

企業と家計の相互作用を考慮した 都心形成モデルの安定性解析

中村 孝一¹・高山 雄貴²

¹学生会員 金沢大学 大学院自然科学研究科 (〒 920-1192 石川県金沢市角間町)

E-mail: nkou@stu.kanazawa-u.ac.jp

²正会員 金沢大学 理工研究域 (〒 920-1192 石川県金沢市角間町)

E-mail: ytakayama@se.kanazawa-u.ac.jp

Fujita and Ogawa (1982) は、住宅立地と企業立地が相互に関連していることに着目したモデルを構築し、複数の都心が存在する立地パターンが均衡状態となることを示している。しかし、このモデルには複数の均衡状態が存在するにもかかわらず、その安定性は、解析が困難であることから、確認されていない。そこで、本研究では、Fujita and Ogawa (1982) に基づく都心形成モデルを構築し、このモデルにポテンシャル関数が存在することを利用して、安定均衡状態の性質を明らかにする。そして、その結果から、複数の都心が存在する立地パターンが安定均衡状態となることを示す。

Key Words : *polycentric urban configurations, local stability, potential function*

1. はじめに

多くの大都市には、都心が複数箇所存在する。実際、東京には、副都心(新宿、池袋、渋谷、上野・浅草、錦糸町・亀戸、大崎)や新都心(さいたま、幕張、横浜みなとみらい 21) と呼ばれる地区が数多くある。そのため、複数箇所の都心形成は一般的な現象であると捉えられている。しかし、その形成メカニズムは未だ十分には明らかにされていない。

都心形成メカニズムに関する研究は、Fujita and Thisse¹⁾ でまとめられているように、Beckmann²⁾ 以降、長年にわたり蓄積されている。その結果、立地主体が単一種類(家計または企業)のモデル¹ については、Akamatsu et al.⁵⁾、高山・赤松⁶⁾ により、複数都心の創発メカニズムが示されるまでになっている。

その一方で、立地主体が複数種類(e.g., 企業と家計)存在するモデル² については、その特性は十分には明らかにされていない。実際、Fujita and Ogawa⁹⁾ モデルには複数の均衡状態が存在するにもかかわらず、その安定性は確認されていない。それゆえ、このモデルでは、複数の都心が形成される立地パターンが均衡状態となることが示されているものの、その均衡状態が実際に創発する(i.e., 安定的となる)か否かは不明なままとなっている³。この課題に対し、Osawa¹¹⁾ は、

Fujita and Ogawa⁹⁾ モデルにポテンシャル関数が存在することを利用して、均衡状態の確率的安定性を分析するための手法を提案している。しかし、連続的な立地空間でのモデル挙動を分析する手法であることから、安定性解析の対象は特定の(規則的な)立地パターンのみに留まっている。

そこで、本研究では、Fujita and Ogawa⁹⁾ に基づく、企業と家計の立地選択に関する相互作用を考慮した都心形成モデルを構築する。そして、離散的な立地空間の下で、構築したモデルの(局所的)安定均衡状態の特性を明らかにする。そのために、本モデルにポテンシャル関数が存在することを利用して、安定均衡状態として創発する企業と家計の立地パターンの特性を調べる。さらに、その結果から、複数都心が安定的な均衡状態として創発することを示す。

本稿の構成は以下の通りである。まず、2章ではFujita and Ogawa⁹⁾ に基づくモデルを構築し、均衡条件を定式化する。さらに、ポテンシャル関数が存在することを示した上で、安定性解析を行う準備をする。3章では、2地点モデルで創発する家計・企業の立地パターンを示し、その安定性を確認する。4章では、3地点モデルで創発する家計・企業の立地パターンを示し、複数の都心が存在する立地パターンが安定均衡状態となりうることを明らかにする。5章では、4章で行った解析結果に基づき、本モデルの特性を整理する。最後に、6章で

¹ 例えば、Beckmann²⁾、O'Hara³⁾、Tabuchi⁴⁾。

² 例えば、Ogawa and Fujita⁷⁾、Imai⁸⁾、Fujita and Ogawa⁹⁾、Lucas and Rossi-Hansberg¹⁰⁾。

³ この均衡状態の安定性に関する課題は、Fujita and Ogawa⁹⁾

に限らず、複数種類の立地主体が存在するモデルを分析した既存研究に共通して存在する。

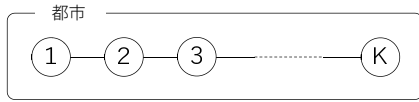


図-1 モデルの概要

結論を述べる。

2. モデル

本章では, Fujita and Ogawa⁹⁾ モデルに基づいた, 企業と家計の立地選択に関する相互作用を考慮したモデルを構築する. そして, 均衡条件を定式化したうえで, このモデルにポテンシャル関数が存在することを示す.

(1) 都市内の状況設定

本モデルでは, 離散的な K 箇所の立地点が線分上に並ぶ都市を考える (図-1). 各立地点の面積は 1, 隣接する立地点間の距離は d であると仮定する. この都市には, 立地主体である家計と企業に加え, それらに床面積を供給するデベロッパーが存在する. これらの行動主体間の関係の概略は, 図-2 示すとおりである.

a) 家計の行動

家計は, 都市全体に固定的に N 存在する. 立地点 $a \in \mathcal{I} \equiv \{1, 2, \dots, K\}$ に居住し, 立地点 $i \in \mathcal{I}$ に通勤する家計数を n_{ai} と表す. このとき, 立地点 a の総家計数 N_a は, 立地点 a に居住する家計数の合計で表される:

$$N_a = \sum_{i \in \mathcal{I}} n_{ai} \quad (1)$$

家計は合成財・床面積の消費量に応じた効用を得る. ただし, Fujita and Ogawa⁹⁾ と同様, 家計が消費する床面積は固定的に s^H であると仮定する. したがって, 立地点 $a \in \mathcal{I}$ に居住し, 立地点 $i \in \mathcal{I}$ の企業に務める家計の効用水準は, その合成財消費量 z_{ai} に応じて定まる. 合成財の価格を 1 に基準化すると, 家計の財消費に関する効用最大化行動は, 次のように表される:

$$\max_{z_{ai}} u(z_{ai}) \quad \text{s.t.} \quad w_i = z_{ai} + r_a s^H + t d_{ai} \quad (2)$$

ここで, w_i は勤務先 i で稼いだ所得, r_a は立地点 a の地代, t は単位距離あたりの通勤費用, $d_{ai} = |a - i|d$ は立地点 a から i の距離である.

本稿では, 効用関数 $u(\cdot)$ は合成財消費量 z_{ai} の単調増加関数であると仮定する. そのため, 家計の効用最大化行動は, 合成財消費量 z_{ai} の最大化行動と一致する. なお, この合成財消費量 z_{ai} は, 予算制約より以下で与えられる:

$$z_{ai} = w_i - r_a s^H - t d_{ai} \quad (3)$$

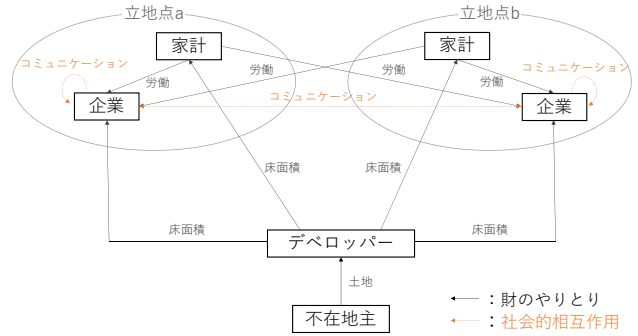


図-2 家計・企業・デベロッパーの関係

b) 企業の行動

本稿では, 1 単位の家計が 1 企業で働くように企業数の単位を基準化する. このとき, 立地点 i の企業数 M_i は, 立地点 i に通勤する家計数と一致する:

$$M_i = \sum_{a \in \mathcal{I}} n_{ai} \quad (4)$$

企業は, 参入や撤退が自由であり, 完全競争下で財を生産する. 財の生産には, s^F 単位の床面積と 1 単位の労働を投入する必要がある. その生産額は都市内の他企業とのコミュニケーション水準に応じて定まると仮定する. このとき, 立地点 i の企業の利潤 π_i は次のように与えられる:

$$\pi_i = F_i(\mathbf{M}) - r_i s^F - w_i \quad (5)$$

立地点 i の企業の生産額 $F_i(\mathbf{M})$ は, 以下に示すように, 多くの企業が近接して立地し, コミュニケーションが容易になるほど高くなる:

$$F_i(\mathbf{M}) = \alpha \sum_{j \in \mathcal{I}} \phi^{|i-j|} M_j \quad (6)$$

ここで, $\mathbf{M} = [M_1, \dots, M_K]^T$, T は転置を表す. また, $\alpha (> 0)$ はパラメータ, $\phi \in (0, 1)$ は隣接する立地点間での企業間コミュニケーションの自由度である. ϕ が高くなることは, 異なる立地点間の企業同士のコミュニケーションが容易になることを意味する.

このとき, 企業の利潤ゼロ条件より, 立地点 i の企業の賃金 w_i は次のように表される:

$$w_i = F_i(\mathbf{M}) - r_i s^F \quad (7)$$

c) デベロッパーの行動

デベロッパーは, 各立地点で不在地主から借りた単位面積の土地を開発し, 完全競争のもとで床面積を家計と企業に供給する. 土地の単位面積あたりの開発費用は, Tabuchi⁴⁾ と同様, 立地点 i で供給する床面積 y_i の関数 $\beta(y_i)^2$ で表されると仮定する. ここで, $\beta (> 0)$ はパラメータである. 以上の仮定のもとで, デベロッパーは利潤 π_i^d を最大化する立地点 i の床面積の供給量

y_i を選択する:

$$\max_{y_i} \pi_i^d = r_i y_i - \beta (y_i)^2 - R_i \quad (8)$$

ここで、 R_i はデベロッパが不在地主に支払う立地点 i の単位面積あたりの土地に対する地代である。利潤最大化問題の 1 階条件、利潤ゼロ条件より、 r_i, R_i は、各々、以下で与えられる:

$$r_i = 2\beta y_i \quad R_i = \beta y_i^2 \quad (9)$$

立地点 i の床面積需要量は $s^H N_i + s^F M_i$ であることから、需給均衡条件 (i.e., $y_i = s^H N_i + s^F M_i$) より r_i が得られる:

$$r_i = 2\beta (s^H N_i + s^F M_i) \quad (10)$$

(2) 立地均衡条件

家計は合成財消費量 z_{ai} (効用 $u(z_{ai})$) が最大となる居住地 a 、勤務地 i を選択する。この合成財消費量は、(7), (10) を (3) に代入することにより、家計の居住地・勤務地分布 $\mathbf{n} = [n_{11}, n_{12}, \dots, n_{K, K-1}, n_{KK}]^\top$ (i.e., 家計と企業の立地パターン) の関数で表すことができる:

$$z_{ai}(\mathbf{n}) = \alpha \sum_{j \in \mathcal{I}} \phi^{|i-j|} M_j - 2\beta s^F (s^H N_i + s^F M_i) - 2\beta s^H (s^H N_a + s^F M_a) - t d_{ai} \quad (11)$$

以上の設定の下で、立地均衡条件を示そう。家計の居住地・勤務地分布が均衡状態 \mathbf{n}^* であるならば、どの家計も居住地・勤務地を変更するインセンティブを持たない。したがって、家計が選択する居住地・勤務地での合成財消費量 $z_{ai}(\mathbf{n}^*)$ は均衡時の水準 z^* と等しく、家計が選択しない居住地・勤務地の合成財消費量は z^* 以下となる:

$$\begin{cases} z^* = z_{ai}(\mathbf{n}^*) & \text{if } n_{ai}^* > 0 \\ z^* \geq z_{ai}(\mathbf{n}^*) & \text{if } n_{ai}^* = 0 \end{cases} \quad (12a)$$

また、本稿では総家計人数は固定的に N であると仮定しているため、家計人数の保存則が次のとおり与えられる:

$$\sum_{a \in \mathcal{I}} \sum_{i \in \mathcal{I}} n_{ai}^* = N \quad (12b)$$

(3) 均衡状態の一意性と安定性

a) ポテンシャル関数

本研究では、企業間のコミュニケーション外部性を考慮していることから、立地均衡条件 (12) を満足する均衡状態が複数存在しうる。そこで、ここでは均衡状態の一意性・安定性を調べる準備として、構築したモデルにポテンシャル関数が存在することを示そう。

関数 $P(\mathbf{n})$ が (12b) と非負条件 ($n_{ai} \geq 0 \forall a, i \in \mathcal{I}$) を満たす任意の \mathbf{n} に対して次の条件を満たせば、その

関数はポテンシャル関数である:

$$\frac{\partial P(\mathbf{n})}{\partial n_{ai}} = z_{ai}(\mathbf{n}) \quad (13)$$

本稿で構築したモデルには、この条件を満足する関数 $P(\mathbf{n})$ が存在する:

$$P(\mathbf{n}) = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{I}} F_i(\mathbf{M}) M_i}_{\text{総生産額}} - t \underbrace{\sum_{a \in \mathcal{I}} \sum_{i \in \mathcal{I}} d_{ai} n_{ai}}_{\text{総通勤費用}} - \underbrace{\beta s^H \sum_{a \in \mathcal{I}} (s^H N_a + s^F M_a) N_a}_{\text{家計が負担する総地代}} - \underbrace{\beta s^F \sum_{i \in \mathcal{I}} (s^H N_i + s^F M_i) M_i}_{\text{企業が負担する総地代}} \quad (14)$$

したがって、本モデルのポテンシャル関数は上の $P(\mathbf{n})$ で与えられる。

b) 合成財消費量、ポテンシャル関数の行列表記

次に、モデルの数理構造を明確にするために、合成財消費量とポテンシャル関数を行列形式で表現しておく。合成財消費量 $\mathbf{z}(\mathbf{n}) = [z_{11}, z_{12}, \dots, z_{K, K-1}, z_{KK}]^\top$ は、行列表記すると、次のように表すことができる:

$$\mathbf{z}(\mathbf{n}) = \alpha (\mathbf{E} \otimes \mathbf{D}) \mathbf{n} + 2s^F \beta (s^H \mathbf{A}^{\text{HF}} + s^F \mathbf{A}^{\text{FF}}) \mathbf{n} + 2s^H \beta (s^H \mathbf{A}^{\text{HH}} + s^F \mathbf{A}^{\text{FH}}) \mathbf{n} - t \mathbf{d} \quad (15)$$

ここで、 \otimes はクロネッカー積、 \mathbf{E} はすべての要素が 1 の $K \times K$ 行列、 \mathbf{d} は $K(a-1) + i$ 要素が d_{ai} の $KK \times 1$ ベクトルである。また、 \mathbf{D} は i, j 要素が $\phi^{|i-j|}$ の $K \times K$ 行列、 $\mathbf{A}^{\text{HF}}, \mathbf{A}^{\text{FF}}, \mathbf{A}^{\text{HH}}, \mathbf{A}^{\text{FH}}$ は次を満たすような行列である:

$$\mathbf{A}^{\text{HF}} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} N \\ N \\ \vdots \\ N \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{\text{FF}} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} M \\ M \\ \vdots \\ M \end{bmatrix} \quad (16a)$$

$$\mathbf{A}^{\text{HH}} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} N_1 \mathbf{1} \\ N_2 \mathbf{1} \\ \vdots \\ N_K \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{\text{FH}} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} M_1 \mathbf{1} \\ M_2 \mathbf{1} \\ \vdots \\ M_K \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (16b)$$

より具体的には、 $\mathbf{A}^{\text{HF}}, \mathbf{A}^{\text{FF}}, \mathbf{A}^{\text{HH}}, \mathbf{A}^{\text{FH}}$ は、 $K(a-1) + i, K(b-1) + j$ 要素 ($a, b, i, j \in \mathcal{I}$) が以下で与えられる $KK \times KK$ 行列である:

$$\mathbf{A}^{\text{HF}} = [a_{K(a-1)+i, K(b-1)+j}^{\text{HF}}] = [\delta_{i,b}] \quad (17a)$$

$$\mathbf{A}^{\text{FF}} = [a_{K(a-1)+i, K(b-1)+j}^{\text{FF}}] = [\delta_{a,b}] = \mathbf{I} \otimes \mathbf{E} \quad (17b)$$

$$\mathbf{A}^{\text{HH}} = [a_{K(a-1)+i, K(b-1)+j}^{\text{HH}}] = [\delta_{i,j}] = \mathbf{E} \otimes \mathbf{I} \quad (17c)$$

$$\mathbf{A}^{\text{FH}} = [a_{K(a-1)+i, K(b-1)+j}^{\text{FH}}] = [\delta_{a,j}] \quad (17d)$$

ここで、 \mathbf{I} は $K \times K$ の単位行列であり、 $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタである：

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (18)$$

ポテンシャル関数は、行列表記すると次のように表すことができる：

$$P(\mathbf{n}) = \mathbf{n}^\top \left(\frac{\alpha}{2} \mathbf{E} \otimes \mathbf{D} - \beta \mathbf{A} \right) \mathbf{n} - t \mathbf{d}^\top \mathbf{n} \quad (19a)$$

$$\mathbf{A} = s^H s^H \mathbf{A}^{HH} + s^H s^F (\mathbf{A}^{HF} + \mathbf{A}^{FH}) + s^F s^F \mathbf{A}^{FF} \quad (19b)$$

以上より、本モデルの合成財消費量 $\mathbf{z}(\mathbf{n})$ は \mathbf{n} の一次関数、ポテンシャル関数 $P(\mathbf{n})$ は \mathbf{n} の二次関数であることが確認できる。

c) 均衡状態の一意性と安定性

Sandholm¹²⁾ に示されているように、本モデルにはポテンシャル関数が存在することから、その均衡状態は次の最適化問題の Karush–Kuhn–Tucker (KKT) 条件を満たす \mathbf{n}^* の集合と一致する：

$$\max_{\mathbf{n}} P(\mathbf{n}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{1} = N, \quad \mathbf{n} \geq \mathbf{0} \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{0}$ はすべての要素が 0 の $K \times 1$ ベクトルである。この事実、上記の問題の KKT 条件が均衡条件 (12) と一致することからも容易に確認できる。

この性質を利用して、本モデルの均衡状態が必ずしも一意ではないことを確認しておこう。均衡状態が一意であることは、ポテンシャル関数が単峰であることと対応している。しかし、ポテンシャル関数のヘッセ行列 $\alpha \mathbf{E} \otimes \mathbf{D} - 2\beta \mathbf{A}$ は負定値とは限らず、さらに正定値にもなりうる。これはポテンシャル関数が必ずしも単峰とはならないことを意味していることから、均衡状態は必ずしも一意ではないことが分かる。

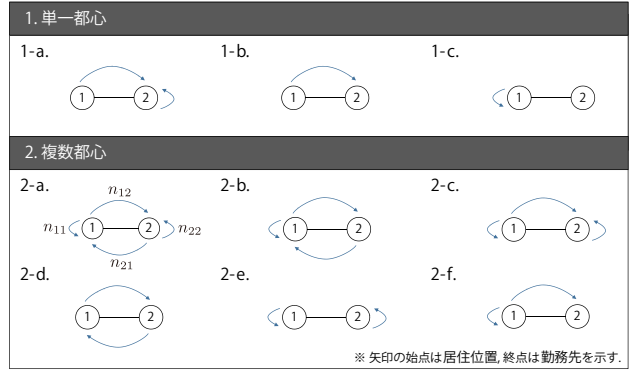
以上より、立地均衡状態 \mathbf{n}^* が複数存在しうるということが確認できた。そこで、均衡選択のために、Sandholm¹²⁾ の知見を利用して、均衡状態の局所的安定性を調べる方法を示しておこう。ポテンシャル関数が存在する場合、安定・不安定均衡状態は次の性質を有する：

ポテンシャル関数を局所的に最大化する均衡状態 \mathbf{n}^* は、幅広い調整ダイナミクス⁴⁾ の下で (局所的に) 安定であり、それ以外の均衡状態は不安定である。

以降の章では、この性質を利用して、安定均衡状態の性質を明らかにしておく。

⁴⁾ この調整ダイナミクスには、best response dynamic, Brown–von Neumann–Nash dynamic, projection dynamic など含まれる。その具体的な内容は、Sandholm¹³⁾ 参照。

表-1 2 地点モデルで存在しうる家計の居住地・勤務地分布



3. 2 地点モデルの解析

本章では、都市内に立地点が 2 つしか存在しない場合に限って解析を行う。ただし、モデル特性を明確に示すために、本章以降では、 $s^H = s^F = s$ と仮定する。このとき、合成財消費量 $\mathbf{z}(\mathbf{n})$ 、ポテンシャル関数 $P(\mathbf{n})$ を与える $\mathbf{E} \otimes \mathbf{D}$ 、 \mathbf{A} 、 \mathbf{d} は以下のとおりとなる：

$$\mathbf{E} \otimes \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & \phi & 1 & \phi \\ \phi & 1 & \phi & 1 \\ 1 & \phi & 1 & \phi \\ \phi & 1 & \phi & 1 \end{bmatrix} \quad (21a)$$

$$\mathbf{A} = s^2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (21b)$$

$$\mathbf{d} = [0, d, d, 0]^\top \quad (21c)$$

2 地点モデルで存在しうる家計の居住地・勤務地分布 (家計と企業の立地パターン) \mathbf{n} は、表-1 に示すとおり、9 パターンある。なお、表-1 では、2 つの立地点 1, 2 があり、その都市の中で家計はどこに居住地を置き、どこを勤務地とするかをパターン分けしている。本章では、この各々のパターンが安定均衡状態となるか否かを解析的に確認する。

(1) 均衡立地パターン

最初に表-1 で示す各立地パターンが均衡条件を満たすかどうかを確認する。均衡条件 (12) を利用した解析の結果 (詳細は付録 II 参照)、1-a, 1-c, 2-c, 2-e が均衡状態となることが明らかとなった。以下では、各立地パターンが均衡状態となる条件を、企業間コミュニケーションの自由度 ϕ 、単位距離あたりの通勤距離 t に注目した形で示す。

パターン 1-a ($n_{11} = n_{21} = 0$)

$$t \leq \frac{N}{2d} \{3(1 - \phi)\alpha - 16\beta s^2\} \quad (22)$$

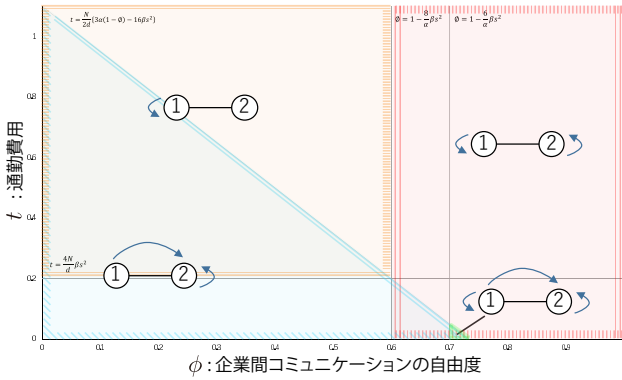


図-3 安定均衡状態の分布図 (2 地点モデル)

パターン 1-c ($n_{12} = n_{21} = n_{22} = 0$)

$$\phi \leq 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (23a)$$

$$t \geq \frac{4N}{d}\beta s^2 \quad (23b)$$

パターン 2-c ($n_{21} = 0$)

$$t < \frac{N}{2d}\{3(1-\phi)\alpha - 16\beta s^2\} \quad (24a)$$

$$\phi > 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (24b)$$

パターン 2-e ($n_{12} = n_{21} = 0$)

$$t \geq 0 \quad (25)$$

(2) 均衡立地パターンの安定性

2 地点モデルの均衡立地パターンは、前節より明らかとなった。そこで、次に均衡状態の安定性をポテンシャル関数を用いて解析する。ポテンシャル関数は (19) で与えられ、このポテンシャルを局所的に最大化する均衡立地パターンが安定均衡状態となる。

安定性解析の結果より、1-a, 1-c, 2-c, 2-e が安定均衡状態であることが明らかとなった。以下では、各立地パターンが安定均衡状態となる ϕ, t の範囲を示す。なお、証明は付録 II で示す：

パターン 1-a ($n_{11} = n_{21} = 0$)

$$t \leq \frac{N}{2d}\{3(1-\phi)\alpha - 16\beta s^2\} \quad (26)$$

パターン 1-c ($n_{12} = n_{21} = n_{22} = 0$)

$$\phi < 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (27a)$$

$$t > \frac{4N}{d}\beta s^2 \quad (27b)$$

パターン 2-c ($n_{21} = 0$)

$$t < \frac{N}{2d}\{3(1-\phi)\alpha - 16\beta s^2\} \quad (28a)$$

$$\phi > 1 - \min\left\{\frac{8}{\alpha}\beta s^2, \frac{6}{\alpha}\beta s^2\right\} \quad (28b)$$

パターン 2-e ($n_{12} = n_{21} = 0$)

$$\phi > 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (29)$$

表-2 分析対象とする家計の居住地・勤務地分布

1. 単一都心		
1-a.	1-b.	1-c.
2. 2都心		
2-a.	2-b.	2-c.
3. 3都心		
3-a.	3-b.	

2 地点モデルの解析により得られた、企業間コミュニケーションの自由度 ϕ と単位距離当たりの通勤費用 t の水準に応じた安定均衡状態を、図-3 に示す。図-3 の t 軸に着目すると、通勤費用が高いと企業が 1 か所に集中しており、安いと企業が分散していることがわかる。 ϕ 軸に着目すると、企業間コミュニケーションの自由度が高い (i.e., 企業同士のやりとりがしやすい) と企業は分散し、低い (i.e., 企業同士のやりとりがしにくい) と企業は 1 か所に集中していることも確認できる。

4. 3 地点モデルの解析

前章より、2 地点モデルで創発する均衡立地パターンの安定性が確認された。この章では、都市内の立地点を 3 つに増やし、2 地点モデルによる解析結果を踏まえて 3 地点モデルにおける均衡立地パターンの安定性を解析する。ただし、ここでは全ての均衡状態の特性を調べるのではなく、表-2 に示したパターンを解析対象とする。また、解析を容易に進めるため、本章では Fujita and Ogawa⁹⁾ と同様、企業・家計の立地パターンが左右対称となると仮定する⁵⁾。

(1) 均衡立地パターン

2 地点モデルの解析と同様に、表-2 で示す各立地パターンが均衡条件を満足するかどうかを確認する。付録 III に示した解析の結果、1-a, 1-b, 1-c, 1-d, 2-a, 2-b, 2-d, 3-a, 3-b が均衡状態であることが明らかとなった。以下では、各立地パターンが均衡状態となる企業間コミュニケーションの自由度 ϕ 、単位距離あたりの通勤距離 t の範囲を示す。

⁵⁾ 本章で示される安定均衡状態は、あくまでも立地パターンの線対称性が崩れないという仮定の下で確認されたものであり、線対称性が崩れる方向の摂動に対する安定性は考慮していない。より厳密な安定性の確認は、今後の課題とする。

パターン 1-a

$$t \geq \frac{4N}{d}\beta s^2 \quad (30a)$$

$$\phi \leq 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (30b)$$

パターン 1-b

$$t \leq \frac{N}{2d}(1 - \phi)\alpha \quad (31a)$$

$$\frac{N}{d}\beta s^2 < t < \frac{4N}{d}\beta s^2 \quad (31b)$$

パターン 1-c

$$t \leq \frac{N}{d} \min\{(1 - \phi)\alpha - \beta s^2, \beta s^2\} \quad (32)$$

パターン 2-a

$$t \geq \frac{N}{d} \max\{4\beta s^2 - \alpha, 2\beta s^2\} \quad (33a)$$

$$\phi < \sqrt{1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2} \quad (33b)$$

パターン 2-c

$$t \leq \frac{N}{4d}(1 - \phi)^2\alpha \quad (34a)$$

$$t < \frac{2N}{d}\beta s^2 \quad (34b)$$

パターン 3-a

$$t < \frac{4\beta s^2 N}{(3 - \phi)d}\phi \quad (35a)$$

$$\phi > 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (35b)$$

パターン 3-b

$$(1 - \phi)\alpha > \frac{2td}{N} \quad (36a)$$

$$(1 - \phi)\alpha > \frac{12td\beta s^2}{(3 - \phi)(\beta s^2 N + td)} \quad (36b)$$

$$(1 - \phi)\alpha < \frac{24td\beta s^2}{(3 - \phi)td + 4\phi\beta s^2 N} \quad (36c)$$

(2) 均衡立地パターンの安定性

前節より、3地点モデルの均衡立地パターンが明らかとなった。次に、ポテンシャル関数を用いて安定性解析する。ポテンシャル関数を局所的に最大化する均衡立地パターンが安定均衡状態となることから、ポテンシャル関数の形状から均衡状態の特性を明らかにする。

安定性解析の結果より、1-a, 1-b, 1-c, 1-d, 2-a, 2-d, 3-a が安定均衡状態であることが明らかとなった。以下では、各立地パターンが安定均衡状態となる ϕ , t の範囲を示す。なお、証明は付録 IV で示す：

パターン 1-a

$$t > \frac{4N}{d}\beta s^2 \quad (37a)$$

$$\phi < 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (37b)$$

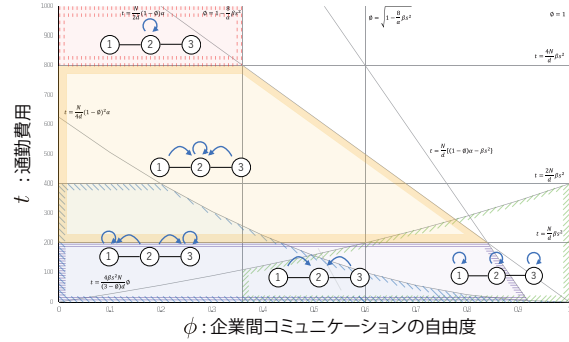


図-4 安定均衡解の分布図 (3 地点モデル)

パターン 1-b

$$t \leq \frac{N}{2d}(1 - \phi)\alpha \quad (38a)$$

$$\frac{N}{d}\beta s^2 < t < \frac{4N}{d}\beta s^2 \quad (38b)$$

パターン 1-c

$$t \leq \frac{N}{d} \min\{(1 - \phi)\alpha - \beta s^2, \beta s^2\} \quad (39)$$

パターン 2-c

$$t \leq \frac{N}{4d}(1 - \phi)^2\alpha \quad (40a)$$

$$t < \frac{2N}{d}\beta s^2 \quad (40b)$$

パターン 3-a

$$t < \frac{4\beta s^2 N}{(3 - \phi)d}\phi \quad (41a)$$

$$\phi > 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (41b)$$

解析結果を安定的な均衡立地パターンの分布図は、図-4 のとおりとなった。次章で、3 地点モデルの解析で得られた結果を考察する。

5. モデル特性に関する考察

(1) 通勤費用 t

本モデルでは、都市内にある 3 つの立地点に経済主体が立地することを想定している。それぞれの立地点間は距離 d だけ離れており、通過する費用として td だけ支払わなければならない。そこで、パラメータである単位距離あたりの通勤費用 t の値を変化させ、都市内の家計・企業の立地パターンの変化を見ていく。

図-4 の ϕ 軸を固定させ、 t を変化させたときのモデル挙動を示す。このときの各パラメータの値を $\alpha = 250.0$, $\phi \in (0, 0.36)$, $\beta = 5.0$, $s = 2.0$, $d = 50.0$, $N = 500.0$ と設定し、その挙動を図-5 で示す。図-5 より、通勤費用が安いと、都心の周辺部に住宅が立地し、通勤費用が高くなると、企業と家計が一か所に集中することがわかる。また、 t のパラメータ挙動で、都心の個数は変化しないことも確認できる。この結果は、立地点間のア

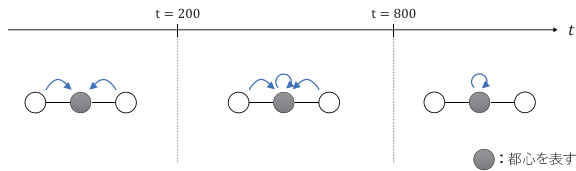


図-5 t のパラメータ挙動 ($\phi \in (0, 0.36)$)

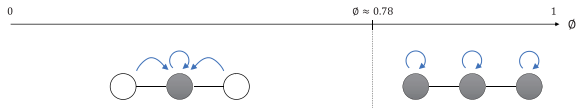


図-6 ϕ のパラメータ挙動 ($t = 279.4$)

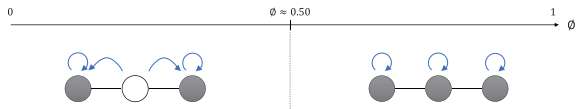


図-7 ϕ のパラメータ挙動 ($t = 158.6$)

クセスが改善され、通勤費用が低下すると、都心の周辺部に住宅が立地 (i.e., ベッドタウンの形成) することに対応していると考えられる。

(2) 企業間コミュニケーションの自由度 ϕ

フェイス・トゥ・フェイスのコミュニケーションは、企業の技術革新・生産性改善に効果的であると考えられる。そこで、企業間コミュニケーションの自由度 ϕ (i.e., 企業同士のやりとりのしやすさ) の値を変化させ、都市内の家計・企業の立地パターンの変化を見ていく。

図-4 の t 軸を固定させ、 ϕ を変化させたときのモデル挙動を示す。このときの各パラメータの値を $\alpha = 250.0$, $\beta = 5.0$, $s = 2.0$, $d = 50.0$, $N = 500.0$ と設定し、 $t = 279.4$, $t = 158.6$ に着目して考察する。なお、図-6 は $t = 279.4$, 図-7 は $t = 158.6$ とした場合の結果である。

図-6, 7 より、企業間のコミュニケーションが容易になるにつれて、企業が集積する都心の数が増加している様子が確認できる。そして、このように企業が分散立地するようになると、家計も企業に近接した位置に居住するようになっている。この結果は、今後の IoT (Internet of Things) の進展による企業間コミュニケーションの容易化が、複数の都心形成につながることを示唆している。

6. おわりに

本研究では、Fujita and Ogawa⁹⁾ モデルを拡張し、本研究で用いるためのモデルを構築した。そして、安定均衡状態の性質を調べるために、本モデルでのポテンシャル関数の存在を確認し、2 地点モデルの均衡状態を

調べ、安定性解析を行った。その結果、本モデルの均衡状態の安定性が確認され、複数都心を示す立地パターンが安定均衡状態であることが明らかとなった。また、3 地点モデルの解析より、本モデルのパラメータである単位距離当たりの通勤費用 t と企業間コミュニケーションの自由度 ϕ が変化することによる、都市内の家計と企業の行動の変化が明らかとなった。

本稿では、モデルの安定性を解析的に確認するために、立地点数が 2 と 3 のケースのみを解析対象とした。それゆえ、より多くの立地点が存在するケースの解析は、今後の重要な研究課題である。

謝辞: 本論文は、日本学術振興会 科学研究費補助金 若手研究 (B) (課題番号 15K18136) の助成金を受けた研究の一部である。ここに記し、感謝の意を表します。

付録 I. 2 地点モデルの均衡立地パターン

(1) 1-a の証明

1-a での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{12} > 0, \quad n_{22} > 0 \quad (\text{I.1a})$$

$$n_{11} = n_{21} = 0 \quad (\text{I.1b})$$

$$n_{12} + n_{22} = N \quad (\text{I.1c})$$

$$z_{12} = z_{22} \geq \max\{z_{11}, z_{21}\} \quad (\text{I.1d})$$

これらの式から、1-a が均衡となる範囲が得られる:

$$t \leq \frac{N}{2d} \{3(1-\phi)\alpha - 16\beta s^2\} \quad (\text{I.2})$$

したがって、1-a は均衡条件を満たす。

(2) 1-b の証明

1-b での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{12} > 0 \quad (\text{I.3a})$$

$$n_{11} = n_{21} = n_{22} = 0 \quad (\text{I.3b})$$

$$n_{12} = N \quad (\text{I.3c})$$

$$z_{12} \geq \max\{z_{11}, z_{21}, z_{22}\} \quad (\text{I.3d})$$

これらの式から、

$$n_{12} \leq -\frac{td}{8\beta s^2} < 0 \quad (\text{I.4})$$

が得られ、 $n_{12} > 0$ と矛盾することがわかる。したがって、1-b は均衡条件を満たさない。

(3) 1-c の証明

1-c での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{11} > 0 \quad (\text{I.5a})$$

$$n_{12} = n_{21} = n_{22} = 0 \quad (\text{I.5b})$$

$$n_{11} = N \quad (\text{I.5c})$$

$$z_{11} \geq \max\{z_{12}, z_{21}, z_{22}\} \quad (\text{I.5d})$$

これらの式から、1-c が均衡となる範囲が得られる:

$$\phi \leq 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (\text{I.6a})$$

$$t \geq \frac{4N}{d}\beta s^2 \quad (\text{I.6b})$$

したがって、1-c は均衡条件を満たす。

(4) 2-a の証明

2-a での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{11} > 0, \quad n_{12} > 0, \quad n_{21} > 0, \quad n_{22} > 0 \quad (\text{I.7a})$$

$$n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22} = N \quad (\text{I.7b})$$

$$z_{11} = z_{12} = z_{21} = z_{22} \quad (\text{I.7c})$$

これらの式から、

$$n_{12} = -\frac{td}{8\beta s^2} < 0 \quad (\text{I.8})$$

が得られ、 $n_{12} > 0$ と矛盾することがわかる。したがって、2-a は均衡条件を満たさない。

(5) 2-b の証明

2-b での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{11} > 0, \quad n_{12} > 0, \quad n_{21} > 0 \quad (\text{I.9a})$$

$$n_{22} = 0 \quad (\text{I.9b})$$

$$n_{11} + n_{12} + n_{21} = N \quad (\text{I.9c})$$

$$z_{11} = z_{12} = z_{21} \geq z_{22} \quad (\text{I.9d})$$

これらの式から、

$$n_{11} \leq -\frac{8\beta s^2 n_{12} + td}{4\beta s^2} < 0 \quad (\text{I.10})$$

が得られ、 $n_{11} > 0$ と矛盾することがわかる。したがって、2-b は均衡条件を満たさない。

(6) 2-c の証明

2-c での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{11} > 0, \quad n_{12} > 0, \quad n_{22} > 0 \quad (\text{I.11a})$$

$$n_{21} = 0 \quad (\text{I.11b})$$

$$n_{11} + n_{12} + n_{22} = N \quad (\text{I.11c})$$

$$z_{11} = z_{12} = z_{22} \geq z_{21} \quad (\text{I.11d})$$

これらの式から、2-c が均衡となる範囲が得られる:

$$t < \frac{N}{2d} \{3(1 - \phi)\alpha - 16\beta s^2\} \quad (\text{I.12a})$$

$$\phi > 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (\text{I.12b})$$

したがって、2-c は均衡条件を満たす。

(7) 2-d の証明

2-d での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{12} > 0, \quad n_{21} > 0 \quad (\text{I.13a})$$

$$n_{11} = n_{22} = 0 \quad (\text{I.13b})$$

$$n_{12} + n_{21} = N \quad (\text{I.13c})$$

$$z_{12} = z_{21} \geq \max\{z_{11}, z_{22}\} \quad (\text{I.13d})$$

これらの式から、

$$n_{12} \leq -\frac{td}{8\beta s^2} < 0 \quad (\text{I.14})$$

が得られ、 $n_{12} > 0$ と矛盾することがわかる。したがって、2-d は均衡条件を満たさない。

(8) 2-e の証明

2-e での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{11} > 0, \quad n_{22} > 0 \quad (\text{I.15a})$$

$$n_{12} = n_{21} = 0 \quad (\text{I.15b})$$

$$n_{11} + n_{22} = N \quad (\text{I.15c})$$

$$z_{11} = z_{22} \geq \max\{z_{12}, z_{21}\} \quad (\text{I.15d})$$

これらの式から、2-e が均衡となる範囲が得られる:

$$t \geq 0 \quad (\text{I.16})$$

したがって、2-e は均衡条件を満たす。

(9) 2-f の証明

2-f での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{11} > 0, \quad n_{12} > 0 \quad (\text{I.17a})$$

$$n_{21} = n_{22} = 0 \quad (\text{I.17b})$$

$$n_{11} + n_{12} = N \quad (\text{I.17c})$$

$$z_{11} = z_{12} \geq \max\{z_{21}, z_{22}\} \quad (\text{I.17d})$$

これらの式から、

$$2N + \frac{td}{4\beta s^2} \leq n_{11} \leq \frac{td}{4\beta s^2} \quad (\text{I.18})$$

が得られたが、それらを同時に満たす n_{11} は存在しないため、2-f は均衡条件を満たさない。

付録 II. 2 地点モデルの各均衡立地パターンの安定性解析

(1) 1-a の証明

ポテンシャル関数を用いて安定性解析を行う。(19) に

$$n_{11} = n_{21} = 0 \quad (\text{II.1a})$$

$$n_{22} = N - n_{12} \quad (\text{II.1b})$$

$$n_{12} = n_{32} \quad (\text{II.1c})$$

を代入することで、1-a におけるポテンシャル関数 $P(n_{12})$ が得られる:

$$P(n_{12}) = 2\beta s^2 n_{12}(2N - 3n_{12}) + \frac{1}{2}(\alpha - 8\beta s^2)N^2 - tdn_{12} \quad (\text{II.2})$$

(II.2) 式より、局所的最大化 (i.e., $P(n_{12})$ を n_{12} で 2 階微分する) する条件は

$$\beta s^2 > 0 \quad (\text{II.3})$$

となり、1-a が安定となる範囲は次のようになる:

$$t \leq \frac{N}{2d} \{3(1 - \phi)\alpha - 16\beta s^2\} \quad (\text{II.4})$$

したがって、1-a は安定均衡状態となる。

(2) 1-c の証明

パターン 1-c は、 $n_{11} = N$ となるケースであるため、次の条件を満足すれば均衡状態は安定である (i.e., $n_{11} = N$ がポテンシャル関数を局所的に最大化する) と言える:

$$z_{11} > \max\{z_{12}, z_{21}, z_{22}\} \quad (\text{II.5})$$

したがって、パターン 1-c が安定均衡状態となる条件は以下で与えられる:

$$\phi < 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (\text{II.6a})$$

$$t > \frac{4N}{d}\beta s^2 \quad (\text{II.6b})$$

(3) 2-c の証明

1-a と同様に、ポテンシャル関数を用いて安定性解析を行う。(19) 式に

$$n_{21} = 0 \quad (\text{II.7a})$$

$$n_{12} = N - n_{11} - n_{22} \quad (\text{II.7b})$$

を代入することで、2-c におけるポテンシャル関数 $P(n_{11}, n_{22})$ が得られる:

$$\begin{aligned} P(n_{11}, n_{22}) &= (\varepsilon - 6\beta s^2)n_{11}^2 - 6\beta s^2 n_{22}^2 - (\varepsilon - 8\beta s^2)Nn_{11} \\ &\quad - 4\beta s^2 n_{11}n_{22} + 8\beta s^2 Nn_{22} + \frac{\alpha - 12\beta s^2}{2}N^2 \\ &\quad - td(N - n_{11} - n_{22}) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

ここで、 $\varepsilon = (1 - \phi)\alpha$ である。また、ヘッセ行列 $\nabla^2 P(n_{ai})$ が負定値のとき、 P は狭義凹関数となることが知られており、2-c のヘッセ行列は次のようになる:

$$\nabla^2 P(n_{11}, n_{22}) = \begin{bmatrix} \varepsilon - 6\beta s^2 & -4\beta s^2 \\ -4\beta s^2 & -6\beta s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

(II.9) より、固有値がすべて負となる条件が

$$\varepsilon < 6\beta s^2 \quad (\text{II.10})$$

となり、2-c が安定となる範囲は次のようになる:

$$t < \frac{N}{2d} \{3(1 - \phi)\alpha - 16\beta s^2\} \quad (\text{II.11a})$$

$$\phi > 1 - \frac{6}{\alpha}\beta s^2 \quad (\text{II.11b})$$

したがって、2-c は安定均衡状態となる。

(4) 2-e の証明

1-a と同様に、ポテンシャル関数を用いて安定性解析を行う。(19) 式に

$$n_{12} = n_{21} = 0 \quad (\text{II.12a})$$

$$n_{22} = N - n_{11} \quad (\text{II.12b})$$

を代入することで、2-e におけるポテンシャル関数 $P(n_{11})$ が得られる:

$$P(n_{11}) = -(\varepsilon - 8\beta s^2)(N - n_{11})n_{11} + \frac{1}{2}(\alpha - 8\beta s^2)N^2 \quad (\text{II.13})$$

(II.13) 式より、局所的最大 (i.e., $P(n_{11})$ を n_{11} で 2 階微分する) となる条件は

$$\phi > 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (\text{II.14})$$

となるので、2-e は安定均衡状態となる。

付録 III. 3 地点モデルの均衡立地パターン

(1) 1-a の証明

1-a での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{22} > 0 \quad (\text{III.1a})$$

$$n_{1i} = n_{21} = n_{23} = n_{3i} = 0 \quad (\text{III.1b})$$

$$n_{22} = N \quad (\text{III.1c})$$

$$z_{22} \geq \max\{z_{1i}, z_{21}, z_{23}, z_{3i}\} \quad (\text{III.1d})$$

これらの式から、1-a が均衡となる範囲が得られる:

$$t \geq \frac{4N}{d}\beta s^2 \quad (\text{III.2a})$$

$$\phi \leq 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (\text{III.2b})$$

したがって、1-a は均衡条件を満たす。

(2) 1-b の証明

1-b での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{12} > 0, \quad n_{22} > 0, \quad n_{32} > 0 \quad (\text{III.3a})$$

$$n_{11} = n_{13} = n_{21} = n_{23} = n_{31} = n_{33} = 0 \quad (\text{III.3b})$$

$$n_{12} + n_{22} + n_{32} = N \quad (\text{III.3c})$$

$$z_{12} = z_{22} = z_{32} \geq \max\{z_{11}, z_{13}, z_{21}, z_{23}, z_{31}, z_{33}\} \quad (\text{III.3d})$$

これらの式から、1-b が均衡となる範囲が得られる:

$$t \leq \frac{N}{2d}(1 - \phi)\alpha \quad (\text{III.4a})$$

$$\frac{N}{d}\beta s^2 < t < \frac{4N}{d}\beta s^2 \quad (\text{III.4b})$$

したがって、1-b は均衡条件を満たす。

(3) 1-c の証明

1-c での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{12} > 0, n_{32} > 0 \quad (\text{III.5a})$$

$$n_{11} = n_{13} = n_{2i} = n_{31} = n_{33} = 0 \quad (\text{III.5b})$$

$$n_{12} + n_{32} = N \quad (\text{III.5c})$$

$$z_{12} = z_{32} \geq \max\{z_{11}, z_{13}, z_{2i}, z_{31}, z_{33}\} \quad (\text{III.5d})$$

これらの式から、1-c が均衡となる範囲が得られる:

$$t \leq \frac{N}{d} \min\{(1-\phi)\alpha - \beta s^2, \beta s^2\} \quad (\text{III.6})$$

したがって、1-c は均衡条件を満たす。

(4) 2-a の証明

2-a での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{11} > 0, n_{33} > 0 \quad (\text{III.7a})$$

$$n_{12} = n_{13} = n_{2i} = n_{31} = n_{32} = 0 \quad (\text{III.7b})$$

$$n_{11} + n_{33} = N \quad (\text{III.7c})$$

$$z_{11} = z_{33} \geq \max\{z_{12}, z_{13}, z_{2i}, z_{31}, z_{32}\} \quad (\text{III.7d})$$

これらの式から、2-a が均衡となる範囲が得られる:

$$t \geq \frac{N}{d}(4\beta s^2 - \alpha) \quad (\text{III.8a})$$

$$t \geq \frac{2N}{d}\beta s^2 \quad (\text{III.8b})$$

$$\phi < \sqrt{1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2} \quad (\text{III.8c})$$

したがって、2-a は均衡条件を満たす。

(5) 2-b の証明

2-b の均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{21} > 0, n_{23} > 0 \quad (\text{III.9a})$$

$$n_{1i} = n_{22} = n_{3i} = 0 \quad (\text{III.9b})$$

$$n_{21} + n_{23} = N \quad (\text{III.9c})$$

$$z_{21} = z_{23} \geq \max\{z_{1i}, z_{22}, z_{3i}\} \quad (\text{III.9d})$$

これらの式から、

$$n_{21} \leq -\frac{td}{2\beta s^2} < 0 \quad (\text{III.10})$$

が得られ、 $n_{21} > 0$ と矛盾することがわかる。したがって、2-b は均衡条件を満たさない。

(6) 2-c の証明

2-c での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{11} > 0, n_{21} > 0, n_{23} > 0, n_{33} > 0 \quad (\text{III.11a})$$

$$n_{12} = n_{13} = n_{22} = n_{31} = n_{32} = 0 \quad (\text{III.11b})$$

$$n_{11} + n_{21} + n_{23} + n_{33} = N \quad (\text{III.11c})$$

$$z_{11} = z_{21} = z_{23} = z_{33} \geq \max\{z_{12}, z_{13}, z_{22}, z_{31}, z_{3,2}\} \quad (\text{III.11d})$$

これらの式から、2-c が均衡となる範囲が得られる:

$$t \leq \frac{N}{4d}(1-\phi)^2\alpha \quad (\text{III.12a})$$

$$t < \frac{2N}{d}\beta s^2 \quad (\text{III.12b})$$

したがって、2-c は均衡条件を満たす。

(7) 3-a の証明

3-a での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{11} > 0, n_{22} > 0, n_{33} > 0 \quad (\text{III.13a})$$

$$n_{12} = n_{13} = n_{21} = n_{23} = n_{31} = n_{32} = 0 \quad (\text{III.13b})$$

$$n_{11} + n_{22} + n_{33} = N \quad (\text{III.13c})$$

$$z_{11} = z_{22} = z_{33} \geq \max\{z_{12}, z_{13}, z_{21}, z_{23}, z_{31}, z_{32}\} \quad (\text{III.13d})$$

これらの式から、3-a が均衡となる範囲が得られる:

$$t < \frac{4\beta s^2 N}{(3-\phi)d}\phi \quad (\text{III.14a})$$

$$\phi > 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (\text{III.14b})$$

したがって、3-a は均衡条件を満たす。

(8) 3-b の証明

3-b での均衡条件は、次のように与えられる:

$$n_{11} > 0, n_{12} > 0, n_{22} > 0, n_{32} > 0, n_{33} > 0 \quad (\text{III.15a})$$

$$n_{13} = n_{21} = n_{23} = n_{31} = 0 \quad (\text{III.15b})$$

$$n_{11} + n_{12} + n_{22} + n_{32} + n_{33} = N \quad (\text{III.15c})$$

$$z_{11} = z_{12} = z_{22} = z_{32} = z_{33} \geq \max\{z_{13}, z_{21}, z_{23}, z_{31}\} \quad (\text{III.15d})$$

これらの式から、3-b が均衡となる範囲が得られる:

$$(1-\phi)\alpha > \frac{2td}{N} \quad (\text{III.16a})$$

$$(1-\phi)\alpha > \frac{12\beta s^2 td}{(3-\phi)(\beta s^2 N + td)} \quad (\text{III.16b})$$

$$(1-\phi)\alpha < \frac{24\beta s^2 td}{(3-\phi)td + 4\phi\beta s^2 N} \quad (\text{III.16c})$$

したがって、3-b は均衡条件を満たす。

付録 IV. 3 地点モデルの各均衡立地パターンの安定性解析

(1) 1-a の証明

パターン 1-a は, $n_{22} = N$ となるケースであるため, 次の条件を満足すれば均衡状態は安定である (i.e., $n_{22} = N$ がポテンシャル関数を局所的に最大化する) と言える:

$$z_{22} > \max\{z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{21}, z_{23}, z_{31}, z_{32}, z_{33}\} \quad (\text{IV.1})$$

したがって, パターン 1-a が安定均衡状態となる条件は以下で与えられる:

$$t > \frac{4N}{d}\beta s^2 \quad (\text{IV.2a})$$

$$\phi < 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (\text{IV.2b})$$

(2) 1-b の証明

ポテンシャル関数を用いて安定性解析を行う. (19) に

$$n_{11} = n_{13} = n_{21} = n_{23} = n_{31} = n_{33} = 0 \quad (\text{IV.3a})$$

$$n_{22} = N - n_{12} - n_{32} \quad (\text{IV.3b})$$

$$n_{12} = n_{32} \quad (\text{IV.3c})$$

を代入することで, 1-b におけるポテンシャル関数 $P(n_{12})$ が得られる:

$$P(n_{12}) = -6\beta s^2 n_{12}^2 + (8\beta s^2 N - 2td)n_{12} + \frac{1}{2}(\alpha - 8\beta s^2)N^2 \quad (\text{IV.4})$$

(IV.4) 式より, 局所的最大 (i.e., $P(n_{12})$ を n_{12} で 2 階微分する) となる条件は

$$\beta s^2 > 0 \quad (\text{IV.5})$$

となり, 1-b が安定となる範囲は次のようになる:

$$t \leq \frac{N}{2d}(1 - \phi)\alpha \quad (\text{IV.6a})$$

$$\frac{N}{d}\beta s^2 < t < \frac{4N}{d}\beta s^2 \quad (\text{IV.6b})$$

したがって, 1-b は安定均衡状態となる.

(3) 1-c の証明

ポテンシャル関数を用いて安定性解析を行う. (19) に

$$n_{11} = n_{13} = n_{21} = n_{22} = n_{23} = n_{31} = n_{33} = 0 \quad (\text{IV.7a})$$

$$n_{32} = N - n_{12} \quad (\text{IV.7b})$$

を代入することで, 1-c におけるポテンシャル関数 $P(n_{12})$ が得られる:

$$P(n_{12}) = 2\beta s^2(N - n_{12})n_{12} + \frac{1}{2}(\alpha - 4\beta s^2)N^2 - tdN \quad (\text{IV.8})$$

(IV.8) 式より, 局所的最大 (i.e., $P(n_{12})$ を n_{12} で 2 階微分する) となる条件は

$$\beta s^2 > 0 \quad (\text{IV.9})$$

となり, 1-c が安定となる範囲は次のようになる:

$$t \leq \frac{N}{d} \min\{(1 - \phi)\alpha - \beta s^2, \beta s^2\} \quad (\text{IV.10})$$

したがって, 1-c は安定均衡状態となる.

(4) 2-a の証明

ポテンシャル関数を用いて安定性解析を行う. (19) に

$$n_{12} = n_{13} = n_{21} = n_{22} = n_{23} = n_{31} = n_{32} = 0 \quad (\text{IV.11a})$$

$$n_{33} = N - n_{11} \quad (\text{IV.11b})$$

を代入することで, 2-a におけるポテンシャル関数 $P(n_{11})$ が得られる:

$$P(n_{11}) = -\{(1 + \phi)\varepsilon - 8\beta s^2\}(N - n_{11})n_{11} + \frac{1}{2}(\alpha - 8\beta s^2)N^2 \quad (\text{IV.12})$$

(IV.12) 式より, 局所的最大 (i.e., $P(n_{11})$ を n_{11} で 2 階微分する) となる条件は

$$\phi > \sqrt{1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2} \quad (\text{IV.13})$$

となり, 2-a が均衡となる範囲と一致しないので, 2-a は不安定均衡状態となる.

(5) 2-c の証明

ポテンシャル関数を用いて安定性解析を行う. (19) に

$$n_{12} = n_{13} = n_{22} = n_{31} = n_{32} = 0 \quad (\text{IV.14a})$$

$$n_{11} = n_{33} \quad (\text{IV.14b})$$

$$n_{21} = n_{23} \quad (\text{IV.14c})$$

$$n_{21} = \frac{N}{2} - n_{11} \quad (\text{IV.14d})$$

を代入することで, 2-c におけるポテンシャル関数 $P(n_{11})$ が得られる:

$$P(n_{11}) = -6\beta s^2 n_{11}^2 + 2\beta s^2 N n_{11} - td(N - 2n_{11}) + \frac{1}{4}(\alpha + \alpha\phi^2 - 6\beta s^2)N^2 \quad (\text{IV.15})$$

(IV.15) 式より, 局所的最大 (i.e., $P(n_{11})$ を n_{11} で 2 階微分する) となる条件は

$$\beta s^2 > 0 \quad (\text{IV.16})$$

となり, 2-c が安定となる範囲は次のようになる:

$$t \leq \frac{N}{4d}(1 - \phi)^2\alpha \quad (\text{IV.17a})$$

$$t < \frac{2N}{d}\beta s^2 \quad (\text{IV.17b})$$

したがって, 2-c は安定均衡状態となる.

(6) 3-a の証明

ポテンシャル関数を用いて安定性解析を行う。(19)に

$$n_{12} = n_{13} = n_{21} = n_{23} = n_{31} = n_{32} = 0 \quad (\text{IV.18a})$$

$$n_{22} = N - n_{11} - n_{33} \quad (\text{IV.18b})$$

$$n_{11} = n_{33} \quad (\text{IV.18c})$$

を代入することで, 3-a におけるポテンシャル関数 $P(n_{11})$ が得られる:

$$P(n_{11}) = \{(3 - \phi)\varepsilon - 24\beta s^2\}n_{11}^2 - 2(\varepsilon - 8\beta s^2)Nn_{11} + \frac{1}{2}(\alpha - 8\beta s^2)N^2 \quad (\text{IV.19})$$

(IV.19) 式より, 局所的最大 (i.e., $P(n_{11})$ を n_{11} で 2 階微分する) となる条件は

$$\varepsilon < \frac{24}{3 - \phi}\beta s^2 \quad (\text{IV.20})$$

よって, 解の安定性は次のようになる:

$$t < \frac{4\beta s^2 N}{(3 - \phi)d}\phi \quad (\text{IV.21a})$$

$$\phi > 1 - \frac{8}{\alpha}\beta s^2 \quad (\text{IV.21b})$$

したがって, 3-a は安定均衡状態となる.

(7) 3-b の証明

ポテンシャル関数を用いて安定性解析を行う。(19)に

$$n_{13} = n_{21} = n_{23} = n_{31} = 0 \quad (\text{IV.22a})$$

$$n_{11} = n_{12} = n_{22} = n_{32} = n_{33} = 0 \quad (\text{IV.22b})$$

$$n_{11} = n_{33} \quad (\text{IV.22c})$$

$$n_{12} = n_{32} \quad (\text{IV.22d})$$

を代入することで, 3-b におけるポテンシャル関数 $P(n_{11})$ が得られる:

$$P(n_{11}) = -\frac{(\varepsilon - 8\beta s^2)N}{6\beta s^2}\{6\beta s^2(\varepsilon - 24\beta s^2)N - td\} - \left[\frac{(3 - \phi)\varepsilon}{24\beta s^2} - 1 \right] \{(3 - \phi)\varepsilon n_{11} - 2(\varepsilon N - 2td)\}n_{11} + \frac{1}{2}(\alpha - 8\beta s^2)N^2 \quad (\text{IV.23})$$

(IV.23) 式より, 局所的最大 (i.e., $P(n_{11})$ を n_{11} で 2 階微分する) となる条件は

$$\varepsilon > \frac{24}{3 - \phi}\beta s^2 \quad (\text{IV.24})$$

となり, 3-b が均衡となる範囲と一致しないので, 3-b は不安定均衡状態となる.

参考文献

- 1) Fujita, M. and Thisse, J.-F.: *Economics of Agglomeration: Cities, Industrial Location, and Globalization*, Cambridge University Press, 2013.
- 2) Beckmann, M. J.: Spatial equilibrium in the dispersed city, in Papageorgiou, G. J. ed. *Mathematical Land Use Theory*, Lexington Books, pp. 117–125, 1976.
- 3) O'Hara, D. J.: Location of firms within a square central business district, *Journal of Political Economy*, Vol. 85, No. 6, pp. 1189–1207, 1977.
- 4) Tabuchi, T.: Urban agglomeration economies in a linear city, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 16, No. 3, pp. 421–436, 1986.
- 5) Akamatsu, T., Mori, T., Osawa, M. and Takayama, Y.: Spatial scale of agglomerations: Theoretical foundations and empirical implications, *mimeograph*, 2017.
- 6) 高山雄貴, 赤松隆: 空間競争を考慮した Social Interaction モデルによる複数都心の創発, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 67, No. 1, pp. 1–20, 2011.
- 7) Ogawa, H. and Fujita, M.: Equilibrium land use patterns in a nonmonocentric city, *Journal of Regional Science*, Vol. 20, No. 4, pp. 455–475, 1980.
- 8) Imai, H.: CBD hypothesis and economies of agglomeration, *Journal of Economic Theory*, Vol. 28, No. 2, pp. 275–299, 1982.
- 9) Fujita, M. and Ogawa, H.: Multiple equilibria and structural transition of non-monocentric urban configurations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 12, No. 2, pp. 161–196, 1982.
- 10) Lucas, R. E. and Rossi-Hansberg, E.: On the internal structure of cities, *Econometrica*, Vol. 70, No. 4, pp. 1445–1476, 2002.
- 11) Osawa, M.: Monocentric and polycentric patterns in the spatial economy: A unification of intra-city and inter-regional theories, Ph.D. dissertation, Tohoku University, 2016.
- 12) Sandholm, W. H.: Potential games with continuous player sets, *Journal of Economic Theory*, Vol. 97, No. 1, pp. 81–108, 2001.
- 13) Sandholm, W. H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, 2010.

(2017. 7. 31 受付)