固有ベクトル中心性の概念を拡張したネットワーク分割手法の提案

若林 桂汰[1]・小林 俊一[2]・中山 晶一朗[3]

[1]学生会員　金沢大学大学院　自然科学研究科環境デザイン学専攻 (〒 920-1192 石川県金沢市角間町)
E-mail: wakakei1989@gmail.com
[2]正会員　博士　(工)　金沢大学准教授　理工学域環境デザイン学系 (同上)
E-mail: koba@se.kanazawa-u.ac.jp
[3]正会員　博士　(工)　金沢大学教授　理工学域環境デザイン学系 (同上)
E-mail: nakayama@staff.kanazawa-u.ac.jp

本論文は，道路ネットワーク情報を集約する方法の一つとして，対象地域を複数のサブエリアに分割する方法論について論じたものである．まずネットワークの隣接行列とそれに基づく固有ベクトル中心性の概念を拡張し，距離による重みを考慮した修正隣接行列を導入した．この修正隣接行列に固有ベクトル中心性に基づき各エリアを代表する複数の中心性ノード抽出方法，および中心性ノードからの最短距離に基づくサブエリア分割方法を提案した．提案手法の特徴を調査するため，滋賀県緊急輸送道路網を対象にフィードラーベクトルに基づく分割法と比較し検討を行った．その結果，両者によるサブエリア分割は調和的で同様の結果が得られた．

Key Words: *Road network, Partitioning, Adjacency matrix, Laplacian matrix , Eigenvector centrality*

1. 緒言

過去の大規模な地震災害，例えば東日本大震災や阪神大震災などを通して，災害時でも機能する道路ネットワークがいかに重要であるかを経験してきた．このような大規模被災時の道路ネットワークの機能を定量的に評価するため，著者らは災害時を想定した連結信頼性について検討を行っている．

道路ネットワークデータは，街区レベルの局所的で詳細な精度でのデータが全国規模で整備されており，有償データとしては，全国で総延長約 95 万キロメートル，総リンク数 582 万本の巨大なデータが利用可能である[1)]．また無償データとしては，緊急輸送道路の GIS データ（シェープファイル）が各都道府県ごとに整備されており，国土数値情報ダウンロードサービス[2)] からダウンロード可能である．

道路ネットワークの機能を評価するための視点にはマルチスケール性がある．すなわち大規模で広域的なデータに基づく解析も必要な一方で，詳細で局所的なデータに基づく解析も必要である．計算機の性能向上により，局所的で詳細な精度のデータを広域的に積み上げ，それを直接的に解析することも可能になってきているようである．しかし，直接大規模な計算を行うことは，コスト的に非効率である可能性や，得られる情報が膨大で結果の解釈が煩雑となる可能性があるように思われる．そのため，局所的で詳細な精度の情報を適切な形で集約した中間的スケール（メソスケール）を導入して，分析や解釈を行うことは検討に値すると思われる．

一般に，ある情報を集約した形で処理することはスパースモデリングと関連しており，有用かつ本質的な特性を抽出するための基本的な技術である．ビッグデータ時代において，データが大量であるという側面が過大に評価されがちであるが，大量のデータに埋もれることなく本質を捉えるために，情報の集約可能性を検討することもまた重要である．

さて，道路ネットワーク情報の場合，情報を集約する方法の一つとして，対象地域を複数のサブエリアに分割し，各ノードをそれぞれのサブエリアに所属するノード群としてまとめる方策が考えられる．そこで本論文では，道路ネットワーク情報について，対象地域を複数のサブエリアに分割する方法について検討し，新たな手法の提案とその特性について議論する．

道路ネットワークを簡略化・集約化させるアプローチは古くから提案されている．Chan は実ネットワークから不必要なリンクの削除や複数のリンクを束ねることでネットワークを集約する方法を試みている[3)]．飯田ら[4),5)] はネットワークを適宜複数ブロックに分割し，ブロック間を関連付ける上位ネットワークとブロック内の下位ネットワークの２つにネットワークを階層化し，計算量の縮減を試みている．以上の集約化手法はリンクの抽出や削除，ブロックの分割にモデル作成者の技

術に依存する部分があり，明確な基準を設けにくいように思われる．

また経路集約という点では，OD 交通量による感度分析から経路集約を行う方法[6),7)] も提案されているが，ネットワークの幾何情報に加え交通量情報も必要で，さらに計算コストの高い感度解析が必要とする．

最近では，ネットワークサイエンスの成果を導入し，後述するフィードラーベクトルを用いた道路ネットワークの分割や，それを応用したネットワークの接続性について検討した事例が見られる．[8),9),10),11)]．

本論文では，ネットワークの中心性に着目し，道路ネットワークにおいて各エリアを代表しうる局所中心性ノードの抽出方法，及び，局所中心性ノードに基づくサブエリア分割方法を提案する．また提案手法の特性を調査するため，滋賀県緊急輸送道路網を対象にした解析を行い，既往のフィードラーベクトルに基づく分割との比較検討を行う．

2. ネットワーク分析に用いる数学的手法[12)]

(1) 隣接行列とラプラシアン行列による接続性の記述

本研究で利用する道路ネットワークの情報は，ノード（地点）とノード間を直接接続するリンク（道路）およびリンクの距離である．ノード総数が n の道路ネットワークにおいて，リンクを介して直接接続するノード間の関係を記述するために，重み付き隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を導入する．行列 $\boldsymbol{A}$ は $n \times n$ の正方行列で，その成分 A_{ij} は以下で定義される．

$$A_{ij} = \begin{cases} 1/l_{ij} & (i,j) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

ここに，集合 E はリンクの集合，また距離 l_{ij} はノード間 (i,j) を結ぶリンクの距離を表す．このように、2 ノード間がリンクで直接接続している場合はリンク距離の逆数で重みづけ、ノード間がリンクで接続されていない場合にはゼロとなる。

なお，単にトポロジカルな接続関係のみを表現するためには，重みをリンク距離によらず一定値とし，成分を 1（接続）あるいは 0（未接続） で記述した隣接行列 $\bar{\boldsymbol{A}}$ を用いることもある．本研究では，トポロジカルな関係だけでなくリンク距離も重要な情報であるため、リンク距離の逆数で重みづけした隣接行列を用いる．

各ノード i に接続するリンクの重みの総数 $d_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$ を次数と呼ぶ．この次数をまとめた次数ベクトル $\boldsymbol{d}$ は全ての成分が 1 となるベクトル $\boldsymbol{e} = (1, \cdots, 1)$ と隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e} \tag{2}$$

と表せる．重み付けのない隣接行列 $\bar{\boldsymbol{A}}$ の場合，次数は当該ノードに接続するリンク数となる．また次数を対角成分とする行列を次数行列 $\boldsymbol{D}$ とよぶ．

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

ラプラシアン行列 $\boldsymbol{L}$ は隣接行列 $\boldsymbol{A}$ と次数行列 $\boldsymbol{D}$ を用いて以下で定義される．

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A} \tag{4}$$

ラプラシアン行列は定義から明らかに対称行列であり，しかも任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、以下の 2 次形式が成り立つので、明らかに半正定値対称行列である．

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x_i - x_j)^2 \geq 0 \tag{5}$$

半正定値対称行列の固有値は必ず非負で，しかも固有ベクトルは互いに直交することが知られている。したがってラプラシアン行列は以下の形でスペクトル分解できる．

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{a}_i \otimes \boldsymbol{a}_i \tag{6}$$

ここにスカラー λ_i は非負の固有値，ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ は固有値 λ_i に対応する単位の固有ベクトル，演算子 $\otimes$ はテンソル積である．また各固有値に対応する単位固有ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ は互いに直交するので，

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \tag{7}$$

が成り立つ．ここに δ_{ij} はクロネッカーデルタである．

(2) 代数連結度とフィードラーベクトル

ラプラシアン行列が半正定値対称行列であること，および式 (5) の 2 次形式に注目すると，ラプラシアン行列 $\boldsymbol{L}$ の最小固有値 λ_1 は必ずゼロとなり，その単位固有ベクトルは $\boldsymbol{a}_1 = (1/\sqrt{n})\boldsymbol{1}$ となる。ここにベクトル $\boldsymbol{1}$ は全ての成分が単位の大きさのベクトルである．またラプラシアン行列のゼロ固有値が重根となる場合には，ネットワーク内で独立し互いに接続しない部分グラフの数と重根度が対応する．

一方，第 2 最小固有値（ゼロ以外の最小固有値）λ_2 のことを，グラフ理論では代数的連結度（algebraic connectivity），それに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{a}_2$ をフィードラーベクトルと呼び，ネットワーク連結性を表す指標として理解されている[13)]．

さらにグラフ理論によれば，リンク距離による重みを無視した隣接行列とそのラプラシアン行列に対しては，フィードラーベクトル $\boldsymbol{a}_2$ の成分の符号によってネットワークを 2 つの部分グラフにカットすれば，比率カットサイズ最小解を与えることが知られている．比率カット

サイズとは，2 つの部分グラフにカットするときに切断されるリンク数 n_c を 2 つの部分グラフのノード数 n_1, n_2 で割ったものの和，すなわち $n_c/n_1 + n_c/n_2$ のことである．したがって，フィードラーベクトルによる符号 2 分割によって，カットされるリンク数が少なく，かつ生成される 2 つの部分グラフのノード数がほぼ同一になるようにネットワークをカットする解が得られる．

このフィードラーベクトルの符号分割に基づいてリンクをカットし，ラプラシアン行列を更新すればゼロ固有値が重根となり，互いに独立な部分グラフ（部分領域）を含むラプラシアン行列が得られる．さらに更新されたラプラシアン行列について，逐次的にフィードラーベクトルの符号 2 分割を適用すれば，道路ネットワークを複数の部分グラフ（部分領域）に分割できることが分かる．

(3) 固有ベクトル中心性とべき乗法

中心性とはネットワークにおける各ノードの重要性を示すための指標である．例えば，ノードに接続するリンク本数で重要性を測る場合は式 (2) によって次数を求めればよい．これに対して固有ベクトル中心性は，あるノードの中心性をそのノードと隣接するノードの中心性の和と関連付けた中心性である[14]．ある無向グラフ $\boldsymbol{G}$ の隣接行列を $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ とし，ノードの中心性を成分とするベクトルを $\boldsymbol{c} = (c_i)$ とすると，ある頂点 i の中心性 $\boldsymbol{c_i}$ は，隣接する中心性の和と関連付けられるので，次のように表現できる．ただし $1/\lambda$ は正値の比例定数とする．

$$c_i = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}c_j, \quad \boldsymbol{c} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \tag{8}$$

式 (8) は固有値と固有ベクトルの定義にほかならない．さらに中心性の趣旨からいって，重要度が集約されているほど中心性が高いと考えられるので，絶対値最大の固有値の場合で，しかも固有ベクトル成分の絶対値が最大となるノードの中心性が最も高い．本論文では，絶対値最大の固有値に対する固有ベクトルのうち，成分の絶対値が最大となるものに対応したノードのことを，「中心性ノード」と呼ぶ．

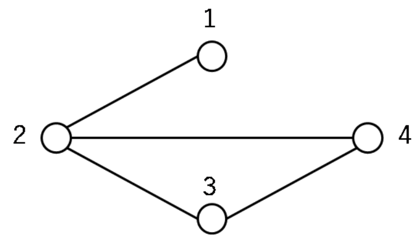
絶対値最大の固有値と固有ベクトルはべき乗法で計算可能である[15]．べき乗法は行列とベクトルの積の演算を繰返し行って収束解を得る方法で，適当な初期単位ベクトル $\boldsymbol{x}^0$ から始めて

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{(\nu+1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(\nu)}, \quad \boldsymbol{x}^{(\nu+1)} = \tilde{\boldsymbol{x}}^{(\nu+1)}/\|\tilde{\boldsymbol{x}}^{(\nu+1)}\| \tag{9}$$

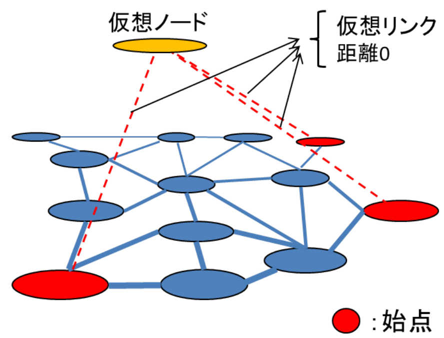
を繰返すと，$\boldsymbol{x}^{(\nu)}$ は絶対値最大の固有値に対応する固有ベクトルに収束し，さらに

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(\nu)} = \lambda_{\max}\boldsymbol{x}^{(\nu)} \tag{10}$$

を満たすスカラー量 $\lambda_{\max}$ が絶対値最大の固有値となる．



図–1 ネットワークの例



図–2 複数の始点ノードからの最短距離計算に利用する仮想リンクと仮想ノード

固有ベクトル中心性を**図-1** に示すグラフを用いて説明する．同グラフは，ノード数 4，リンク数 4，またリンク長は全て単位長であるとする．隣接行列 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

で，絶対値最大の固有値は λ_1=2.170，それに対応する単位の固有ベクトルは $\boldsymbol{c_1} = (0.282, 0.612, 0.523, 0.523)$ である．したがって，**図-1** で固有ベクトル中心性が最も高いノードは 2 である．

(4) ダイクストラ法による最短経路検索

ダイクストラ法とは，ネットワーク上のある始点ノードから全てのノードへの最短経路と最短距離を求めるアルゴリズムである[16]．始点ノード s からの最短距離が分かっているノードの集合 S を順に作成する．始点 s から各ノードへの最短距離を初期値で無限大とおく．新たにあるノードが S に追加されるタイミングで，当該ノードから直接接続する S に含まれないノードの最短距離を更新する．始点ノードからの最短距離が最小となるノードを探索して S に追加し，同様の作業を繰返す．最終的には，全てのノードについて，始点ノードからの最短距離と最短経路の 1 つ上流側のノード番号が得られる．

ダイクストラ法によって複数の始点ノードのいずれかからの最短距離と最短経路を計算することも可能である．その場合には，図-2 に示すように，1 つの仮想ノードとそこから複数の始点ノードに接続する距離 0 の仮想リンクを導入したネットワークを用いればよい．仮想ノードを始点として通常のダイクストラ法を適用すれば，複数の始点ノードのいずれかからの最短距離および最短経路が計算できる．

3. 局所固有ベクトル中心性に基づく中心性ノードの探索法とサブエリア分割法

(1) 局所固有ベクトル中心性の考え方

前節で説明した固有ベクトル中心性に基づき，道路ネットワークの隣接行列に固有ベクトル中心性を適用すれば，そのネットワーク内で最も中心性の高いノードが抽出可能である．一方，実際の道路交通を考えると，要衝となる地点が複数存在する場合は，部分エリアごとに特性が異なる場合も多い．このため，固有ベクトル中心性の概念を利用しながら，交通ネットワークの特性を反映しつつ，空間的な偏在を排した形で，複数の重要なノードを抽出する方法が必要であるように思われる．

そこで隣接行列 $\boldsymbol{A}$ に適当な重み行列 $\boldsymbol{B}$ を掛けた「修正隣接行列」$\boldsymbol{A}'$ を以下のかたちで導入する．

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{B} \tag{11}$$

重み行列として対称行列 $\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{B}$ を選べば，修正隣接行列の対称性は維持できる．さらに重み行列が対角項のみ非ゼロ成分の対角行列を選べば，修正隣接行列 $\boldsymbol{A}'$ のスパース性は元の隣接行列 $\boldsymbol{A}$ と全く同一となる．

空間的な偏在を排してノードを選択するためには，既に選択済みのノードからの距離が離れたノード群が有利となる重みを導入するのが自然である．これを実現するためには，ダイクストラ法を利用して複数の選択済みノードからノード i への最短距離 d_i を計算し，その平方根を対角成分に持つ重み行列 $\boldsymbol{B}$ を導入する．

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix} \tag{12}$$

その上で，修正隣接行列 $\boldsymbol{A}'$ の絶対値最大固有値を求め，その固有ベクトルに基づいて中心性ノードを選択する．こうすることで，既に選択済みのノードの近傍に位置するノードの中心性を相対的に下げ，距離が離れたノードの中心性を相対的に上げる効果がある．このような修正隣接行列 $\boldsymbol{A}'$ によって得た固有ベクトル中心性を，本論文では「局所固有ベクトル中心性」と呼ぶことにする．

(2) 局所固有ベクトル中心性に基づく中心性ノードの探索

前述の局所固有ベクトル中心性を逐次的に適用することにより，局所中心性ノードが逐次的に求められる．以下，固有ベクトル中心性および局所固有ベクトル中心性に基づいて得られた中心性ノードのことを「拠点ノード」と呼ぶことにする．

ある道路ネットワークにおいて拠点ノードを探索する手順を以下にまとめる．

Step 0: 道路ネットワークの隣接行列 $\boldsymbol{A}$ に関する固有ベクトル中心性から拠点ノードを選択する．

Step 1: 選択された拠点ノードから全ノードへの最短距離をダイクストラ法によって計算し，重み行列 $\boldsymbol{B}$ を求める．さらに，式 (11) によって修正隣接行列 $\boldsymbol{A}'$ を計算する．

Step 2: 修正隣接行列 $\boldsymbol{A}'$ に関する固有ベクトル中心性から拠点ノードを選択する．

Step 3: 所定の拠点ノード数が得られるまで Step 1 に戻って繰返し計算を行う．所定の拠点ノード数が得られれば計算終了．

(3) 複数拠点ノードに基づくサブエリア分割

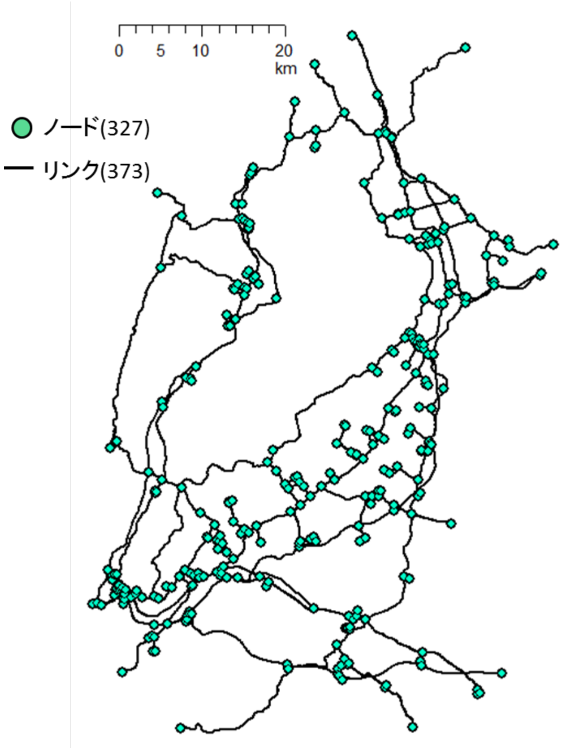
複数拠点ノードからのサブエリア分割には，簡単のために複数始点ノードからの最短経路と最短距離を求めるダイクストラ法を用いることにする．ダイクストラ法の解として，全てのノードについて最短経路上の上流側ノード番号が得られる．前節で説明したとおり，仮想リンク長が 0 であるため，複数の拠点ノードの最短距離は明らかに全て 0 である．したがって，各ノードについて最短経路上の上流側ノードに辿って行けば，必ず 1 つの拠点ノードを経由することになる．つまり各ノードに対して拠点ノードが一意に決まるので，サブエリア分割が可能である．また，各サブエリアに属するノードどうしが必ず接続していることは言うまでもない．

4. 実道路ネットワークを用いた提案手法の適用性に関する検討

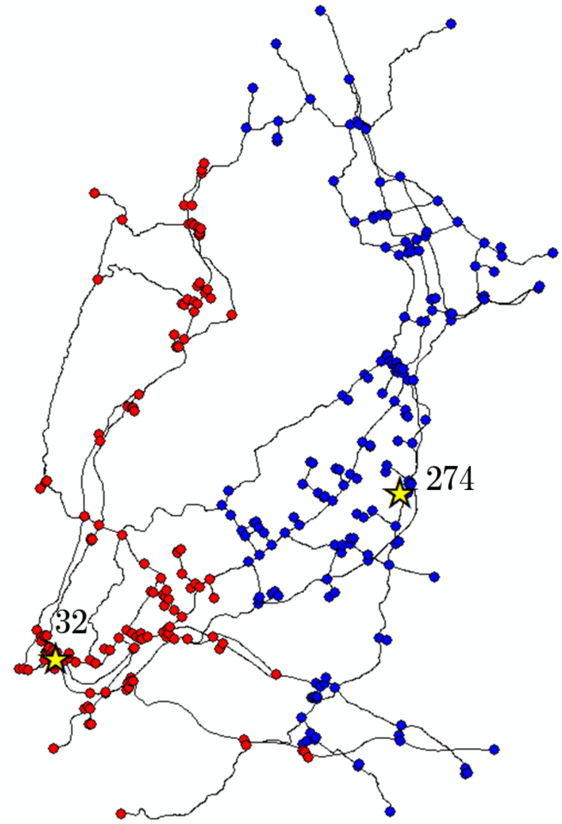
(1) 滋賀県緊急輸送道路ネットワークの概要

緊急輸送道路とは，災害直後から避難救助をはじめ物資供給等の応急活動のために緊急車両の通行を確保すべき重要な路線と位置付けられており，各都道府県で定めるものである．

本研究では，滋賀県緊急輸送道路ネットワークを取り上げる．ネットワークデータは国土数値情報ダウンロードサービス[2) からダウンロードした「滋賀県緊急輸送道路データ」を GIS ソフト ArcGIS のコンポーネ



図–3 滋賀県緊急輸送道路ネットワーク



図–4 局所中心性法により 2 分割された道路ネットワーク

ント ArcMap[17] で加工して作成した．その概要は以下の通りである．

- ラインデータである道路データから端点を抽出し，ポイントデータであるノードを作成．
- 道路データの交点を抽出し，ポイントデータであるノードを追加する．
- 道路データをノードで区切り，タインデータであるリンクを作成．
- 各リンクの長さを計算．
- リンク毎にリンク長と両端ノード番号をまとめたデータ組を作成．

同ネットワークは，トータルの総延長 926.1[km] で，327 個のノード，373 個のリンクで構成される．その概要を**図-3** に示す．

(2) 各手法によるエリア分割結果

滋賀県緊急輸送道路ネットワークを対象に，局所中心性固有ベクトルを用いた分割方法（局所中心性法）とフィードラーベクトルの符号二分割を逐次適用した分割方法（逐次フィードラーベクトル法）によるエリア分割を行った結果を示し，その特徴を議論する．

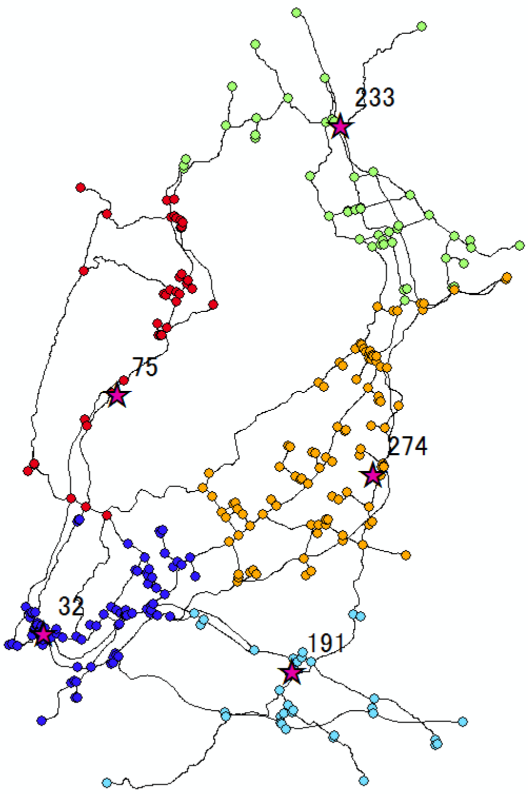
まず，局所中心性法によって道路ネットワークをそれぞれ 2 分割と 5 分割にした結果を**図-4** および**図-5** に示す．

局所固有ベクトル中心性を逐次的に適用した過程で，拠点ノードは 32 番，274 番，75 番，233 番，191 番の順で選択された．**図-4** より，2 番目に選択される拠点ノード 274 の位置から，単に既知拠点ノードからの距離が遠いノードゆえに選択されるのではなく，周辺ネットワークの中心性を反映した地点が選択されているように読み取れる．さらに**図-5** より，選択された 5 つの拠点ノードは空間的にはバランスの取れかたちで分布しており，既知ノードからの最短距離に基づく重みづけによって，選択される拠点ノードの偏在を防ぐ効果が表れている．それぞれが離れたエリアに位置している．

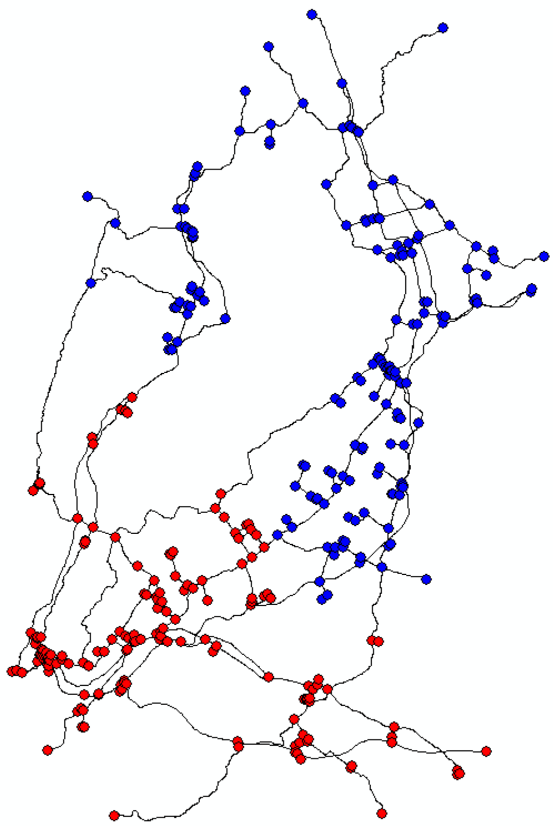
ついで，逐次フィードラーベクトル法によって滋賀県緊急輸送道路網を 2 分割あるいは 5 分割した結果を**図-6** および**図-7** に示す．

さらに両者のエリア分割に関して定量的な情報をまとめておく．

表-1 は分割方法の違いによる 2 分割時のサブエリア所属ノード数やカット数を比較したものである．逐次フィードラーベクトル法の方が局所中心性法よりもカット数が少なく，しかも 2 分割されたサブエリアに所属するノード数も均衡がとれていることが分かる．フィードラーベクトルによる符号 2 分割の特性が反映されていることが理解できる．2 つのサブエリアの空間的広が



図–5 局所中心性法により 5 分割された道路ネットワーク



図–6 逐次フィードラーベクトル法により 2 分割された道路ネットワーク

表–1 ネットワーク 2 分割における比率カットサイズの比較

	Node in Red	Node in Blue	No. of link cut	Ratio cut size
SF	165	162	6	0.0734
LC	152	175	7	0.0861

SF: 逐次フィードラーベクトル法，LC: 局所中心性法

りは細部において差異はあるものの 2 つの方法で調和的である．

一方，同様の比較を 5 分割時についてまとめたものが**表-2** である．いずれの方法においても，サブエリアに所属するノード数には多寡が見られ，必ずしも均衡しないことが分かる．これは分割回数や分割順序による影響が考えられる．カットリンク数については，逐次フィードラーベクトル法の方が少ないが，領域を 5 分割していることを考えれば，特定のサブエリア間の境界を通るリンク数は両者でほぼ同一である．さらに，**図-5** と**図-7** を比較すれば，サブエリアの空間的な分布も調和的であることが理解できる．

(3) 数値計算としての特徴

最後に，局所中心性法と逐次フィードラーベクトル法の特徴を数値計算の観点から比較し，局所中心性法

表–2 ネットワーク 5 分割におけるリンクカット数の比較

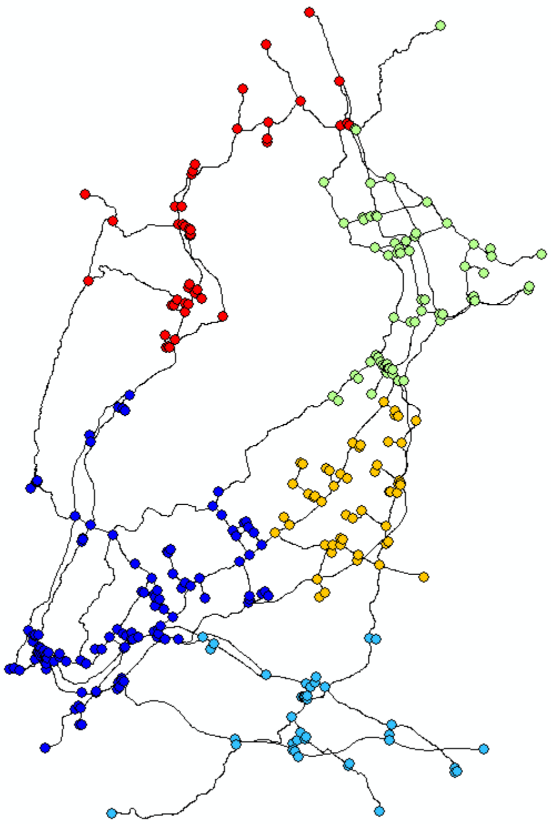
	Node in Red	Node in Blue	Node in Green
SF	45	127	64
LC	44	95	50

	Node in Orange	Node in Light blue	No. of link cut
SF	53	38	15
LC	100	38	18

SF: 逐次フィードラーベクトル法，LC: 局所中心性法

の優位性を指摘する．

フィードラーベクトル計算においては，ラプラシアン行列の第 2 最小固有値計算を計算する必要がある．1 つのノードに集まるリンクがせいぜい数個である道路ネットワークの物理的構造を考えれば，ラプラシアン行列自身はスパース性が卓越する性質の良い行列である．しかしながら，固有値計算においては特殊な場合を除いて，このスパース性をそのまま活かすことは難しい．また，一般に疎な行列の逆行列は疎ではない．このような状況で第 2 最小固有値とその固有ベクトルを求めるためには，固有値計算そのものに工夫が必要で



図–7 逐次フィードラーベクトル法により 5 分割された道路ネットワーク

ある．もし素直にべき乗法とスペクトル分解を適用すれば，フルマトリクスで計算する必要があり，ノード数の 3 乗のオーダーの計算量が必要となる．端的に言えば，大規模ネットワークを対象とする場合，大きなハンディキャップとなる．大規模な疎行列の固有値計算は現在でも研究や応用が盛んな分野である．ここでは，行列の固有値計算の概要について文献[15] を挙げるに留める．

一方，実対称行列の絶対値最大となる固有値計算を行う場合はべき乗法が直接適用できる．単純なアルゴリズムで，しかも計算量は行列とベクトルの積の計算であるため，高々ノード数の 2 乗オーダーの計算量ですむ．さらに道路ネットワークではスパース性が卓越していることを考慮すれば，行列を CRS 形式 (Compressed Row Storage) で非ゼロ成分だけを保存し，行列～ベクトルの積演算で済ませることが可能であるので，実質的にはほぼノード数のオーダーでの計算が可能である．このように数値計算を考えれば，計算量やメモリ容量の両方で大きなアドバンテージがある．

さらに，修正隣接行列 $\boldsymbol{A}'$ に用いる重み行列 $\boldsymbol{B}$ を対角行列とすれば，元々の隣接行列 $\boldsymbol{A}$ のスパース性をそのまま踏襲できる．したがって CRS 形式のままで式 (11) の積演算が可能で，計算量が非常に節約できる．

一方，重み行列として最短距離を用いるので，ダイクストラ法の計算量のオーダーを考慮する必要がある．ダイクストラ法自身はノードの 2 乗のオーダーの計算量を要することが知られている．

これらを総合すると，本研究で提案する局所中心性法で拠点ノードの選択やそれに基づくサブエリア分割を行う場合，トータルとしてノード数の 2 乗オーダーの計算量が見込まれ，クリティカルとなる計算はダイクストラ法による重み計算であると言える．

5. 結言

本論文では，ネットワークの中心性に着目し，道路ネットワークにおいて各エリアを代表しうる局所中心性ノードの抽出方法，及び，局所中心性ノードに基づくサブエリア分割方法について，新たな手法を提案し，その特性を議論した．得られた知見を以下にまとめる．

- 固有ベクトル中心性の概念を拡張し，道路ネットワークの隣接行列 $\boldsymbol{A}$ に重み行列 $\boldsymbol{B}$ を乗じた修正隣接行列 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ を導入し，この修正隣接行列の固有ベクトル中心性を検討した．本論文では，修正隣接行列の固有ベクトル中心性のことを「局所固有ベクトル中心性」，また，固有ベクトル中心性や「局所固有ベクトル中心性」に基づいて抽出したノードを「拠点ノード」と呼んだ．
- 複数の拠点ノードを逐次的に抽出するため以下の計算方法を提案した．重み行列 $\boldsymbol{B}$ として，抽出済みの拠点ノードからの最短距離の平方根を対角項に持つ重み行列を用いた．この重みによる修正隣接行列 $\boldsymbol{A}'$ の固有ベクトル中心性を用いて，新たな拠点ノードを抽出した．所定の数の拠点ノードが得られるまで，この手続きを逐次的に行った．
- ダイクストラ法に基づいて複数の拠点ノードを始点とする最短経路探索を行い，それぞれのノードの最短経路上流にある拠点ノードの番号によってサブエリアを分割した．
- 提案手法の特性を調査するため，滋賀県緊急輸送道路網を対象にした解析を行い，本提案手法による分割結果と，フィードラーベクトルの符号 2 分割に基づく逐次的フィードラーベクトル法による分割結果とを比較した．その結果，提案手法の方が逐次フィードラーベクトル方よりもカットリンク数がわずかに増加する傾向を確認した．一方，分割されたサブエリアの空間的分布を比較すると，細部には差異があるものの全体としては調和的であることを確認した．

さらに数値計算の立場から提案手法の優位性について検討した結果，以下の特徴を有することが期待できる．

- 道路ネットワークの隣接行列はノードに接続するリンク数が高々数個であることから，スパース性が著しく発達している．非ゼロ成分のみを記憶することでメモリの節約と計算の高速化が期待できる．したがって，スパース性を活用できる計算アルゴリズムが望ましい．
- 提案手法は絶対値最大固有値しか使用しないためにべき乗法が適用でき，固有値及び固有ベクトル計算についても計算量の大幅な削減が見込める．べき乗法では行列〜ベクトルの積を計算するため，計算量はノード数の 2 乗オーダーとなる．しかし，道路ネットワークの隣接行列の場合は，スパース性が卓越しているため，固有値計算はノード数の 1 乗のオーダーまで落とせる可能性がある．
- 一方，修正隣接行列に必要となる重み行列 $\boldsymbol{B}$ の計算のため，また拠点ノードに基づくサブエリア分割のためにダイクストラ法を利用した．この計算過程ではノード数の 2 乗オーダーの計算量を必要とする．
- したがって，本研究で提案する手法は全体としてノード数の 2 乗オーダーの計算量が見込まれ，クリティカルとなる計算過程はダイクストラ法である．
- フィードラーベクトルによる符号 2 分割では，ラプラシアン行列が正則ではないこと，また第 2 最小固有値を求めることから，スパース性を活用した計算が難しいため，計算量の負担が重い．これは特に大規模な道路ネットワークを取り扱う際に不利であると思われる．

今後は，重み行列 $\boldsymbol{B}$ の詳細な検討や，より大規模な道路ネットワークを用いた試算，また計算高速化に対応したコード開発を通して，提案手法の適用性や優位性を確認していく所存である．

謝辞: 本研究の一部は，国土交通省国土技術政策総合研究所の委託研究により実施したものである．ここに記して謝意を表する．

参考文献

1) 一般財団法人 日本デジタル道路地図協会：http://www.drm.jp/database/structure.html, 2017 年 7 月 30 日アクセス．
2) 国土数値情報ダウンロードサービス：http://nlftp.mlit.go.jp/ksj/, 2017 年 7 月 30 日アクセス．
3) Chan, Y.: A Method to Simplify Network Representation in Transportation Planning, *Transportation Research*, Vol.10, pp.179-191, 1976.
4) 飯田恭敬，高山純一，横山日出男：メッシュ分割によるネットワーク表示の簡略化手法を用いた交通量配分計算法，土木計画学研究・論文集，No.2，pp.149-156，1985.
5) 飯田恭敬，朝倉康夫，広川誠一，鷹尾和享：ネットワークの分割およびバンドリングによる交通量配分計算の効率化，土木計画学研究・講演集，No.11，pp.227-234，1988.
6) Connors, R. D. and Watling, D. P.: Aggregation of Traffic Networks Using Sensitivity Analysis, UTSG, 2A1.1-2A1.11, 2008.
7) 岡本裕也，中山晶一朗，高山純一：感度分析による経路集約化法を用いた確率的利用者均衡配分の効率的計算，土木学会論文集 D3（土木計画学），Vol. 67, No. 5, I_481-I_489, 2011
8) 中山晶一朗，松井千里，小林俊一：北陸の緊急輸送道路ネットワークのスペクトル解析，平成 28 年度土木学会中部支部研究発表会，CD-ROM, 2017.
9) 小林俊一，中山晶一朗，若林桂太，坪川秀太朗：道路ネットワークの連結信頼性計算の単純化に関する一考察，土木学会第 20 回応用力学シンポジウム講演概要集，pp. 229-230, 2017.
10) 明光就平，倉内文孝，安藤宏恵：Spectral Partitioning を用いた道路ネットワークの接続性評価，第 55 回土木計画学研究発表会・講演集，CD-ROM, 25-03, 2017.
11) 倉内文孝：Network Science を援用した交通ネットワーク信頼性分析の可能性，第 55 回土木計画学研究発表会・講演集，CD-ROM，09-01, 2017.
12) 斎藤直樹：グラフ・ネットワーク上での応用調和解析，応用数理，Vol. 25, No. 3, pp. 1-15, 2015.
13) Fiedler, M.: Algebraic connectivity of graphs, *Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 25, pp. 298-305, 1973.
14) Bonacich, P.: Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification, *Journal of Mathematical Sociology*, Vol. 2, pp. 113-120, 1972.
15) 一松 信：数値解析，第 3 章 固有値問題，朝倉書店，1982.
16) Dijkstra, E.W.: A note on two problems in connexion with graphs, *Numerische Mathematik*, Vol. 1, pp. 269-271. 1959.
17) ArcMap: http://desktop.arcgis.com/ja/arcmap/—, 2017 年 7 月 30 日アクセス．

(2017. 7. 31 受付)

Study on partitioning of a road network based on an extended concept of the eigenvector centrality

Keita WAKABAYASHI, Shun-ichi KOBAYASHI and Shoichiro NAKAYAMA

This article deals with a partitioning method of a road network to aggregate large-scaled information into meso-scaled compact one. Firstly, the authors extend the concept of the eigenvector centrality of an adjacent matrix by introducing a weight matrix based on the distance of specific nodes to modify the adjacent matrix. Secondly, based on the eigenvector centrality of these modified adjacent matrices, local centrality nodes are selected to represent sub-areas of the network area. Then, by Dijkstra's alrotighm, the area are divided by the least distance from these local centrality nodes. According to numerical examples, results of divisions by the proposed method and those by Fiedler vector method show that they look similar and in harmony with each other.