交通ネットワーク信頼性解析に向けた Network Science指標の適用関係性に関する考察

安藤　宏恵[1]・倉内　文孝[2]・明光　就平[3]

[1]学生会員　岐阜大学大学院　工学研究科生産開発システム工学専攻（〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸1-1）
E-mail:hiroe@gifu-u.ac.jp

[2]正会員　岐阜大学教授　工学部社会基盤工学科（〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸1-1）
E-mail: kurauchi@gifu-u.ac.jp

[3]非会員　岐阜大学　工学部社会基盤工学科（〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸1-1）
E-mail: t3030061@edu.gifu-u.ac.jp

災害が発生したとしても深刻な機能低下に陥らない道路ネットワークを構築することは，常に災害にさらされ続けている我が国において重要な課題である．そのため，道路ネットワークの接続性評価方法が様々提案されているが，配分計算や複数経路の探索が必要となるなどデータの収集や計算に手間がかかるものも多く，安定的な方法論は未だ確立されているとはいいがたい．本研究では，先行研究に引き続き，Network Scienceにて用いられる指標と交通工学的な接続性の指標との関係性，およびSpectral Partitioning 法による分割とネットワーク形状に関するパラメータとの関係性を分析し，新たな交通ネットワーク信頼性解析の方法論を模索する．

Key Words : *Network Science，Spectral Partitioning, Algebraic Connectivity*

1.　はじめに

災害に対し，冗長性をもちなおかつ災害発生後の適切な対応によりその機能低下が最小限である強靭な交通ネットワークを構築することは，我が国において重要な課題である．災害発生後の状況下では，重傷患者の搬送や物資輸送，復旧復興支援のための輸送などに使われるなど，平常時より増して道路の役割は重要になる．このような観点の元，冗長性，強靱性確保のための交通ネットワーク計画論は様々提案されている[例えば1),2),3)]が，連結信頼性指標を活用した研究においては，ネットワーク容量計算や混雑度計算のように配分計算を必要とはしないものの最短経路探索アルゴリズムを援用することや，途絶可能性の数え上げなど特に大規模ネットワークにおいては計算が困難であるものが多く，大規模ネットワークにおいても容易に計算できる方法論の構築が求められている．

一方筆者らは，大規模ネットワークにおける信頼性評価のために，Network Scienceの知見を援用することを提案している[4),5)]．倉内[4)]では，Network Scienceにて用いられる指標であるNetwork Entropyや代数的連結度と交通工学的な接続性の指標である非重複経路およびネットワーク容量との関係性を考察し，ネットワークの全ノードペア間の平均非重複経路数とNetwork Entropy値が，ネットワーク容量と代数的連結度が相関性が高いことを示した．しかしながら，この検討はスモールワールド，スケールフリーなどを想定した仮想的なネットワークに対する適用であり，比較的レギュラーネットワークに近い様々な道路ネットワークにおいて同様の結果が得られるかどうかは定かではない．また，明光ら[5)]においては，ラプラシアン行列の最小固有値（代数的連結度）によるネットワークの分割問題（Spectral Partitioning）について取り扱い，重要なリンク群の抽出を試みているが，Sioux Fallsネットワークおよび岐阜県ネットワークへの適用が中心であり，他のネットワークにおける結果の安定性について検討を加える必要がある．

以上のような背景の元，本稿では倉内[4)]，明光ら[5)]の先行研究に引き続き，利用可能な多様なネットワークにおいて同様の計算を実施した結果を基に，ネットワーク評価指標の相関性やネットワークの特徴による重要なリンク群の抽出傾向の違いなどに関して知見を積み重ねることを目的としている．

2. Network Scienceに基づく評価指標

本章では，Network Sienceに関連した評価指標として，特にスペクトラルグラフ理論[6]と複雑ネットワークを活用したネットワーク評価指標について説明する．スペクトラルグラフ理論とは，グラフの持つ特性を隣接行列，ラプラシアン行列などを活用して考察するものである．複雑ネットワークとは現実に即したネットワーク分析のために，様々な近似を許して実利や定量性に重きを置いて発展してきた評価方法である．

(1) 隣接行列

隣接行列（Adjacency matrix）とは，ネットワーク上の接続関係を表現するものである．いま，ネットワークが$G=(\mathbf{V},\mathbf{E},\mathbf{w})$で表現されるものとする．ただし，$\mathbf{V}$はノード（vertex）の集合，$\mathbf{E}$はリンクの集合，そして$\mathbf{w}$は各リンクに紐付けられた重み（$>0$）である．このとき，隣接行列$\mathbf{A}_G$は，大きさ$|\mathbf{V}|\times|\mathbf{V}|$であり，以下を要素に持つ行列である．

$$a_{uv}=\begin{cases} w_e & \text{if } e=(u,v)\in\mathbf{E}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

つまり，ネットワーク上のノードuからvに向けてリンクがある場合，そのリンクに対応する重みw_eを要素に持つ．もし，重みを考慮しない場合，$w_e=1$とする．無向リンクの場合隣接行列$\mathbf{A}_G$は対称行列となる．

(2) 次数行列

次数行列とは，重みがない場合には各ノードに流入，あるいは流出するリンクの数になる．また，重み付きの場合には，その重みの和である．

$$d_{uu}=\sum_{v\in\mathbf{V}}a_{uv}, u\in\mathbf{V}. \tag{2}$$

なお，無向リンクの場合にはこの値は列和をとっても行和をとっても一致する．また，上記のd_{uu}を対角行列にもち，それ以外の要素を0とする行列を次数行列$\mathbf{D}_G$と定義する．

(3) ラプラシアン行列

ラプラシアン行列とは，隣接行列および次数行列を用いて以下のように定義できるものである．

$$\mathbf{L}_G=\mathbf{D}_G-\mathbf{A}_G \tag{3}$$

定義より，ラプラシアン行列の列和あるいは行和は 0 になる．

(4) 正規化ラプラシアン行列

正規化ラプラシアン行列とは，ラプラシアン行列の対角要素を 1 に正規化したものであり，以下の通り定義される．

$$\mathbf{N}_G=\mathbf{D}_G^{-0.5}\mathbf{L}_G\mathbf{D}_G^{-0.5} \tag{4}$$

(5) 固有値

$n\times n$行列が対称行列である場合，実数の固有値が存在する．隣接行列$\mathbf{A}_G$のn個の実数の固有値を$\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n(\mu_1\geq\mu_2,\dots,\geq\mu_n)$とし，またそれに対応した$n$個の互いに直交する固有ベクトル$\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2,\dots,\boldsymbol{\psi}_n$と置くことにする．このとき，最大固有値$\lambda_1$およびこれに対応する固有ベクトル$\boldsymbol{\psi}_1$は以下のレイリー商を最大化する問題の解として定式化できる．

$$\mu_1=\max_{\mathbf{x}}\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}_G\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\psi}_1=\arg\max_{\mathbf{x}}\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}_G\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} \tag{6}$$

さらに 2 番目以降のi番目固有値については，それまでに見つかった$i-1$の固有ベクトルと直交しつつ，レイリー商を最大化するものとして，以下のようにかける．

$$\mu_i=\max_{\mathbf{x}\perp\boldsymbol{\psi}_1,\dots,\boldsymbol{\psi}_{i-1}}\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}_G\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\psi}_i=\arg\max_{\mathbf{x}\perp\boldsymbol{\psi}_1,\dots,\boldsymbol{\psi}_{i-1}}\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}_G\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} \tag{8}$$

続いて，ラプラシアン行列の二次形式について考えてみる．以下のように書くことができる．

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}_G\mathbf{x}=\sum_{(u,v)\in\mathbf{E}}\left(x(u)-x(v)\right)^2 \tag{9}$$

この値はいかなる$\mathbf{x}$であっても正の値となるため，ラプラシアン行列の固有値は負になることはない．また，ラプラシアン行列の定義より，ベクトル$\mathbf{x}$をすべての要素が1のベクトルとすると，レイリー商の値は0になる．つまり，ラプラシアン行列の固有値を小さなものから順に$\lambda_1\leq\lambda_2\dots\leq\lambda_n$とおくと，$\lambda_1=0$となる．なお，$\lambda_i$の計算方法であるが，$\lambda_1\dots\lambda_{i-1}$すべてに直交しつつ，レイリー商を最小化するものとしてλ_iがえられる．ラプラシアン行列と同様に，正規化ラプラシアン行列の固有値も非負となり，さらに少なくとも1つは0をとる．この固有値を$\nu_1\leq\nu_2\dots\leq\nu_n$とおく．

(6) 接続性指標とその上下界値

グラフ特性を表す隣接行列，ラプラシアン行列および正規化ラプラシアン行列の固有値は，様々な接続に関連する指標の上界・下界値を与えることが示されており，それ自身が接続性の指標になりうる．

a) Network Entropy

Demetrius and Manke[7]は，ネットワークの頑健性を表す指標として，Network Entropy を提案している．ここでは，ネットワーク上の情報の移動を Markov 行列$\mathbf{P}=\left(P_{ij}\right)$による確率過程と仮定する．$p_{ij}$は，状態$i$から$j$への遷移を意味しており，$\sum_j p_{ij}=1$，その定常分布は，$\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$である．このプロセスの動的エントロピー$H(\mathbf{P})$を Network Entropy と定義し，次のように記述できる．

$$H(\mathbf{P})=\sum_{i=1}^{N}\pi_i H_i,\ \text{where } \mathrm{H_i}=-\sum_j p_{ij}\log p_{ij} \tag{10}$$

また，Network Entropy は，ある特定の Markov 行列$\mathbf{P}$を用いることで，以下のように記述できる．

$$\log\mu_1=-\sum_{ij}\pi_i p_{ij}\log p_{ij}+\sum_{ij}\pi_i p_{ij}\log a_{ij} \tag{11}$$

さらに，隣接行列の要素の値が$0-1$の時，すなわちリンクの重みを考慮しない場合には，(11)式の右辺第 2 項はなくなり，$H=\log\mu_1$となる．したがって，Network Entropy の値は，重みのない隣接行列であれば第 1 最大固有値の対数（この場合の底は 2）をとったものになる．さらに，Demetrius and Manke[7]は，Network Entropy の値がシステムの頑健性と比例関係であることをしめしている．

なお，Hは，ネットワークの平均次数$\bar{d}$および最大次数d_{max}の対数値により上下界値が与えられることが示されている[8]．

$$\max\{\log\bar{d},0.5\log d_{max}\}\le H\le\log d_{max} \tag{12}$$

b) 代数的連結度（Algebraic Connectivity）

グラフのサブセットを$\mathbf{S}$と定義しよう．今，全体のグラフ$\mathbf{V}$からあるサブセット$\mathbf{S}$を分離することを考える．このとき，$\mathbf{S}$とそれ以外とをつなぐリンクの数を数えることとする．以下を定義する．

$$\partial(\mathbf{S})\equiv\{(u,v)\in\mathbf{E}:u\in\mathbf{S},v\in\mathbf{V}-\mathbf{S}\} \tag{13}$$

このとき，以下のようなベクトル$\mathbf{x}_s$を考える．

$$x_S(u)=\begin{cases}1/m\ \text{if}\ u\in\mathbf{S}\\1/(m-n)\ \text{if}\ u\in\mathbf{V}-\mathbf{S}\end{cases} \tag{14}$$

ここで，mはサブセット$\boldsymbol{S}$に含まれるノードの個数である．このとき，$\mathbf{x}_S\perp\mathbf{1}$であることは明らかである．以上より，

$$\lambda_2\le\frac{\mathbf{x}_S^T\mathbf{L}_\mathbf{G}\mathbf{x}_S}{\mathbf{x}_S^T\mathbf{x}_S}=\frac{n}{m(n-m)}\sum_{e\in\partial(\mathbf{S})}w_e \tag{15}$$

と書くことができる．つまり，ラプラシアン行列の第 2 最小固有値は，式(15)で表される指標の最小値をとる．ここで，右辺の値を最小にすることを考えよう．まず分数部分について，nが所与であることを鑑みると，mと$n-m$がほぼ同数，つまりサブセット$\mathbf{S}$と残余セット$\mathbf{V}-\mathbf{S}$のノード数がほぼ等分されることにより最小になる．また，シグマの中は境界に属するリンクの重みの和である．つまり，「境界リンクの重みの和が最小になりつつネットワークをほぼ２等分になるような事象の起きやすさ」をλ_2が表しているといえる．ちなみに，元々ネットワークが非連結である場合には，部分グラフの数の分のλ_iの値がゼロになる．

c) コンダクタンス（conductance）とCheeger定数

コンダクタンスとは，以下のように定義される[6]．

$$h(\mathbf{S})=\frac{1}{\min[d(\mathbf{S}),d(\mathbf{V}-\mathbf{S})]}\sum_{e\in\partial(\mathbf{S})}w_e \tag{16}$$

ただし，$d(\mathbf{S})$はサブセット$\mathbf{S}$の次数の和を表す．コンダクタンスも接続性を示すひとつの指標であり，この値が最小のものを Cheeger 定数h_Gと呼ぶ．

$$h_G=\min_{\mathbf{S}\subset\mathbf{V}}h(\mathbf{S}) \tag{17}$$

また，Cheeger 定数の上下界値は Cheeger 不等式により，

$$0.5\nu_2\le h_G\le\sqrt{2\nu_2} \tag{18}$$

と示されており，正規化ラプラシアン行列の第 2 最小固有値ν_2により規定される．

(7) ネットワーク接続性と分割問題

以下のような分割問題を考える．

$$\min_{\mathbf{y}}\mathbf{y}^T\mathbf{L}_G\mathbf{y} \tag{19}$$

subject to

$$\mathbf{y}\in\{a,b\}^n \tag{20}$$

$$\mathbf{y}^T\mathbf{1}=0 \tag{21}$$

$$\mathbf{y}^T\mathbf{D}_G\mathbf{y}=1 \tag{22}$$

最適性条件より，最適解から得られる係数a,bは次のようにかける．

$$a=\left(\frac{(n-m)^2}{(n-m)^2d(\mathbf{S})+m^2d(\mathbf{V-S})}\right)^{0.5} \tag{23}$$

$$b=-\left(\frac{m^2}{(n-m)^2d(\mathbf{S})+m^2d(\mathbf{V-S})}\right)^{0.5} \tag{24}$$

この結果と，正規化ラプラシアン行列のレイリー商の定義との関係を見ると，レイリー商は制約条件である式(20)を緩和した問題となっているため，その値は必ず式(19)の最適値より小さいはずである．そのため，次のように記述することができる．

$$\nu_2\le\frac{\mathbf{y}_S^T\mathbf{L}_G\mathbf{y}_S}{\mathbf{y}_S^T\mathbf{D}_G\mathbf{y}_S}=\frac{n^2}{(n-m)^2d(\mathbf{S})+m^2d(\mathbf{V-S})}\sum_{e\in\partial(\mathbf{S})}w_e \tag{25}$$

ここで，$\mathbf{y_s}$の要素は次のように定義できる．

$$y_S(u)=\begin{cases}a\ \text{if}\ u\in S\\-b\ \text{if}\ u\in V-S\end{cases} \tag{26}$$

これより，正規化ラプラシアン行列の第2最小固有値はサブセット$\mathbf{S}$と残りのネットワーク$\mathbf{V}-\mathbf{S}$の境界の重みの和に関する下界値をあたるものであり，Bandeira[9]によれば，正規化カット（Normalised Cut）と呼ばれるものになる．次に，以下の問題について考えてみよう．

$$\max_{\theta}\frac{1}{(1-\theta)^2d(\mathbf{S})+\theta^2d(\mathbf{V-S})} \tag{27}$$

subject to

$$0\le\theta\le1 \tag{28}$$

式(27)は，$\theta=d(\mathbf{S})/d(\mathbf{V})$のとき最大値をとるため，以下が成立する．

$$\frac{n^2}{(n-m)^2d(\mathbf{S})+m^2d(\mathbf{V-S})}\le\frac{d(\mathbf{V})}{d(\mathbf{S})d(\mathbf{V-S})} \tag{29}$$

式(25)と式(29)より，次のように記述できる．

$$\nu_2\le\frac{d(\mathbf{V})}{d(\mathbf{S})d(\mathbf{V-S})}\sum_{e\in\partial(\mathbf{S})}w_e \tag{30}$$

式(30)右辺の値を最小にする意味を考える．まず分数部分についてみてみると，サブセット$\mathbf{S}$に属するノードの次数と残りのネットワーク$\mathbf{V}-\mathbf{S}$に属するノードの次数がほぼ同じ値となるとき最小の値をとる．また，シグマの中は境界に属するリンクの重みの和である．つまり，「境界リンクの重みの和が最小になりつつネットワークを各サブセットの次数の和がほぼ2等分になるような事象の起きやすさ」をν_2が表しているといえる．元々のネットワークが非連結であった場合には，分割数i分のλ_iの値がゼロになる．

(8) スケールフリー・ネットワークと scaling factor

スケールフリー性とは，ネットワークのノードが時間とともに増加していく成長ネットワークであること，頂点次数の大きなノードが接続されやすいという優先選択であることを前提とし，特徴的尺度を持たないネットワークとされる[10]．ネットワーク$G=(\mathbf{V},\mathbf{E})$がスケールフリー性を有するとき，$e$本のリンクを持つノード$v$の確率密度関数$f$は以下のようにべき乗則に従う．

$$f(e)=e^{-\varepsilon} \tag{31}$$

このときのεはべき指数（scaling factor）と呼ばれ，式(31)の両辺に対数をとった式(32)の傾きの絶対値となる．同じべき指数を持つ分布はスケール変換に対して不変である．

$$\ln(f(e))=-\varepsilon\cdot\ln(e)+\ln\alpha \tag{32}$$

スケールフリー性が高いネットワークは一般的に$2<\varepsilon<3$の範囲内のεを持つ．Scaling factor εが小さくなるほど，少なからず巨大な次数を持つノード（ハブ）が存在することとなり，ネットワークの不均一性は高まるといえる．Buchanan[11]はこのようなネットワークについて，多数のノードが高い接続性を持つため"aristocratic"といい，大きなεを持つネットワークについてはリンクがより均等に分布することから"egalitarian"と表現している．つまり，Scaling factorがネットワークの特性を表す指標のひとつになりうるといえる．

3. 交通工学的なネットワーク評価指標

(1) 非重複経路本数

交通ネットワークの評価にあたり，脆弱性の観点を重視し，事象の発生確率ではなく，生起した後の事態の深刻さを計測する指標として，Kurauchi et al.[12]は，非重複経路本数を数え上げる方法を提案している．これは，OD ペア間について，「リンクを共有することなく接続可能な経路の本数」を意味しており，もしODペア間にn個の非重複経路が存在する場合，最悪$n-1$個のリンクが途絶したとしても接続性を保つことが保証される．重複性の低いネットワーク形状であれば，最悪ケースにおいても十分な接続性を確保することが可能といえる．なお，定式化の詳細は文献4), 12)を参考にしていただきたい．

(2) ネットワーク容量

非重複経路数は，OD ごとあるいはある地域を評価するための指標であった．一方で，ネットワーク全体の性能評価のための指標として，ここではネットワーク容量（Network Capacity）を取り上げる．ネットワーク容量とは，「所与の OD パターンの元，ネットワークに渋滞が起こることなく受け入れ可能な交通量」と定義することができる．これを求めるためには，所与の需要をリンクに割り当てる必要があり，一般的には利用者均衡配分を仮定して交通量を割り当て，交通量が容量を超えない需要レベルを求める 2 レベル最適化問題として定式化される[16]．ネットワーク容量は，現時点の交通需要に対してネットワークが十分な機能を有しているのかを判断するために有用な指標といえる．

ネットワーク容量を算定するにあたり，利用者均衡配分を下位問題として取り扱う場合，上位問題が生成交通量の 1 変数の最適化問題ではあるものの候補解ごとに利用者均衡状態を求める非線形最適化問題を解く必要があり，計算効率性は高くない．そのため，ここでは，容量制約つき直角関数利用者均衡配分（Capacitated User Equilibrium Assignment with right-angle function）[13]を用いることとした．この手法は，配分問題としては総走行時間最小化問題を解くことで最適リンク交通量を求めるが，一方で容量を超えるリンクに対してはシャドウプライスとして遅れ時間を加味し，各 OD ペア間の等時間原則を表現する方法論である．ネットワーク容量は，所与の OD パターンを前提をしているため，災害時に生起しうる OD パターンとは異なる可能性がある．一方で，災害時には OD パターン自身が変化するため，災害時のネットワーク機能を表現しているとは限らない．しかしながら，平常時の交通需要を処理可能であるネットワークであれば，少なくとも平常時に向けて回復する交通需要を対処できるといえるため，災害に対する耐性は高いといえる．

4. 対象ネットワークと指標の特性分析

本研究では，先行研究で示された知見を様々なネットワークで検証する．そのために，Bar-GeraによるTransport Network Test Problem[14]より，世界6都市（Berlin, Birmingham, Chicago, Gold Coast, Philadelphia, Sydney）およびBerlin City内の4つの地区（Friedrichshain, Mitte, Prenzlauerberg Center, Tiergarten Center）の計10個のネットワークを用いて計算を適用した．対象とするネットワークの概要を表-1に示す．

なお，ネットワーク指標を算定する際には，純粋な接続性を評価するために重みをすべて1にした場合と，各リンクの交通容量を重みとして与えた場合の2つのケースを検討した．

リンクの重みを考慮しないときの第二最小固有値をν_{2a}，λ_{2a}リンクの重みを交通容量としたときの第二最小固有値をν_{2b}，λ_{2b}とする．分析を進める前段階として**表-2**に示すν_{2a}とλ_{2a}の相関をみると，相関係数0.999と非常に高い値を示したのに対し，ν_{2b}とλ_{2b}の相関係数は0.153とほぼ相関がみられないという結果になった．これより，リンクの重みを考慮する場合には，正規化ラプラシアン行列とラプラシアン行列ではそれぞれの第二最小固有値の特性に差が生じるため，指標として用いる際には注意が必要であることが明らかとなった．

(1) 交通工学的指標とNetwork Science指標の関係

まず，交通工学的な指標とNetwork Science指標の関係性を議論する．なお，本研究の動機は，従来の交通工学的概念では大規模ネットワークにおける適用計算が限定的であることである．そのため，ここでは先に示した10個のネットワークのうち，小規模な4つの地区ネットワークに関して検証を進める．これらの地区ネットワークでは，交通工学的な評価指標である平均非重複経路本数，ネットワーク容量とグラフの幾何学的接続性，Network Entropyとの関係をみる．

a) 非重複経路数

4 つの各地区ネットワークにおいて，すべてのノード間の非重複経路の平均値である平均非重複経路数と前述の第二最小固有値$\nu_{2a},\lambda_{2a},\nu_{2b},\lambda_{2b}$，Network Entropy（$H$）の関係をみる．まず，平均非重複経路数と Network Entropy の関係を**図-1** に示す．これらには正の相関がみられ，相関係数は 0.558 であった．Network Entropy は平均次数と最大次数によって範囲が規定されるものであり，平均非重複経路数が多い頑健なネットワークほど，接続性の高いノードが多数存在するといえる．また，H と$\nu_{2a},\lambda_{2a},\nu_{2b},\lambda_{2b}$の関係は**表-3** のようになっており，負の相関があることがわかった．$\nu_{2a},\lambda_{2a},\nu_{2b},\lambda_{2b}$は接続性を示す指標であり，その値が小さければ小さいほどより少ない本数のリンクでネットワークを非連結にすることができる．つまり，次数の高いノードが存在することによって，形状的に非連結部分を生じさせやすくすることを示している．$\nu_{2a},\lambda_{2a},\nu_{2b},\lambda_{2b}$と平均非重複経路数の間に相関がみられないことからも，ネットワーク形状による分割のしやすさによる評価と非重複経路数によるネットワーク頑健性の評価にはあまり関係がないことがわかった．非重複経路数の数え上げによって得られるネットワーク評価指標には，グラフ理論の観点よりH値の活用が可能であるといえる．また，ここでは，リンクの重みを交通容量とした場合とそうでない場合では，大きな違いはみられなかった．

b) ネットワーク容量

ネットワーク容量を決定づける要因は，ある特定の断面においてリンク交通量がリンク容量に達し，それ以上代替経路を見つけ出すことができないためであると考えられる．そのため，ネットワーク容量は，リンク容量が

表-1 分析対象ネットワークの概要 [15)]

ネットワーク名	概要 （人口単位：1,000人）
Berlin	国名：ドイツ，人口：3,422 Links：28376，Nodes：12981
Birmingham	国名：イギリス，人口：1,526 Links：33867，Nodes：14578
Chicago	国名：アメリカ合衆国，人口：2.715 Links：39018，Nodes：12982
GoldCoast	国名：オーストラリア，人口：0,498 Links：11140，Nodes：4779
Philadelphia	国名：アメリカ合衆国，人口：1.548 Links：40003，Nodes：13389
Sydney	国名：オーストラリア，人口：4.373 Links：75379，Nodes：33113
Friedrichshain	国名：ドイツ，ベルリン Links：752，Nodes：224
Mitte	国名：ドイツ，ベルリン Links：1288，Nodes：397
Prenzlauerberg	国名：ドイツ，ベルリン Links：1106，Nodes：350
Tiergarten	国名：ドイツ，ベルリン Links：1190，Nodes：359

表-2 第二最小固有値の相関

相関係数	λ_{2a} (w:1)	λ_{2b} (w:capacity)
ν_{2a} (w:1)	0.999	
ν_{2b} (w:capacity)		0.153

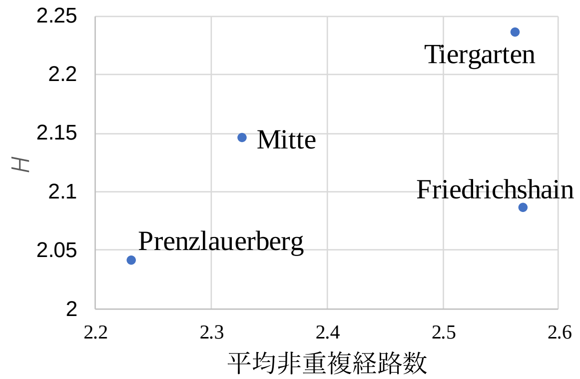


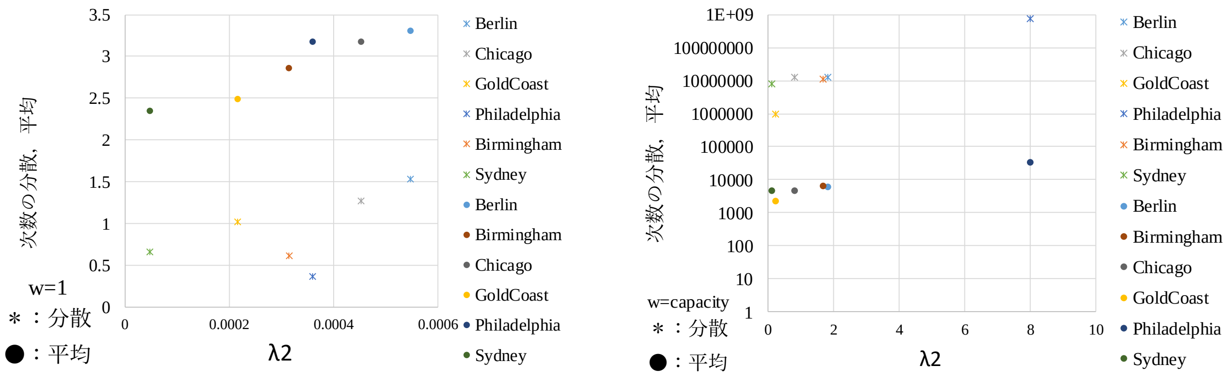
図-1 平均非重複経路数とNetwork Entropy

表-3 代数的連結度と交通工学的指標との関係

相関係数	平均非重複経路数	H	ネットワーク容量
ν_{2a} (w:1)	0.178	-0.667	-0.366
λ_{2a} (w:1)	0.217	-0.620	-0.419
ν_{2b} (w:capacity)	0.413	-0.489	-0.303
λ_{2b} (w:capacity)	0.150	-0.720	-0.229

表-4　代数的連結度と Network Science 指標の関係

相関係数	次数分散（w:1）	次数平均（w:1）	次数分散（w:capacity）	次数平均（w:capacity）	scaling factor ε	capacity scaling factor ε
ν_{2a} (w:1)	0.485	0.866				0.185
λ_{2a} (w:1)	0.579	0.948				0.139
ν_{2b} (w:capacity)			-0.267	-0.369	-0.471	
λ_{2b} (w:capacity)			0.973	0.987	-0.640	



(a)　重みなし

(b)　重みあり（交通容量）

図-2　次数平均，分散とλ_2の関係

比較的小さい断面を求めれば類似した結果を得ることができると期待できる．また，先行研究では，ネットワーク容量とネットワーク容量を重みに設定したλ_{2b}に比較的高い関係性を有していた．一方で，ネットワーク容量と$\nu_{2a},\lambda_{2a},\nu_{2b},\lambda_{2b}$の相関係数を**表-3**に示したが，すべて負の相関がみられ，なおかつ相関係数は高くなく，この結果は仮想ネットワークのそれと大きく異なる．仮想ネットワークにおいては代数的連結度と比較的高い正の相関を呈していた．

以上のように，倉内[4]による仮想ネットワークでの分析に引き続き，限定された4ケースであるものの実際のネットワークを用いて交通工学的指標とNetwork Science指標の関係性を確認した．その結果，平均非重複経路数とNetwork Entropyの関係性は確認できたものの，Network Capacityとラプラシアン行列の第2最小固有値との関係は一致しない結果となっており，この点についてさらなる検証が必要である．

(3)　Network Science 指標間の相関性

次に，より大規模な 6 つのネットワークを対象として，Network Science 指標間の関係性を考察する．

a)　次数平均と次数分散

まず，次数平均，次数分散と$\nu_{2a},\lambda_{2a},\nu_{2b},\lambda_{2b}$との相関を考察する．計算結果を**表-4** に示す．リンクの重みに交通容量を持つノードの次数は，接続するリンクの交通容量の総和である．**表-4** より，リンクの重みの設定に関わらず，λ_2と次数平均，次数分散との関係が大きいことがわかる．それぞれの都市の値を重みありなしでプロットした散布図を**図-2(a), (b)**に示す．どちらもλ_2の値が大きい都市は次数平均，次数分散が大きくなっており，特に Philadelphia では，リンクの重みに交通容量を与えたときの次数平均，次数分散が著しく大きいことに対し，λ_{2b}も大きな値をとっている．6 つのネットワークはそれぞれネットワーク規模等が異なるものの，同じ傾向を示していることから，次数の値とλ_2に強い関係があることは明らかである．なお，ν_2とλ_2における次数平均，次数分散との関係には大きな違いがみられた．これは，ラプラシアン行列$\mathbf{L}_G$＝次数行列$\mathbf{D}_G$－隣接行列$\mathbf{A}_G$であるため，ラプラシアン行列の対角要素を 1 に正規化した正規化ラプラシアン行列では，次数（リンクの重み）の影響が小さくなることが理由であると考える．ラプラシアン行列においては，次数の影響がそのまま値として表現されるが，正規化ラプラシアン行列では，対角要素に対する比率として換算される．そのため，リンクの重みに交通容量を与えたときのように，次数の分散が高くなる場合においては，影響が小さくなる作用が大きく，重みを考慮しない場合と比較して，ν_2とλ_2における分散の値との相関に顕著な差が生じている．

b)　Scaling parameter

各都市の次数分布の両対数グラフを**図-3** に示す．これらを線形近似することによりεを求める．例として，**図-4** にリンクの重みを交通容量としたときの Philadelphia における次数分布の近似を示す．$\varepsilon = 2.38$であり，$2 < \varepsilon < 3$の範囲内であるため，スケールフリー性をもつといえる．また，リンクの重みを考慮しないときには Chicago, Gold Coast の 2 つの都市，重みを交通容量とした

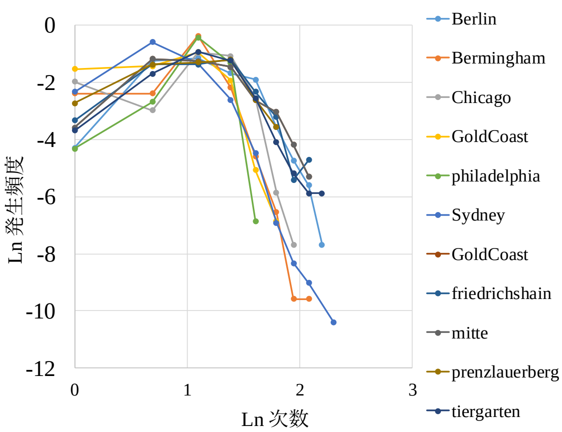


図-3　次数分布（10都市）

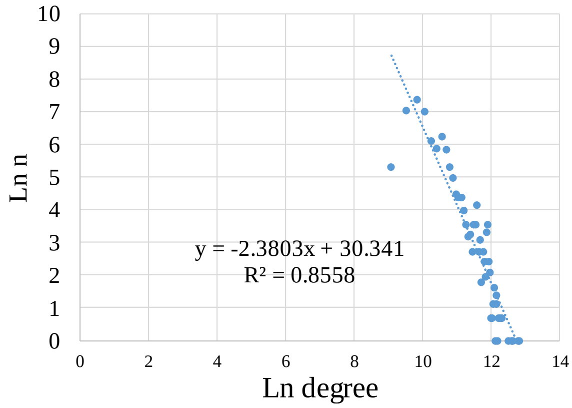


図-4　Scaling Parameter推定結果（Philadelphia）

際には，Birmingham, Gold Coast, Philadelphia, Sydneyの4つの都市がスケールフリーネットワークとみなせた．さらに，**表-4** より，リンクの重みを考慮しないときには，ν_{2a},λ_{2a}と Scaling factor ε との間に負の相関があることわかる．ε値は小さいほど不均一性が高く，大きいほど均一性が高いといえる．そのため，ν_{2a},λ_{2a}が小さく，より少ないリンク本数でネットワークを均等に分割されやすいという評価と，ε値が大きく均一性が高いという評価に関係が強いといえる．反対に，ε値が小さい時は不均一であるためネットワーク頑健性は高く，無作為な事象に強い．そのため，ν_{2a},λ_{2a}の指標によって得られる分割されにくい形状をもつネットワークは，接続性が不均一であり頑健性が高いといえる．

5.　Spectral Partitioning法を用いたNetwork分割

本章では，4.で示した6都市の大規模ネットワークを使用し，Spectral Partitioning法を用いたネットワーク分割をおこなう．切断面となる境界$\partial(\mathbf{S})$がどこに与えられるか，という点について，von Luxburg[16]は，ν_2に対応する固有ベクトル$\boldsymbol{\varphi}_2$の各要素の符号によって分割することを示しており，本研究においても同様のアプローチを採用する．

以上より，Spectral Partitioning 法の手順は以下のように要約できる．

1. 分析目的に応じた重みを各リンクに設定する．
2. 正規化ラプラシアン行列を作成する．
3. 正規化ラプラシアン行列の第2最小固有値を求める．もし第2最小固有値が0である場合には，0でない最小の固有値を求める．
4. 3.で得られた固有値に対応する固有ベクトルの要素についての符号からノードを分類し，異なるセットに属するノードを接続するリンクを境界リンクセットとする．

得られた境界リンクセットは，たとえば，すべてのリンクの重みを1とした場合には，「境界リンクの数が最小になりつつネットワークを各サブセットの次数の和がほぼ2等分される断面」を得ることになるため，ネットワークの密度を次数の和が表しているとすると，それをほぼ等分しつつより少ないリンク数でネットワークを分断する境界を示す．したがって，境界に位置するリンクをネットワークの分断を防ぐためには重要なリンク，ととらえることができる．

(1)　切断面（カットセット）の特徴

今回はすべてのリンクの重みを 1 とした場合と，リンクの交通容量を重みとして設定した場合による切断面の変化について，6 都市を対象に検証する．それぞれの都市のネットワーク規模などは**表-1** に示した通りである．すべてのリンクの重みを1とした場合に得られるカットセットは，より少ないリンク本数でネットワーク密度を分割する．そのため，ネットワークの形状に由来する脆弱なリンクということができ，その都市において重要度の高いリンクである．交通容量をリンクの重みに用いたときに得られるカットセットは，切断面のリンク容量の総和が小さく，サブセット$\mathbf{S}$と残りのネットワーク$\mathbf{S}-\mathbf{V}$内のノードの次数の和を均等にするため，重要かつボトルネックになりやすい脆弱性の高いリンクを抽出する．このときの各ノードの次数の値は，重み（リンク容量）を考慮しているため，次数が高いノードほど接続しているリンクの総容量が多く，車両の移動という観点からも重要な役割を担っているといえる．そのため，ネットワーク形状のみならず道路機能として重要な役割を担う部分をリンク容量の少ないリンクをカットセットとして抽出する．

各ネットワークの重みによるカットセットの違いを**図-5** に示す．Chicago，Gold Coast では，南北方向の海岸線に垂直にカットセットが得られ，重みによるカットの違いは非常に小さい．Sydney では，Chicago，Cold Coast と同様に海岸沿いの都市ではあるが，重みによってカットセットの傾向は異なっている．これは，海岸形状が湾状になって

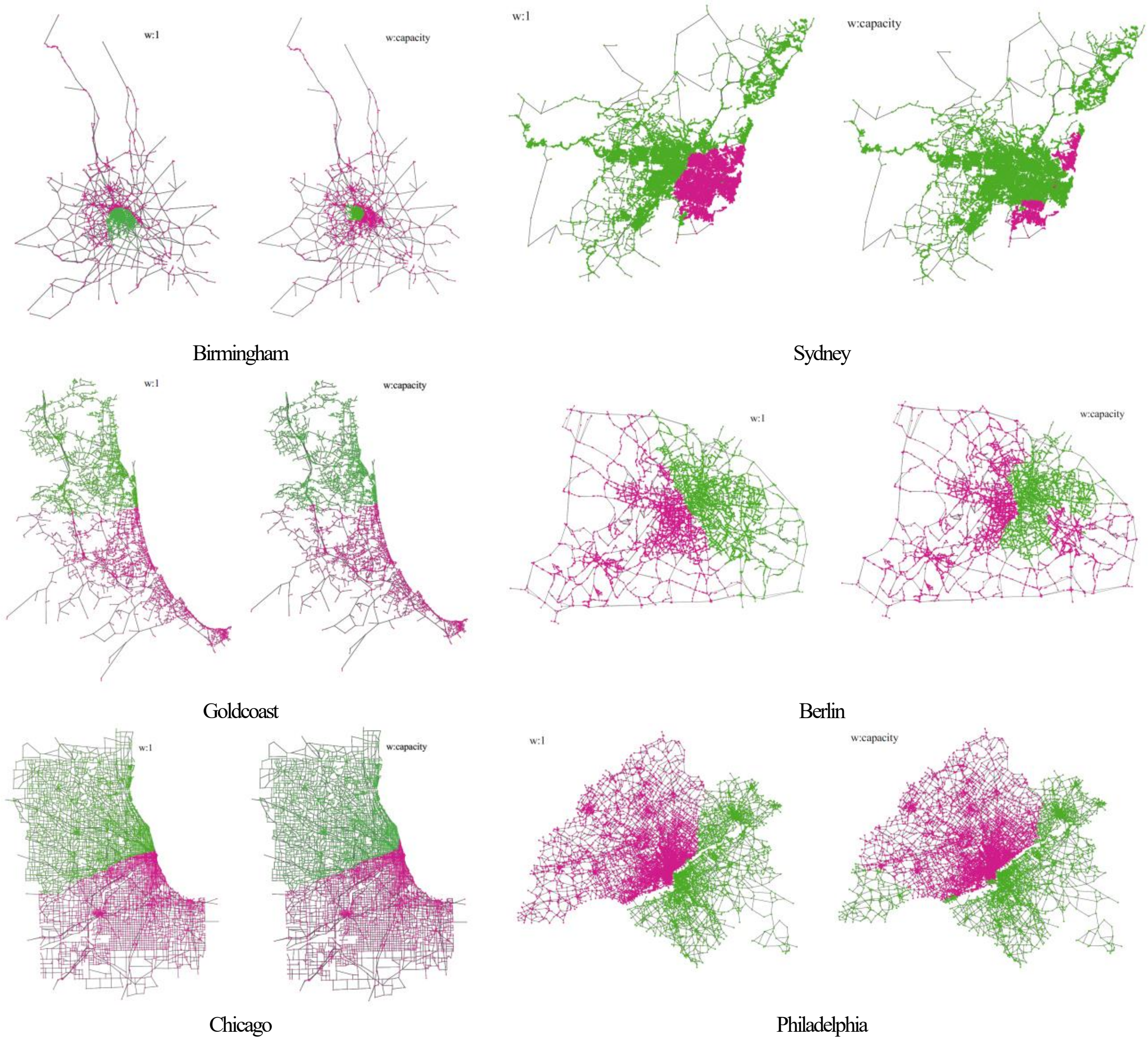


図-5　Spectral Partitioning の結果

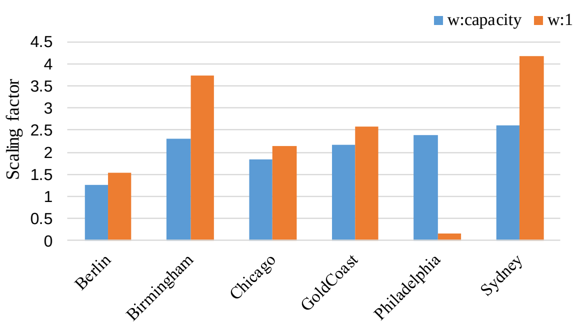


図-6　Scaling factor

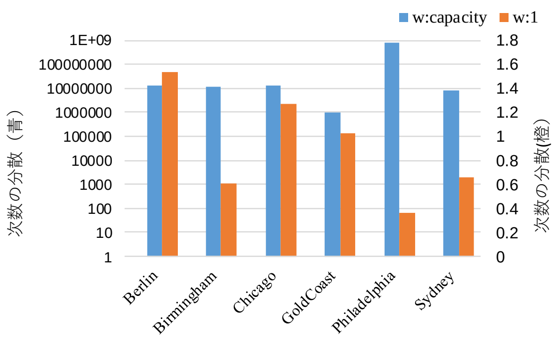


図-7　次数の分散

おり，Chicago，Gold Coast では海岸に沿うようにネットワークの密度高い部分が存在するのに対し，Sydney は湾の内部の密度の高い部分が集中しているためだと考えられる．Philadelphia は，都市の中心に大きな河川があるため，河川付近が重要度の高いリンクとしてあられている．Berlin, Birmingham は都市の中心部にネットワークの高密度な部分が集中し，同心円状に広がっている．そのため重みを 1 とし，形状依存の大きいカットセットと，リンク容量を重みとしたときのカットセットには大きな違いが生じた．その理由として，形状依存ではカットセットに含まれるリンクの本数をできるだけ小さくしたいが，リンク容量を重みとしたときは，大きな容量を持つリンクをカットセットに含むことは避けたい．したがって，リンク容量を重みに設定した場合，都市の中心を分断するという結

果は生じにくいのではないかと考える．中心部のリンクをカットセットに含むことなく，ノードの次数をより均等に配分するため，ネットワークの中心部の外側を囲うようにカットセットがあらわれている．

このような特徴の違いとその他の Network Science 指標との関連性を検証する．**図-6** は重みを 1 としたときと重みに交通容量を与えたときの Scaling factor の値を示す．Birmingham，Philadelphia，Sydney は重みの有無による Scaing factor の差が大きい．重みによって Scaing factor に違いが生じるネットワークはカットセットの傾向に違いが生じると考えられる．ただし，Berlin では Scaing factor の差は小さいにもかかわらずカットセットの傾向は重みの有無で異なるため，今後さらなる検討が必要と考えられる．

参考までに，各都市における重みによる次数の分散を **図-7** に示す．やはり，重みによるカットセットの傾向の違いと一致するような特徴はみられない．カットセットの境界$\partial(\mathbf{S})$を求める際には，サブセット$\mathbf{S}$と残りのネットワーク$\mathbf{S}-\mathbf{V}$内のノードの次数の和をできるだけ均等にするため，次数の値は大きな影響を持つと考えられる．しかしながら，次数の分散が示すばらつきはカットセットの傾向と大きな関係はみられなかった．これより，正規化ラプラシアン行列の第二最小固有値を用いた Spectral Partitioning 法は，次数などのネットワーク密度を示す指標のみでは示すことができない，ネットワーク形状と密度の関係性を併せて考慮した重要度の高いリンクを抽出していると考えられる．

(2) リンクの交通容量分布との関係

6 都市の中から，重みによるカットセットの傾向の差が最も顕著にあらわれた Berlin について，ネットワークの特徴とともに，差が生じた理由に関して考察する．Berlin ネットワークの交通容量の分布を **図-8** に示す．中心部から放射状に交通容量の大きな幹線道路が広がっていることがよくわかる．この特徴とカットセットの出方を比較すると，重み 1 のときのカットセットには交通容量の大きなリンクが多く含まれている．サブセット$\mathbf{S}$と残りのネットワーク$\mathbf{S}-\mathbf{V}$内のノードの次数和を最小にすることが考慮され，ネットワークを東西に分割するという結果が得られた．一方で，交通容量を重みとする場合には，このカットセットでは抽出されるリンクの重みの総和が非常に大きくなる．そのため，交通容量の大きな幹線道路を横切りつつ，ネットワークを分割するという結果が得られたと考えられる．このように，道路ネットワークのそれぞれのリンクの特徴を捉えたカットセットが得られており，求めたい指標に応じて重みを変更することで，その観点からみる重要なリンクを知ることができる．

重みによるカットセットの傾向に大きな変化がなかった Chicago の交通容量分布は **図-9** のようになっている．特定のリンクのみ非常に大きな容量を持つという性質はみ

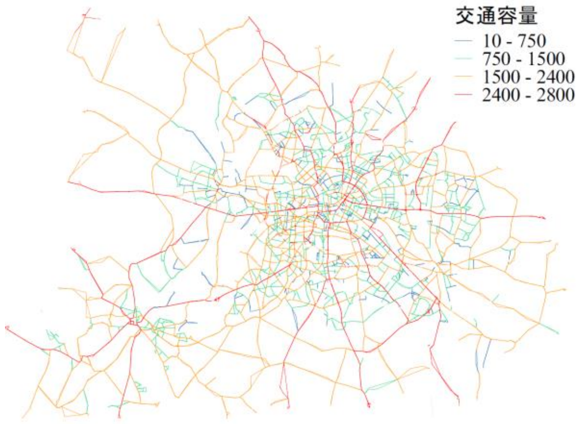


図-8 リンク 交通容量分布（Berlin）

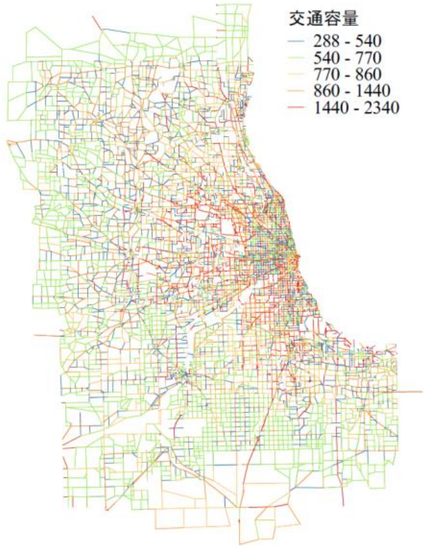


図-9 リンク 交通容量分布（Chicago）

られず，海岸沿いのネットワークが密な部分において，格子状に交通容量が大きなリンクが目立つ．このような特徴を持つネットワークでは，形状依存によるカットセットと交通容量を加味した際の重要リンクの位置づけに大きな違いはない．

6. おわりに

本研究では，倉内[4]，明光ら[5]による先行研究によって得られたNetwork Scienceにて用いられる指標であるNetwork Entropyや代数的連結度と交通工学的な接続性の指標である非重複経路およびネットワーク容量との関係性を実際のネットワークにおいても適応可能であるかを検証するため，利用可能な多様なネットワークにおいて同様の計算を実施した．その結果，非重複経路数に関しては，Network Entropyとの関係が強く，実ネットワークにおいても非重複経路による評価指標と類似しており，

Network Entropyの活用が可能であることを明らかにした．ネットワーク容量に関しては，仮想ネットワークにおける結果とは異なり，代数的連結度と負の弱い相関を持つという結果であった．さらに，Network Science指標間の相関性の検証として，代数的連結度と次数の値による特徴，Scaling parameterとの関係を明らかにした．特定の代数的連結度と次数による評価指標には強い相関があることがわかり，Scaling parameterの大きさと代数的連結度の関連に基づく新たな解釈を示した．Spectral Partitioning法を用いたネットワーク分割では，実際のネットワークに適用した結果から，分割の際の重み指標によって得られる結果の変化について，ネットワークの特徴を踏まえながら考察をおこなった．本研究により，実際の道路ネットワークにおいてNetwork Science指標を適用した場合，その指標自体にはどのような特性がみられるか，また，現存の交通工学的なネットワーク接続性の評価指標との関連について示すことができた．

今後の課題として，以下の点が挙げられる．1つ目に，Network Scienceによる指標，交通工学的な指標どちらにおいてもひとつひとつの相互関係を検証するにとどまっており，複合的な関係を明らかにすることが求められる．2つ目に，今回対象としたネットワークは10個であったが，より多様な特徴をもつネットワークにおいて試算する必要がある．特に，交通工学的な評価指標と代数的連結度，Network Entropyとの関係を検証した小規模な地区ネットワークはサンプル数の観点からしても不十分であったといえる．今後は，ネットワーク規模や密度などに関して，多様なネットワークを複数用いて，安定的にNetwork Scienceによる指標間の関係や，交通工学的な評価指標との関係をみていく必要がある．

参考文献

1) 若林拓史，阪神淡路大震災における道路網連結信頼性と確率重要度による重要区間の評価，土木計画学研究・論文集，No. 13，pp.391-400, 1996.
2) Kurauchi, F., Sumalee, A., Tamura, H. and Uno, N., Bilevel programming problem for analysing capacity vulnerability in a transportation network under limited damage, Proceedings of the Third International Symposium on Transportation Network Reliability, 2007
3) Kurauchi, F., Uno, N., Sumalee, A. and Seto, Y., Network evaluation based on connectivity vulnerability, Transportation and Traffic Theory 2009: Golden Jubilee, pp.637-649, 2009.
4) 倉内文孝，Network Science を援用した交通ネットワーク信頼性分析の可能性，土木計画学研究・講演集，55, CD-ROM，2017
5) 明光就平，倉内文孝，安藤宏恵，Spectral Partitioning を用いた道路ネットワークの接続性評価，土木計画学研究・講演集，55, CD-ROM，2017
6) Spielman, D.A., Spectral Graph Theory, Lecture Note, ac-cessed on 22nd, Apr, 17, http://www.cs.yale.edu/homes/ spielman/561/（2017/4/26 アクセス）
7) Demetrius, L., and Manke, T., Robustness and network evolution – an entropic principle, Physica A, 346, 682-696, 2005.
8) Godsil, C.D. and Royle, G., Algebraic Graph Theory. Springer New York, 2001, vol. 207.
9) Bandeira, A S, Spectral Clustering and Cheeger's Inequality, http://cims.nyu.edu/~bandeira（2017/4/26 アクセス）
10) Barabási, A.-L., and Albert, R., Emergence of scaling in random networks, Science 286, pp. 509-512, 1999
11) Buchanan, M., Nexus, Small Worlds and Groundbreaking Science of Networks, 1st ed, W.W.Norton, New York,2002.
12) Kurauchi, F., Uno, N., Sumalee, A. and Seto, Y., Network evaluation based on connectivity vulnerability, Transportation and Traffic Theory 2009: Golden Jubilee, pp.637-649, 2009.
13) Bell M G H and Iida, Y., Transportation Network Analysis, Pergamon, 1997.
14) Bar-Gera, H., Transportation Network Test Problems, https://github.com/bstabler/TransportationNetworks（2017/7/31 アクセス）
15) 総務省統計局，世界の統計 2016
16) von Luxburg, U, A tutorial on Spectral Clustering, https://arxiv.org/abs/0711.0189, 2007.

（2017.7.31 受付）

APPLICABILITY OF NETWORK SCIENCE MEASURES FOR TRANSPORT NETWORK RELIABILITY ANALYSIS

Hiroe ANDO, Fumitaka KURAUCHI and Shuhei MYOKO