cdot t_a(v_a) \cdot \text{var}[V_b] \right) = t_a(v_a) \cdot t_b(v_b) + \frac{1}{2} \left(t_a'(v_a) \cdot t_b(v_b) \cdot \text{var}[V_a] + t_b''(v_b) \cdot t_a(v_a) \cdot \text{var}[V_b] \right) + t_a(v_a + \pi_a) \cdot t_b(v_b + \pi_b) \cdot \delta\pi_b + t_b(v_b + \pi_b) \cdot t_a(v_a + \pi_a) \cdot \delta\pi_a + t_a'(v_a + \pi_a) \cdot \delta\pi_a \cdot t_b'(v_b + \pi_b) \cdot \delta\pi_b \Leftrightarrow t_a'(v_a) \cdot t_b(v_b) \cdot \text{cov}[V_a, V_b] = t_a(v_a + \pi_a) \cdot t_b(v_b + \pi_b) \cdot \delta\pi_b + t_b(v_b + \pi_b) \cdot t_a(v_a + \pi_a) \cdot \delta\pi_a + t_a'(v_a + \pi_a) \cdot \delta\pi_a \cdot t_b'(v_b + \pi_b) \cdot \delta\pi_b \quad (31)$$

ここで、式(31)は以下のようにまとめることができる。

$$c \cdot \delta\pi_a \cdot \delta\pi_b - a \cdot \delta\pi_a + d \cdot \delta\pi_b - b = 0 \quad (32)$$

where

$$a = -t_b(v_b + \pi_b) \cdot t_a'(v_a + \pi_a) \quad (33)$$

$$b = t_b'(v_a) \cdot t_b'(v_b) \cdot \text{cov}[V_a, V_b] \quad (34)$$

$$c = t_a'(v_a + \pi_a) \cdot t_b'(v_b + \pi_b) \quad (35)$$

$$d = t_a(v_a + \pi_a) \cdot t_b'(v_b + \pi_b) \quad (36)$$

道路ネットワーク全体における確率的リンク交通量の平均および分散・共分散が観測等によって所与であるとき、式(33)-(36)は定数として扱える。このとき、式(32)は直角双曲線に相当する。ただし、 $\delta\pi_a \cdot \delta\pi_b$ が無視できるほど小さく、かつ式(32)の左辺第2項と第3項が等しいと仮定するとき、 $\delta\pi_a$ と $\delta\pi_b$ は一意に定まる。

$$\delta\pi_a = -\frac{b}{2a}, \delta\pi_b = \frac{b}{2d} \quad (37)$$

3. 数値計算

提案するモデルの妥当性を検証するため、テストネットワークを対象とした数値計算を行った。本研究では、2.(3)で示すように、経路移動時間の平均に基づく経路選択を仮定している。また、リンク間の交通量が統計的に独立である道路ネットワークを想定している。Nguyen and Dupuis⁹⁾から、4組のODペアと19本のリンクからなるテストネットワークを使用した(図-2)。各ODペアにおけるOD交通量の平均とVMRを表-1に示す。なお、いずれの交通需要も正規分布にしたがうものと仮定している。

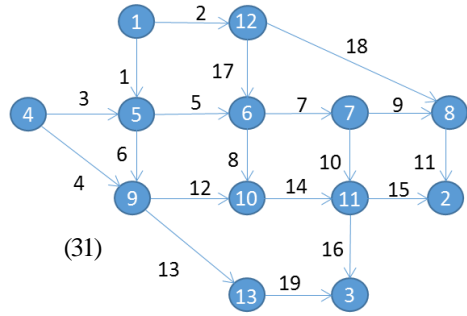


図-2テストネットワーク

表-1 OD交通量

O-D ペア	平均 [pcu/時間]	VMR
(1,2)	1000	50
(4,2)	1000	50
(1,3)	1000	50
(4,3)	1000	50

(2)におけるパラメータ、 α_a , n はすべてのリンクにおいてそれぞれ2と6である。すべてのリンクにおける自由走行時間は0.05[時間]であり、リンク交通容量は1000[pcu/時間]である。配分されたリンク交通量のうち、リンク1から7までを抽出して図-3に示す。図-3より、各交通需要についてVMR=0のとき、すなわち確定的な交通需要を仮定するとき、VMR=50のときでは、配分されたリンク交通量の期待値が変化していることがわかる。これはVMR=50のときには、リンク交通量の確実性等価に基づき、リンクコストが評価されて、交通量が配分されているためである。

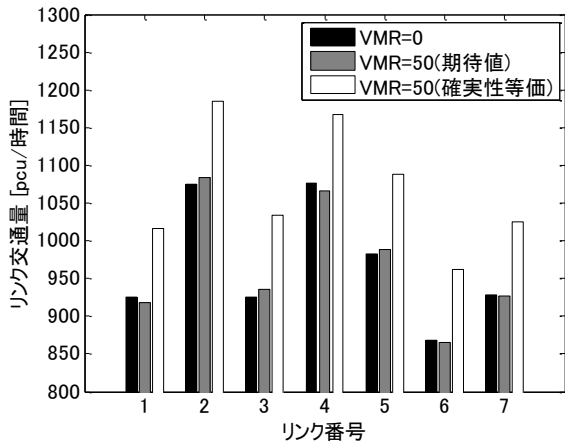


図-3 リンク交通量

4. まとめ

本研究では、交通量ならびに移動時間が不確実な道路ネットワークにおいて、確実性等価の概念を用いて交通量の不確実性を考慮する利用者均衡配分モデルを提案した。交通需要が確率的に変動する道路ネットワークを対象とした、従来の研究において提案された交通量配分モデルでは、確率変数を扱う中で、様々な近似計算を必要とした。しかし、確実性等価の概念を導入することによって、交通需要の不確実性を反映した確定的なリンク移動時間が定式化できるため、標準的な利用者均衡配分モデルにおいても、確率的な交通需要を想定することが可能となる。また、リンク移動時間の分散・共分散を確実性等価の概念を用いて記述できることを示した。

付録

リンクコスト関数のリンク交通量に関する一階微分、二階微分はそれぞれ以下の通りである。

$$t'_a(v_a) = t_a^o \cdot \alpha_a \cdot n \cdot v_a^{n-2} \cdot c_a^{-n} \quad (A1)$$

$$t''_a(v_a) = t_a^o \cdot \alpha_a \cdot n \cdot (n-1) v_a^{n-2} \cdot c_a^{-n} \quad (A2)$$

したがって、確率的リンク移動時間のリスクプレミアムは以下のように求まる。

$$\pi_a(v_a) = -\frac{v_a}{n-1} + \sqrt{\left(\frac{v_a}{n-1}\right)^2 + VMR \cdot v_a} \quad (A3)$$

なお、3.における数値計算と同様に、式(A3)における n と VMR_w をそれぞれ6と50とするとき、確率的リンク交通量の確実性等価とその期待値との関係は図-4のようになる。

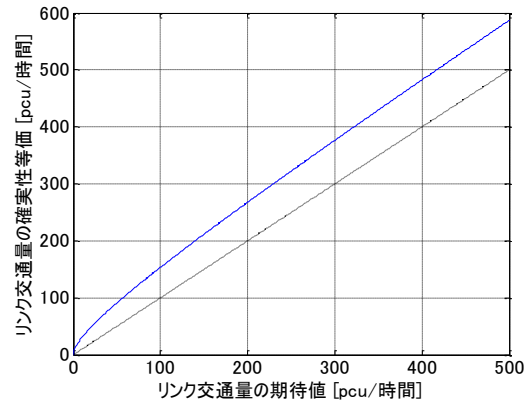


図-4 確率的リンク交通量の確実性等価

図-4より、2つの曲線の差が確率的リンク交通量のリスクプレミアム、すなわち確率的リンク交通量の不確実性部分に相当していることがわかる。

参考文献

- 1) Clark, S. & Watling, D. (2005), Modeling network travel time reliability under stochastic demand, *Transportation Research Part B*, 39 (2), 119-140.
- 2) Nakayama, S. & Takayama, J. (2003), Traffic network equilibrium model for uncertain demands, in *Proceedings of the 82nd Annual Meeting of the Transportation Research Board*, Washington DC.
- 3) Lam, W.H.K., Shao, H. & Sumalee, A. (2008), Modeling impacts of adverse weather conditions on a road network with uncertainties in demand and supply, *Transportation Research Part B*, 42 (10), 890-910.
- 4) Uchida, K. (2015), Travel time reliability estimation model using observed link flows in a road network, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 30 (6), 449-463.
- 5) Zhou, Z. & Chen, A. (2008), Comparative analysis of three user equilibrium models under stochastic demand, *Journal of Advanced Transportation*, 42 (3), 239-263.
- 6) Sumalee, A. & Xu, W. (2011), First-best marginal cost toll for a traffic network with stochastic demand, *Transportation Research Part B*, 45 (1), 41-59.
- 7) Qi, J., Sim, M., Sun, D. & Yuan, X. (2016) Preferences for travel time under risk and ambiguity: Implications in path selection and network equilibrium, *Transportation Research Part B*, 94, 264-284.
- 8) 池田昌幸, 金融経済学の基礎, 朝倉書店
- 9) Nguyen, S. & Dupuis, C. (1984), An efficient method for computing traffic equilibria in networks with asymmetric transportation costs, *Transportation Science*, 18 (2), 185-202.

(2017. 7. 31 受付)

USER EQUILIBRIUM ASSIGNMENT MODEL CONSIDERING CERTAINTY EQUIVALENT TRAFFIC FLOW

Ryuichi TANI, Teppei KATO and Kenetsu UCHIDA

This study proposed a new user equilibrium assignment model which considers certainty equivalent traffic flow. In the proposed model, the link travel cost is determined by the certainty equivalent of stochastic traffic flow. Thus, the standard user equilibrium assignment model enables to deal with the uncertainty of traffic flow without the specific approximation method used in previous studies. Finally, numerical calculation in a test network demonstrate the validity of the proposed model.