

MFD 形状の不確実性を考慮した 最適なエリア流入制御に関する基礎的検討

水口 正教¹・福田 大輔²

¹非会員 三井不動産株式会社 IT イノベーション部 (〒 103-0022 中央区日本橋室町 2-1-1)

E-mail: ma-mizuguchi@mitsuifudosan.co.jp

²正会員 東京工業大学准教授 環境・社会理工学院 土木・環境工学系 (〒 152-8552 目黒区大岡山 2-12-1-M1-11)

E-mail: fukuda@plan.cv.titech.ac.jp

混雑した都市域の交通渋滞の改善施策を考えるにあたり、近年、“MFD (Macroscopic Fundamental Diagram)”による集計された交通量-密度関係に着目した流入制御方式や混雑課金施策等の検討が進みつつある。この交通量-密度関係について、適切なエリア設定等がなされない場合などにおいては観測データのバラツキが大きくなり、明確な関数関係を推計することができず、“Well-defined な MFD”を構築できない場合があることが指摘されている。そのような状況下では、統計的推計によって導かれた単一の MFD を想定したままでは適切な流入制御を行うことが困難な可能性が考えられる。本研究では、MFD 形状の不確実性を考慮した単一エリアへの最適流入制御方策に関する基礎的検討を行うための分析フレームを提示した上で、数値シミュレーションを行った。

Key Words: Macroscopic fundamental diagram, Traffic control by entrance restriction, Stochastic control problem

1. はじめに

エリアの交通状態を改善する施策を考えるにあたり、近年多用されている概念として“MFD (Macroscopic Fundamental Diagram)”が挙げられる。MFD とは、Daganzo¹⁾において近年理論体系が再整理され、Geroliminis and Daganzo²⁾を嚆矢としてその存在が実証的に検証された、エリアレベルで交通状態を捉えるための集計された交通量-密度関係である。MFD は、エリア内の混雑状態が均一であり、かつ、トータルの交通需要がゆっくりと変化するような状況を想定した上で、車両存在台数と平均交通量の関係を表すものである。MFD に基づいたエリアへの車両の流入制御方策等も提案されており、交通量-密度関係の極大点、すなわち、エリア内の最大交通量（最大スループット）を目指して流入量を調整することが、最適な制御の基本ルールとされている¹⁾。

MFD については、Geroliminis and Daganzo²⁾ (図-1) に示されているような、観測データの散らばり (scatter) が非常に小さい交通量-密度関係 (Well-defined MFD) が求められれば、それをそのままエリア流入制御等の施策に応用できると考えられている。しかし、MFD で仮定されているエリア内の混雑が一様に分布しているという状態は非常に強い仮定であると同時に、その他の様々な要因によって、実際には Well-defined でない MFD となる場合が起こりうると考えられる³⁾。実際に、既存研究で推計された MFD には、Well-defined でない

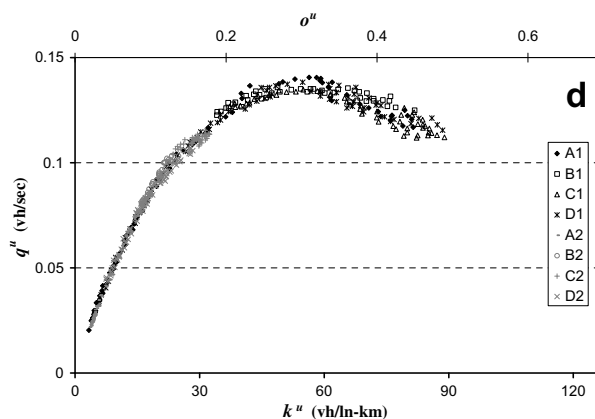


図-1 横浜中心部で推計された Well-defined MFD (出典: Geroliminis and Daganzo²⁾)

ものも含まれ、交通量-密度関係の散布の度合いが大きい場合も存在している。とりわけ、最大スループット付近のデータの散布状態や、渋滞領域におけるデータの散布状態が大きくなる傾向があることが知られている。適切なエリア分割⁴⁾等により Well-defined MFD が求められる可能性も考えられるが、MFD と親和的なエリア流入規制やコードンプライシング等の施策が行政境界等のあらかじめ定められた都市境界に基いて行われる蓋然性が高いことを考えると、必ずしも Well-defined でない MFD に基づいてエリア流入施策を検討せざるを得ない場面も少なくないと考えられる。

以上のような問題意識のもと、本研究では、一意な MFD を仮定した流入制御ではなく、形状の不確実性を考慮した MFD より具体的には、エリア内存在台数に対して複数の交通量状態の値を取りうるような MFD を想定し、それを基にした交通制御方策についての基礎的検討を行う。その際、MFD の不確実性は、車両存在台数の増加に伴い増加することが明らかとなっていることに鑑み、その現象を表現する形で不確実性を考慮した確率的最適制御問題となるように定式化を行う。

なお、3. 節に示す最適性条件の導出の流れ、並びに、4. 節に示す数値解法の枠組みの解説および表記法に関しては、交通状況の動学的不確実性を考慮したシステム最適配分について検討した長江・赤松⁵⁾ に、その多くを準拠している。

2. エリア流入制御問題の定式化

(1) モデルの枠組

本研究では、一つのエリアを制御対象として考える。ある計画時間 $[0, T]$ を考え、時刻 $t \in [0, T]$ での単位時間あたりにエリアへ流入する交通需要を、時間に関する所与の関数 $q(t)$ と表現する。管理者は任意の時刻 t において、この交通需要のうち任意の数の利用者のみをエリアへ流入させ、残りの利用者は迂回させる（エリアへの侵入を許可しない）ような流入制御を行うことができるとする。具体的には、時刻 t にエリアに流入させる単位時間当たりの利用者数を $F(t)$ とするとき、これを $0 \leq F(t) \leq D(t)$ の範囲で自由に決定することができる。そして、残りの $D(t) - F(t) (= S(t))$ だけの交通需要をすべてエリア外へ迂回させることができる。図-2 に上述の制御対象エリアの概念を示す。 $n(t)$, $G(n(t))$ はそれぞれ、任意の時刻 t における車両の存在台数と、単位時間当たりのエリアからの流出台数を表している。

ここで $n(t)$ と $G(n(t))$ の関係が MFD と呼ばれる、上に凸な関数となることが明らかとなっている。本来 MFD とは、エリアの車両存在台数と交通量の関係を示すものである。しかし、MFD では渋滞が一様に分布していると仮定されているため、交通量とエリアからの流出量は常に一定の比率となる。したがって、車両存在台数と流出量の間にも同様の関係があることは明らかである（図-1）。

(2) MFD の不確実性

本来 MFD は、図-1 のように、緩やかなカーブを描く。しかし本研究では計算の単純化のため、三角形の MFD を仮定し、定式化を行う。図-3 に本研究で使用する MFD を示す。ここで γ , μ , ω はそれぞれ、最大流出量、最適存在台数、最大存在台数となっている。存

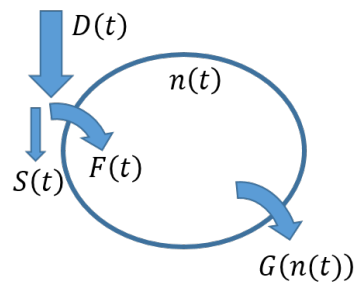


図-2 制御対象エリアの概念図

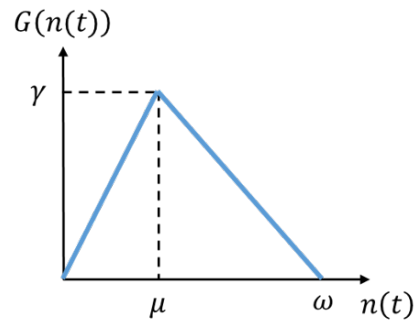


図-3 本研究で想定する Triangular MFD

在台数が最適の時、流出量は最大となり、エリアの交通状態は最も効率の良い状態となることが分かる。また、 ω の状態は“gridlock”と呼ばれ¹⁾、過度に渋滞した結果、車両が流出することも流入することも不可能となっている状態を表している。

この MFD は以下の式 (1) で表される。

$$G(n(t)) = \begin{cases} X_1 n(t) & \text{if } n(t) \leq \mu \\ -X_2 n(t) + X_3 & \text{if } n(t) > \mu \end{cases} \quad (1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\gamma}{\mu} \\ X_2 &= -\frac{\gamma}{\mu - \omega} \\ X_3 &= \frac{\gamma\omega}{\mu - \omega} \end{aligned}$$

(3) 車両存在台数の推移

車両存在台数は、車両のエリアへの流入、流出によって時々刻々と変化していく。時刻 $t \in [0, T]$ において、微小時間 $[t, t + dt]$ 間の車両存在台数の増分は以下の式 (2) で表される。

$$\begin{aligned} dn(t) &= F(t)dt - G(n(t))dt \\ &= (D(t) - S(t))dt - G(n(t))dt \\ &= \eta(n, S)dt \end{aligned} \quad (2)$$

図-1 からわかるように、実際には、車両存在台数と交通量の関係は一意に定まらない。この不確実性を表現するためには、式 (2) に誤差項を加える必要がある。

ここで誤差項には平均 0, 標準偏差 σ の 1 次元 Wiener 過程を仮定する. 1 次元 Wiener 過程の時間変化は以下の式 (3) に従う.

$$dB(t) = \epsilon \sqrt{dt} \quad (3)$$

$$\epsilon \sim N(0, 1)$$

また, 車両存在台数が増加するに連れて不確実性も増すため⁶⁾, 誤差項はこの特性を表現している必要がある. MFD に存在する誤差を考慮した場合の状態方程式は, 以下の式 (4) によって表される.

$$dn(t) = \eta(n, S)dt + \alpha dB(t) \quad (4)$$

ここで,

$$\alpha \propto n$$

となる. つまり, 誤差項は正規分布に従い, さらに車両存在台数に比例して, その値は大きくなる. また, α の値を適切に与えることで, MFD の不確実性を様々な大きさに表現することが可能となる.

(4) 不確実性下での動的最適制御問題の定式化

以上を踏まえ, 不確実性下での動的な最適エリア流入制御問題 (Stochastic Dynamic System Optimum: SDSO) の定式化を行う. 道路交通管理者は, 計画期間 $[0, T]$ 中における当該エリアからの流出量を最大化するように, リアルタイムに状態を観測しながらエリア境界部分における総流量の制御を行う. 具体的には, 毎時刻 t において車両存在台数と流出量を観測し, それに応じてエリアへの規制流入量 $S(t)$ を決定する. すなわち, 流出量は車両存在台数によって決定するため, 最適制御戦略は時刻 t および交通状態 n の関数 $S(t, n)$ として定義される. これを用いて, 制御問題は以下の式 (5) のように定式化される.

[SDSO]

$$\max_S \mathbb{E} \left[\int_0^T G(n)dt \mid (0, n_0) \right] \quad (5)$$

ここで, $\mathbb{E}[\cdot | (t, n)]$ は, 時刻 t における交通状態 $n(t) = n$ を与件とした条件付き期待演算である. また,

$$\int_0^T G(n)dt \quad (6)$$

は, 計画期間 $[0, T]$ における流出量の総数である.

この問題を解く際には, 最小化問題として再び定式化する必要がある. そのため, 制御問題は以下の式 (7) の最小化問題へと書き直される.

$$\min_S \mathbb{E} \left[\int_0^T f(t, n, S)dt \mid (0, n_0) \right] \quad (7)$$

$$f(t, n, S) = -G(n)$$

3. 最適性条件の導出

(1) Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式

時刻 t に交通状態が $n(t) = n$ と観測されたときの問題の最適値関数を以下の式 (8) で定義する.

$$V(t, n) \equiv \min_S \mathbb{E} \left[\int_t^T f(t, n, S)dt \mid (t, n) \right] \quad (8)$$

DP (Dynamic Programming) 原理を適用し, さらに伊藤の補題を適用すれば, 状態 (t, n) で成立する HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程式を得る. HJB 方程式を式 (9) に示す.

$$\min_S \left[f(t, n, S) + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} \right) V(t, n) \right] = 0 \quad (9)$$

(2) 最適制御ルールの導出

HJB 方程式から, 任意の状態 (t, n) における制御変数 S^* を求めることができる. 問題に対する状態 (t, n) での最適制御ルールは, その時刻における車両存在台数と, 需要によって場合分けされる. 以下にその最適制御ルールを示す.

- 1) $n(t) \leq \mu$ のとき, 制御を行わなくても $n(t) + dn(t) \leq \mu$ ならば,

$$S^*(t) = 0$$

- 2) $n(t) \leq \mu$ のとき, 制御を行わないと $n(t) + dn(t) > \mu$ ならば,

$$S^*(t) = D(t) - G(n(t)) - (\mu - n(t))/dt (\equiv S^{**}(t))$$

- 3) $n(t) > \mu$ のとき, 流入量ゼロで $n(t) + dn(t) \leq \mu$ ならば,

$$S^*(t) = S^{**}(t)$$

- 4) $n(t) > \mu$ のとき, 流入量ゼロでも $n(t) + dn(t) > \mu$ ならば,

$$S^*(t) = D(t)$$

ここで示した最適制御ルールは, 図-4 のように表すことができる.

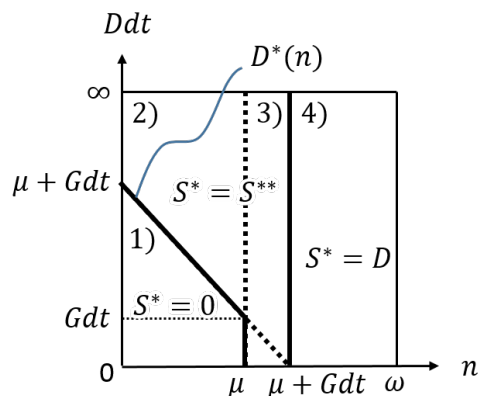


図-4 各状態における最適制御ルール

(3) 最適性条件

各状態における最適制御を HJB 方程式に代入することで、 $V(t, n)$ が従うべき最適性条件を導出できる。ここでは、交通状態 $n(t)$ に基づいて三つの場合分けを行う。その後、終端条件と境界条件について議論する。

a) $0 \leq n \leq \mu$ の場合

$0 \leq n \leq \mu$ の場合、最適制御は $S^*(t) = 0$ または $S^*(t) = S^{**}(t)$ となる。

$D(t) \leq D^*(n)$ の場合、最適制御は $S^*(t) = 0$ となる。これを HJB 方程式に代入して、 $V(t, n)|_{0 \leq n \leq \mu}$ が従うべき以下の関係式を得る。

$$\begin{cases} F^0[V(t, n)] \equiv \mathcal{L}_0 V(t, n) - G(n) = 0 \\ F^{**}[V(t, n)] \equiv \mathcal{L}^{**} V(t, n) - G(n) \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathcal{L}_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (D(t) - G(n)) \frac{\partial}{\partial n} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \eta_0 \frac{\partial}{\partial n} \quad (11)$$

$$\mathcal{L}^{**} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (D(t) - S^{**}(t) - G(n)) \frac{\partial}{\partial n} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \eta^{**} \frac{\partial}{\partial n} \quad (12)$$

最適制御のとき、式 (9) の HJB 方程式が成立する。最小値が 0 をとるため、それ以外の制御入力の場合、式 (9) の右辺は 0 以上の値をとることが分かる。

$D(t) > D^*(n)$ の場合、最適制御は $S^*(t) = S^{**}$ となる。この値を HJB 方程式に代入すると、以下の式 (13) の関係式を得る。

$$\begin{cases} F^0[V(t, n)] \equiv \mathcal{L}_0 V(t, n) - G(n) \geq 0 \\ F^{**}[V(t, n)] \equiv \mathcal{L}^{**} V(t, n) - G(n) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

これより、任意の状態 $(t, n)|_{0 \leq n \leq \mu}$ において、最適値関数 $V(t, n)|_{0 \leq n \leq \mu}$ は、以下の式 (14) 一般化相補性問題 (Generalized Linear Complementarity Problem: GLCP) の解として与えられる。

[GLCP-A]

Find $V(t, n)|_{0 \leq n \leq \mu}$ such that

$$\begin{cases} F^0[V(t, n)] \cdot F^{**}[V(t, n)] = 0 \\ F^0[V(t, n)] \geq 0, F^{**}[V(t, n)] \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

b) $\mu < n \leq \mu + G(n)dt$ の場合

$\mu < n \leq \mu + G(n)dt$ のとき、最適制御は常に $S^*(t) = S^{**}(t)$ となる。この最適制御入力を HJB 方程式に代入することで、 $V(t, n)|_{\mu < n \leq \mu + G(n)dt}$ が従う以下の偏微分方程式 (Partial Differential Equation: PDE-B) を得る。

[PDE-B]

Find $V(t, n)|_{\mu < n \leq \mu + G(n)dt}$ such that

$$G^{**}[V(t, n)] \equiv \mathcal{L}^{**} V(t, n) - G(n) = 0 \quad (15)$$

c) $\mu + G(n)dt < n \leq \omega$ の場合

$\mu + G(n)dt < n \leq \omega$ のとき、最適制御は常に $S^*(t) = D(t)$ となる。この最適制御入力を HJB 方程式に代入して $V(t, n)|_{\mu + G(n)dt < n \leq \omega}$ が従う以下の偏微分方程式を得る。

[PDE-C]

Find $V(t, n)|_{\mu + G(n)dt < n \leq \omega}$ such that

$$H^{D(t)}[V(t, n)] \equiv \mathcal{L}_D V(t, n) - G(n) = 0 \quad (16)$$

$$\mathcal{L}_D \equiv \frac{\partial}{\partial t} - G(n) \frac{\partial}{\partial n} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \eta_D \frac{\partial}{\partial n} \quad (17)$$

d) 終端条件と境界条件

ここでは問題 [GLCP-A], [PDE-B], [PDE-C] の終端条件および境界条件について議論する。まず、 $t = T$ 以降の流出量については無視されるので、終端条件は以下の式 (18) によって表される。

$$V(t, n)|_{t=T} = 0 \quad (18)$$

次に存在台数に関する境界条件について考える。まず、下側境界 $n = 0$ で最適値関数が満たす条件は、問題 [GLCP-A] である。

さらに、上側境界 $n = \omega$ では、 $G(\omega) = 0$ となるので、最適値関数は以下の式 (19) を満たす。

$$V(t, n)|_{n=\omega} = 0 \quad (19)$$

ここまで示した最適性条件は、図-5 のように表せる。

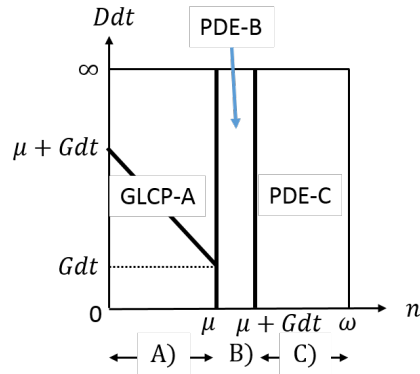


図-5 最適性条件の概念図

4. 数値計算の手順

本節では実際の数値計算手順を説明する。以降に示す表記法と手順は長江・赤松⁵⁾に準拠したものとなっており、それに大部分を負っているが、式展開の中身は本研究の問題設定に対応したものに変更されている。

構築したモデルの数値計算を行う際には、今まで議論した最適問題を離散的枠組みによって表現する必要がある。ここでは、時間と車両存在台数に関して離散表現すると、以下の式 (20) を得る。

$$\begin{aligned} \text{時間} : t \rightarrow t^i \equiv i\Delta t, & \quad i = 0, 1, \dots, I \\ \text{車両存在台数} : n \rightarrow n^j \equiv j\Delta n, & \quad j = 0, 1, \dots, J, J + 1 \end{aligned} \quad (20)$$

このとき、時間と車両存在台数からなる状態空間は図-6に示すような離散格子上的点となる。

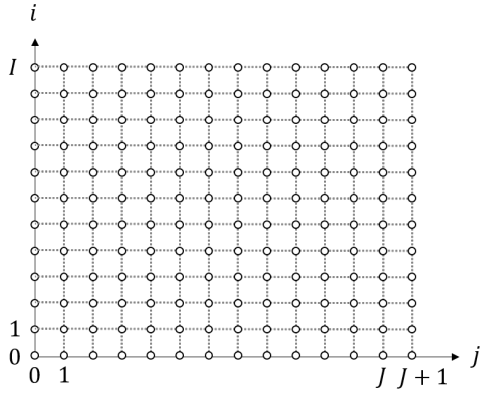


図-6 離散格子

$\Delta t, \Delta n$ はそれぞれ、時間と車両台数の離散格子間隔である。この格子状の地点 (t, n) における最適値関数の値は以下の式 (21) で定義される。

$$V^{i,j} \equiv V(t^i, n^j) \quad (21)$$

また式 (21) を用いて、時点 i における格子 $\{(i, j) | j = 1, 2, \dots, J\}$ 上の最適値関数を式 (22) の J 次元ベクトルで表す。

$$\mathbf{V}^i \equiv \begin{bmatrix} V^{i,1} \\ V^{i,2} \\ \vdots \\ V^{i,J} \end{bmatrix} \quad (22)$$

この離散的枠組の下で、問題 [GLCP-A], [PDE-B], [PDE-C] に現れる偏微分作用素 (式 (11), (12), (17)) を離散近似する。偏微分方程式の差分法で一般的に用いられる Crank-Nicolson 法等によって最適値関数の t, n についての導関数を離散近似すると、

$$\frac{\partial V(t^i, n^j)}{\partial t} \approx \frac{V^{i+1,j} - V^{i,j}}{\Delta t} \quad (23)$$

$$\frac{\partial V(t^i, n^j)}{\partial n} \approx \frac{V^{i+1,j+1} - V^{i+1,j-1} + V^{i,j+1} - V^{i,j-1}}{4\Delta n} \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 V(t^i, n^j)}{\partial n^2} \approx \frac{V^{i+1,j+1} - 2V^{i+1,j} + V^{i+1,j-1}}{2(\Delta n)^2} + \frac{V^{i,j+1} - 2V^{i,j} + V^{i,j-1}}{2(\Delta n)^2} \quad (25)$$

これらの離散近似式を式 (11), (12), (17) に代入すると、最適制御入力 $S^* = p$ のときの偏微分作用素は以下の式 (26) のように近似される。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p V(t^i, n^j) \approx & \left\{ \left(\frac{\alpha}{2\Delta n} \right)^2 - \frac{\eta(n^j, p)}{4\Delta n} \right\} V^{i,j-1} - \left\{ 2 \left(\frac{\alpha}{2\Delta n} \right)^2 + \frac{1}{\Delta t} \right\} V^{i,j} \\ & + \left\{ \left(\frac{\alpha}{2\Delta n} \right)^2 + \frac{\eta(n^j, p)}{4\Delta n} \right\} V^{i,j+1} + \left\{ \left(\frac{\alpha}{2\Delta n} \right)^2 - \frac{\eta(n^j, p)}{4\Delta n} \right\} V^{i+1,j-1} \\ & - \left\{ 2 \left(\frac{\alpha}{2\Delta n} \right)^2 - \frac{1}{\Delta t} \right\} V^{i+1,j} + \left\{ \left(\frac{\alpha}{2\Delta n} \right)^2 + \frac{\eta(n^j, p)}{4\Delta n} \right\} V^{i+1,j+1} \end{aligned} \quad (26)$$

これを、時刻 t における最適値関数 \mathbf{V}^i についてまと

めると、以下の式 (27) を得る。

$$\mathcal{L}_p \mathbf{V}^i \approx \mathbf{L}_p^i \mathbf{V}^i + \mathbf{M}_p^i \mathbf{V}^{i+1} \quad (27)$$

ここで、行列 $\mathbf{L}_p^i, \mathbf{M}_p^i$ は時点 i と時点 $i+1$ における最適値関数の係数を表しており、それぞれ式 (28), (29) のように定義される。

$$\mathbf{L}_p^i = \begin{bmatrix} L_{b,p}^{i,1} & L_{c,p}^{i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{a,p}^{i,2} & L_{b,p}^{i,2} & L_{c,p}^{i,2} & \cdots & 0 \\ 0 & L_{a,p}^{i,3} & L_{b,p}^{i,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & L_{b,p}^{i,J} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbf{M}_p^i = \begin{bmatrix} M_{b,p}^{i,1} & M_{c,p}^{i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ M_{a,p}^{i,2} & M_{b,p}^{i,2} & M_{c,p}^{i,2} & \cdots & 0 \\ 0 & M_{a,p}^{i,3} & M_{b,p}^{i,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{b,p}^{i,J} \end{bmatrix} \quad (29)$$

それぞれの要素は、 $\frac{\eta(n^j, p)}{4\Delta n} = A_p^{i,j}, \left(\frac{\alpha}{2\Delta n} \right)^2 = B_p^{i,j}$ とおくと以下の式で表される。

$$\begin{aligned} L_{a,p}^{i,j} &= -A_p^{i,j} + B_p^{i,j} & L_{b,p}^{i,j} &= -2B_p^{i,j} - \frac{1}{\Delta t} & L_{c,p}^{i,j} &= A_p^{i,j} + B_p^{i,j} \\ M_{a,p}^{i,j} &= -A_p^{i,j} + B_p^{i,j} & M_{b,p}^{i,j} &= -2B_p^{i,j} + \frac{1}{\Delta t} & M_{c,p}^{i,j} &= A_p^{i,j} + B_p^{i,j} \end{aligned}$$

これより、時点 i で成立すべき問題 [GLCP-Aⁱ] は、式 (30) のような有限次元一般相補性問題として表現することができる。

[GLCP-Aⁱ]

Find $\mathbf{V}^i|_{0 \leq n \leq \mu}$ such that

$$\begin{cases} \mathbf{F}^0[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] \cdot \mathbf{F}^{**}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] = \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^0[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^{**}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (30)$$

ここで、

$$\begin{cases} \mathbf{F}^0[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] \equiv \mathbf{L}_0^i \mathbf{V}^i + \mathbf{M}_0^i \mathbf{V}^{i+1} - \mathbf{G} \\ \mathbf{F}^{**}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] \equiv \mathbf{L}_{**}^i \mathbf{V}^i + \mathbf{M}_{**}^i \mathbf{V}^{i+1} - \mathbf{G} \end{cases}$$

と定義される。また \mathbf{G} は、 $G(n^j)$ を $j = 1, 2, \dots, J$ の順に並べた J 次元ベクトルである。

同様に、時点 i で成立すべき問題 [PDE-Bⁱ], [PDE-Cⁱ] は、それぞれ以下の式 (31), (32) ように離散近似することができる。

[PDE-Bⁱ]

Find $\mathbf{V}^i|_{\mu < n \leq \mu + G(n)dt}$ such that

$$\mathbf{G}^{**}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] \equiv \mathbf{L}_{**}^i \mathbf{V}^i + \mathbf{M}_{**}^i \mathbf{V}^{i+1} - \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (31)$$

[PDE-Cⁱ]

Find $\mathbf{V}^i|_{\mu + G(n)dt < n \leq \omega}$ such that

$$\mathbf{H}^{D(i)}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] \equiv \mathbf{L}_D^i \mathbf{V}^i + \mathbf{M}_D^i \mathbf{V}^{i+1} - \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (32)$$

終端条件は、式 (18) から、 $J+2$ 次元ベクトル

$$\mathbf{V}(t^I, n^j)|_{j=0,1,\dots,J,J+1} = \mathbf{0}_{J+2}$$

で表される。下側境界 ($j = 0$) における条件は、問題 [GLCP-Aⁱ] によって表される。また上側境界 ($j = J + 1$) における条件は、式 (19) より、以下の式 (33) で表される。

$$\mathbf{V}^{i,J+1} = 0 \quad (33)$$

これまでの議論より、時点 $i + 1$ におけるすべての状態での最適値関数を与件として、時点 i におけるすべての状態での最適値関数 $V(t^i, n^j)|_{j=0,1,\dots,J,J+1}$ を得ることができる。それらをまとめた上で、最適制御問題 SDSO の数値解を求めるためのアルゴリズムは、以下のようによまとめることができる。

- Step0** 終端条件 $\mathbf{V}(t^I, n^j)|_{j=0,1,\dots,J,J+1} = \mathbf{0}_{J+2}$, $i := I - 1$
- Step1** 境界条件式 (33) によって下側境界における最適値関数を求める。
- Step2** 時点 $i + 1$ での最適値関数および、Step1 で求めた境界値を与件として、各問題 [GLCP-Aⁱ], [PDE-Bⁱ], [PDE-Cⁱ] を解いて時点 i における最適値関数 \mathbf{V}^i を求める。
- Step3** $i = 0$ ならば終了。それ以外の場合、 $i := i - 1$ として Step1 へ。

なお、[GLCP-Aⁱ] は、式を変形することにより線形相補性問題へと帰着させることができる。まず、式 (30) の $\mathbf{F}^{**}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}]$ を以下のように変形する。

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{**}^{i^T} \mathbf{F}^{**}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] &= \mathbf{V}^i + \mathbf{L}_{**}^{i^T} \mathbf{M}_{**}^i \mathbf{V}^{i+1} - \mathbf{L}_{**}^{i^T} \mathbf{G} \\ \mathbf{V}^i &= \mathbf{L}_{**}^{i^T} \mathbf{F}^{**}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] - \mathbf{L}_{**}^{i^T} \mathbf{M}_{**}^i \mathbf{V}^{i+1} + \mathbf{L}_{**}^{i^T} \mathbf{G} \\ \mathbf{V}^i &\equiv \mathbf{L}_{**}^{i^T} \mathbf{F}^{**}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] + \mathbf{q}_{**} \end{aligned} \quad (34)$$

これを式 (30) の $\mathbf{F}^{**}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}]$ に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^0[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] &= \mathbf{L}_0^i (\mathbf{L}_{**}^{i^T} \mathbf{F}^{**}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] + \mathbf{q}_{**}) + \mathbf{M}_0^i \mathbf{V}^{i+1} - \mathbf{G} \\ \mathbf{F}^0[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] &\equiv \mathbf{L}' \mathbf{F}^{**}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] + \mathbf{q}' \end{aligned} \quad (35)$$

式 (30) と式 (35) より、[GLCP-Aⁱ] は線形相補性問題 [LCP-Aⁱ] へと書き換えられる。

[LCP-Aⁱ]

Find $\mathbf{V}^i|_{0 \leq n \leq \mu}$ such that

$$\begin{cases} \mathbf{F}^0[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] = \mathbf{L}' \mathbf{F}^{**}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] + \mathbf{q}' \\ \mathbf{F}^0[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] \cdot \mathbf{F}^{**}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] = 0 \\ \mathbf{F}^0[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^{**}[\mathbf{V}^i, \mathbf{V}^{i+1}] \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (36)$$

5. 数値計算例

本節では、提案した制御方法に関する簡易な数値計算結果を示す。

(1) パラメータの設定

まず、MFD の形状を以下の式 (37) のように特定化する。

$$G(n(t)) = \begin{cases} 0.1114n(t) & \text{if } n(t) \leq 3400 \\ -0.05362n(t) + 560 & \text{if } n(t) > 3400 \end{cases} \quad (\text{veh./min.}) \quad (37)$$

この形状は、Geroliminis and Daganzo²⁾ によって横浜を対象に作成された MFD を 3 角形に近似したものである。このとき、 $\mu = 3400$, $\omega = 10450$ となっている。その他の数値を設定するにあたり、あるエリアにおいて、20 日の期間ピーク時間帯に制御を行うことを想定する。そのため、計画期間は $t = [0, 180]$ として 3 時間を仮定する。また、シミュレーションの繰り返し回数は 20 回とする。車両存在台数に関する離散格子間隔は $\Delta n = 50$ とする。 Δt は制御を行う時間間隔と考えることができる。そのため、ここでは 1 分毎 ($\Delta t = 1$) と 10 分毎 ($\Delta t = 10$) の二つの場合においてシミュレーションを行う。

交通需要は三つのパターンを想定する。図-7 にその 3 つのパターンを示す。最も需要の少ない場合のピーク時の需要は、エリアの最大流出台数とほぼ一致するようになっている。また MFD の不確実性を表すパラメータ α は、 $0.1n(t)$, $0.05n(t)$, $0.025n(t)$, $0.0125n(t)$ の 4 パターンを想定する。その不確実性の例として、 $\alpha = 0.0125n(t)$ の場合に描かれる MFD を図-8 に示す。

また、本研究で提案した確率的制御方法の効果を確かめるため、変動要因がないと仮定しあらかじめ制御ルールを決定する確定的制御と、制御を行わない状態についてそれぞれシミュレーションを行い比較する。

(2) シミュレーション結果

まず、制御問題の目的関数でもある車両流出台数の累計値の比較を行う。図-9 ~ 図-11 にそれぞれの需要パターンにおける結果を示す。この結果から、どの需要

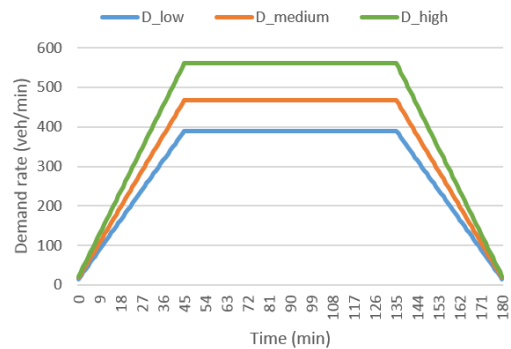


図-7 想定する需要変動パターン

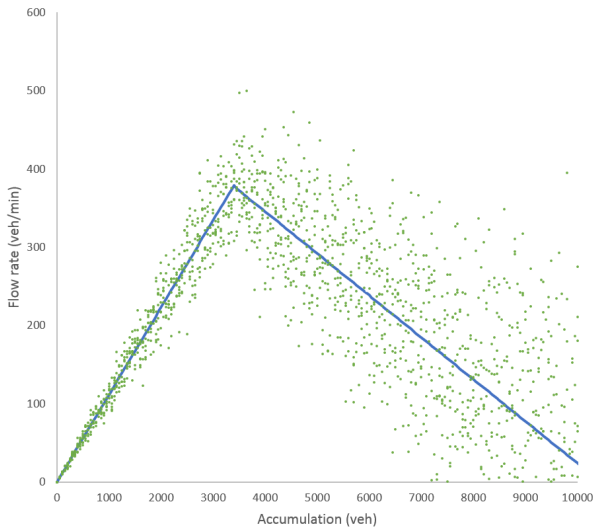


図-8 $\alpha = 0.0125n(t)$ の場合の MFD

パターンにおいても確率的制御を行った場合に累計流出台数が最も多くなっていることが分かる。特に、不確実性が大きいときほどその効果は大きく、確定的制御では累計流出台数が大きく減少しているにもかかわらず、確率的制御では安定して同程度の流出台数を保っている。また、低需要パターンでは、確定的制御ルールが常にゼロ（不確実性のない場合であれば制御を行わなくても渋滞領域に陥らない）となっている。

次に、各繰り返しごとにピーク時間帯 1 時間 ($t = [60, 119]$) を対象に旅行時間を推計し、変動係数を求めた。各繰り返しの旅行時間は流出台数と存在台数から、以下の式 (38) によって推計する。

$$TT = \frac{n(t)}{G(n(t))} = \begin{cases} 0.1114 & \text{if } n(t) \leq 3400 \\ \frac{n(t)}{-0.05362n(t)+560} & \text{if } n(t) > 3400 \end{cases} \quad (38)$$

これを $\Delta t = 1$ と $\Delta t = 10$ の二つのパターンごとに行い、その結果をそれぞれ図-12～図-14 と図-15～図-17 に示す。

まず $\Delta t = 1$ の結果を見ると、確率制御によって旅行時間信頼性 (Travel Time Variability: TTV) が減少する結果となった。また、どの制御パターンにおいても、需要による変化はそれほど見られないことが分かる。ただし、確定的制御では、低需要パターンでは制御ルールが常にゼロなので、他とは傾向が異なっている。確率的制御では不確実性が増す結果となっている。確定的制御でも $\alpha = 0.0125, 0.025$ では同様の傾向がみられる。しかし、それ以上の不確実性では変動係数が低下する結果となった。これは、不確実性が大きくなるにつれ、確定的な制御ルールと、各時間における最適制御がかけ離れていくことが原因であると考えられる。つまり、不確実性が増すと渋滞領域に陥りやすくなり、

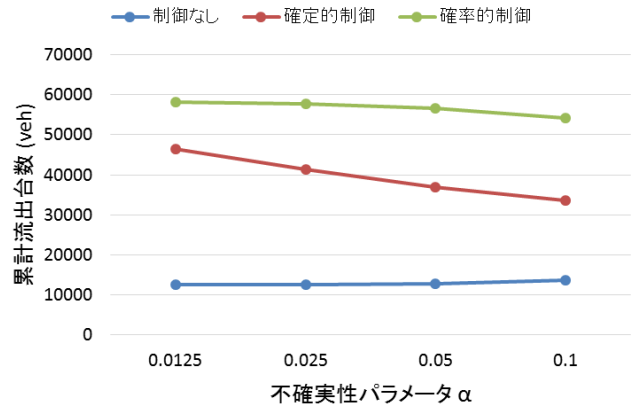


図-9 高需要パターン 累計流出台数

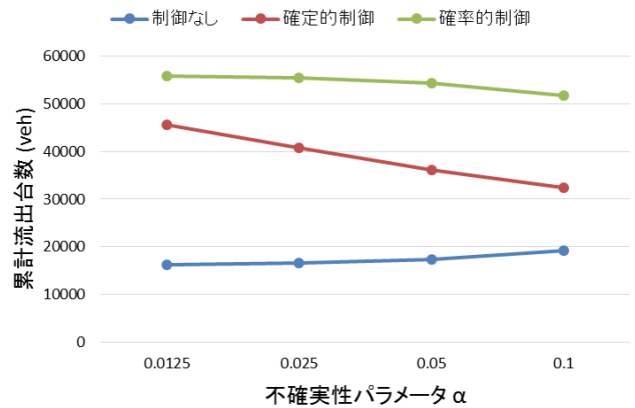


図-10 中需要パターン 累計流出台数

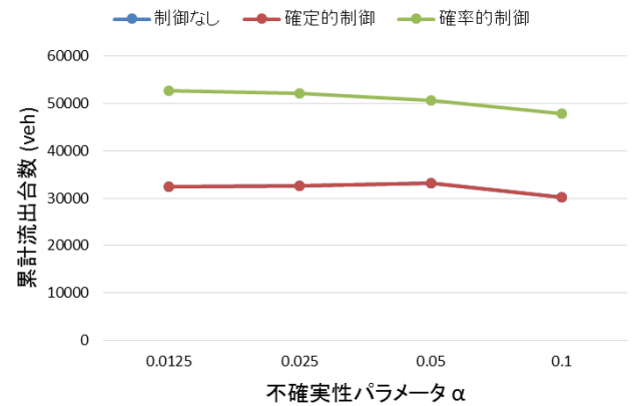


図-11 低需要パターン 累計流出台数

最終的には gridlock となっていると考えられる。本来、gridlock の状況では $TT \rightarrow \infty$ となるが、ここでは大きな定数を与えている。そのため、TT を推計したほとんどの時間帯で gridlock となっていると、その大きな定数に旅行時間が近づき、結果として変動係数は小さくなっていることが考えられる。この gridlock によって変動係数が低下する現象は制御なしの場合でも起こっ

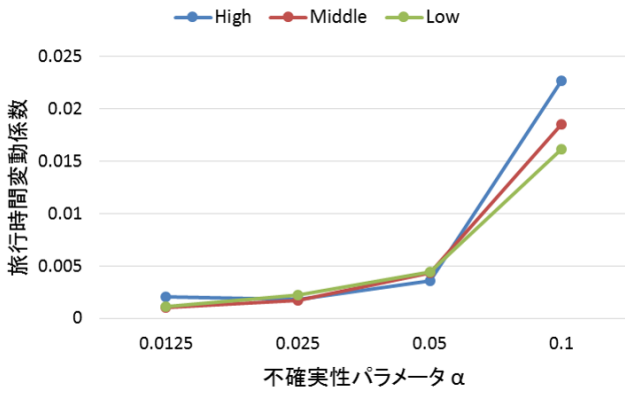


図-12 $\Delta t = 1$ の時の確率的制御における旅行時間変動係数

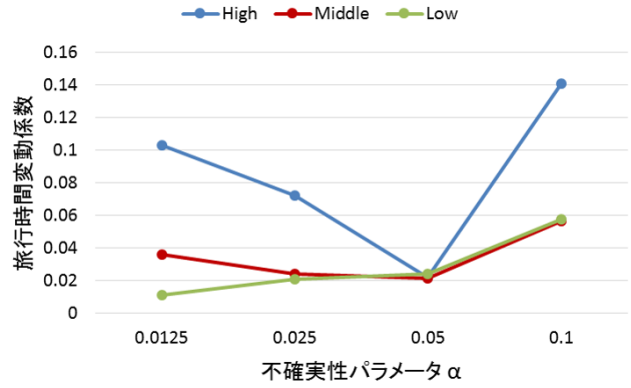


図-15 $\Delta t = 10$ の時の確率的制御における旅行時間変動係数

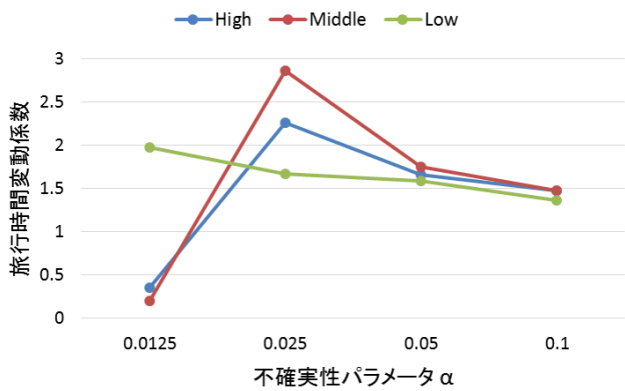


図-13 $\Delta t = 1$ の時の確定的制御における旅行時間変動係数

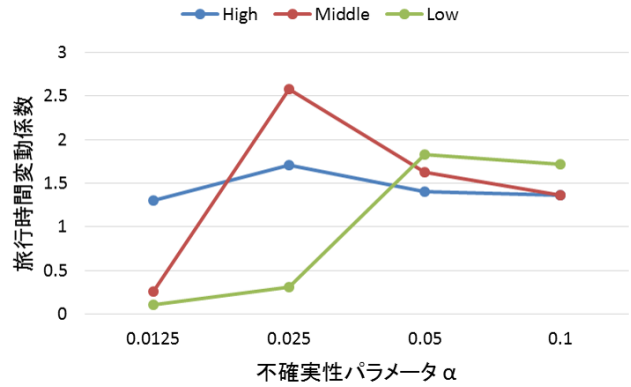


図-16 $\Delta t = 10$ の時の確定的制御における旅行時間変動係数

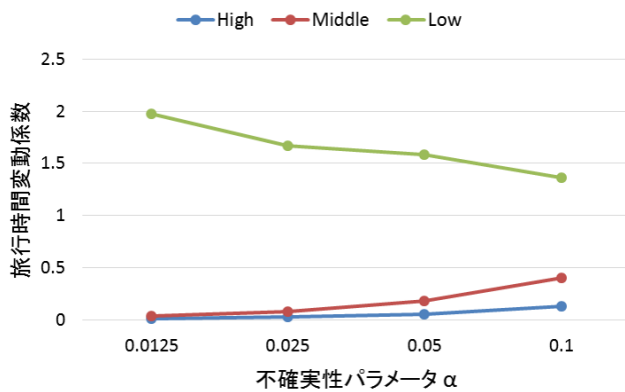


図-14 $\Delta t = 1$ の時の制御なしにおける旅行時間変動係数

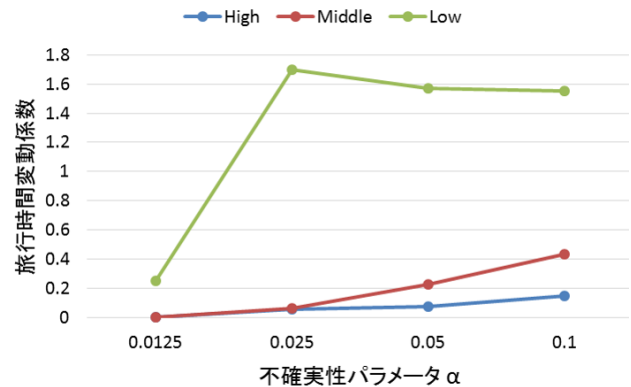


図-17 $\Delta t = 10$ の時の制御なしにおける旅行時間変動係数

ている。

次に $\Delta t = 1$ と $\Delta t = 10$ の結果の比較を行う。これから、基本的な傾向は制御を行う間隔を大きくしても変わらないことが分かる。とくに確率的制御では旅行時間が安定する結果となった。

6. おわりに

本研究では、MFD形状の不確実性を考慮した最適なエリア流入制御問題に関する基礎的検討を行った。MFDの不確実性をモデル内で明示的に考慮することで、制御後の交通状態がより安定する制御方法を構築し、提案した制御方法の有用性に関して、数値シミュレーションを行った上で確認した。

本研究の流入制御問題では、1つのエリアを対象とし

た問題について取り組んでいる。しかし、1つのエリアの交通状態のみを考慮し、流入を制限した場合、その周辺のエリアの交通状態は悪化することが考えられる。そのため、1つのエリアのみを対象とした問題から、複数地域を対象とした問題へと拡張することが求められると考えられる。また、数値シミュレーションでは制御方法の効果を確認したが、パラメータ設定の妥当性には疑問が残る。特に不確実性パラメータ α は、最も不確実性の低いとした値でもある程度大きなばらつきを持つ MFD を仮定していた。そのため、より小さな値で確認する必要があると思われる。さらに、数値シミュレーションのなかで TTV を評価するために変動係数を用いたが、変動係数では常に gridlock の場合の TTV が小さくなってしまいう問題が生じた。そのため、TTV を評価する指標に関しては更なる検討が必要である。

謝辞 本研究を行うにあたり、東北大学長江剛志准教授より数多くの貴重なアドバイスを頂くと共に、数値解法手順に関するご指南を頂いた。この場をお借りして感謝の意を表したい。

参考文献

- 1) Daganzo, C. F.: Urban gridlock: macroscopic modeling and mitigation approaches, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 41, No. 1, pp. 49–62, 2007.
- 2) Geroliminis, N. and Daganzo, C. F.: Existence of urban-scale macroscopic fundamental diagrams: Some experimental findings, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 42, No. 9, pp. 759–770, 2008.
- 3) Mazloumian, A., Geroliminis, N. and Helbing, D.: The spatial variability of vehicle densities as determinant of urban network capacity, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 368, No. 1928, pp. 4627–4647, 2010.
- 4) Ji, Y. and Geroliminis, N.: On the spatial partitioning of urban transportation networks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 46, No. 10, pp. 1639–1656, 2012.
- 5) 長江剛志, 赤松隆: リアルタイム観測情報を活用した動的なシステム最適交通配分: 確率制御アプローチ, 土木学会論文集 D, Vol. 63, No. 3, pp. 311–327, 2007.
- 6) Geroliminis, N. and Sun, J.: Properties of a well-defined macroscopic fundamental diagram for urban traffic, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 45, No. 3, pp. 605–617, 2011.

(2017. 8. 1 受付)