

# 橋梁の経年劣化の不確実性に対する ロバスト最適補修計画モデル

大窪 和明<sup>1</sup>・全 邦釘<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 愛媛大学 防災情報研究センター

E-mail: okubo@cee.ehime-u.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 愛媛大学大学院 理工学研究科 (〒 790-8577 愛媛県松山市文京町 3)

橋梁の劣化予測において、橋梁ごとの個体差が大きく、予測が難しいことが知られている。本研究では、こうした将来予測値の不確実性に対して頑健な補修計画を策定できるようなロバスト最適補修計画モデルを提案する。具体的には、道路ネットワークにおける需要変動型モデルを基礎として、橋梁の劣化や補修工事による交通量の低下や迂回を考慮した補修計画モデルを提案する。また、計画開始時点での各橋梁の最新の点検結果を所与として、管理者が望む頑健性の水準に応じた将来の劣化シナリオを策定するような問題を考える。提案したモデルを用いて、補修工事に利用可能な予算と頑健性とのトレードオフや、劣化の個体差が補修計画にもたらす影響を明らかにする。

## 1. はじめに

老朽化した橋梁を適切な維持管理戦略の下で運用していくことは、日々の生活を支えるための重要な課題である。我が国では 2014 年に橋梁定期点検要領や道路橋定期点検要領が施行され、2m 以上の道路橋について 5 年に 1 度の近接目視点検が義務化された。また、国土交通省によると全国の橋梁約 70 万橋のうち、橋齢が 50 年を超える 2m 以上の橋梁の割合は、2013 年の 18% から 20 年後の 2033 年には 67% に増加することが報告されている<sup>1)</sup>。したがって、将来的に点検・維持管理業務にかかる費用が増大し、予算や人的資源に関する制約が深刻な課題になることが予想され、交通利便性を出来るだけ損なわないような適切な点検・維持管理戦略が必要とされている。

現在までに蓄積されている橋梁の点検結果を下に、将来の劣化を予測することは、補修工事を実施する優先順位や今後、必要な予算の目安の決定などに役立つと考えられ、適切な点検・維持管理戦略を決める上で有用である。これまで、点検結果を用いた橋梁の劣化要因の把握<sup>2),3),4)</sup>や、劣化予測モデルの提案・適用など、将来の橋梁の状態を予測<sup>5),6)</sup>するための様々な研究がなされている。こうした劣化予測をふまえて、使用可能な予算や、橋梁が通行止めになった場合の迂回路や移動時間の増大などを考慮して、膨大な橋梁の中から補修工事を実施する優先順位を決めるなどの維持管理戦略の策定は複雑な意思決定である。そのため、こうした様々な制約条件下において、規範的な維持管理

戦略を策定できる体系的な方法が必要である。

これまでに複数の社会基盤施設に対する最適補修モデルは、青木ら<sup>7)</sup>や Xu ら<sup>8)</sup>などによって提案されている。青木では、複数のトンネル内照明システムについて一括取替ルールを設定し、逐次取替ルールと比較している。また、Xu らでは、大規模な道路ネットワーク上において、橋梁の劣化や補修工事による橋梁の通行止めが道路利用者の迂回時間にもたらす影響を最小化するような補修戦略を決めるモデルを提案している。本研究では、道路ネットワーク上における迂回路の存在も考慮可能な需要変動型モデルを基礎として、適切な橋梁の補修工事のタイミングを決めることができるモデルを提案する。

本研究では、橋梁の将来の劣化予測を下に、道路ネットワーク上において、適切な維持管理戦略を算出できるようなモデルを提案する。ここでは、将来の劣化予測値の信頼区間は広く、予測値がばらつくことを考慮した上で、こうした将来予測値の不確実性に対して頑健な維持管理戦略を策定できるようなモデルを提案する。すなわち、橋梁の劣化に影響をもたらす要因は、橋種、橋齢、橋長などの特徴や、海岸からの距離などの外的環境以外にも、個体差が大きいことが知られている。例えば、橋齢が 50 年を超えても健全な橋梁から、橋齢 20 年で劣化が見られるような橋梁も存在する。さらに、地震や大雨による増水といった自然から受ける外力や、過積載車両の通過など、建設時に想定していないような要因も橋梁の劣化に影響をもたらすと考えられ、将

来の状態には不確実な部分が多いといえる。

こうした将来が不確実な状況において、適切な意志決定を行うための手法としてロバスト最適化手法が古くから研究されてきた。不確実性のある事象について最悪なシナリオを想定し、悲観的な将来予測のみの下で意思決定を行うもの<sup>9)</sup>から、Bertsimas and Thiele<sup>10)</sup>や Adida and Perakis<sup>11), 12)</sup>による、悲観的なシナリオから楽観的なシナリオまでを Budget of Uncertainty と呼ばれる頑健性の水準を調整しつつ、適切な頑健性の水準の下で最適化するロバスト最適化手法が提案されてきた。Budget of Uncertainty を用いたロバスト最適化手法では、不確実な事象それぞれに Budget of Uncertainty を制約条件としたサブ問題を定式化している。本研究ではサブ問題として、1つの Budget of Uncertainty から、複数の橋梁が持つ不確実性に対して、経年劣化の個体差に応じてシナリオを割り振るようなサブ問題を考え、補修工事にかかる金銭的な予算制約と、頑健性の水準 (Budget of Uncertainty) とのトレードオフが考慮可能な枠組みを提案する。

## 2. ロバスト最適補修計画モデル

本章では、 $t$  年における橋梁  $a$  の健全度  $s_a(t)$  が経年的に劣化していき、一年当たりの健全度の低下が橋梁によって異なるが正確な値は不確実な状況下においてロバスト最適補修計画を求めるモデルを定式化する。

### (1) 管理者が想定する橋梁の健全度の評価値

管理者の橋梁  $a$  の健全度を  $v_a(t)$  とおき、 $\underline{s} \leq v_a(t) \leq \bar{s}$  の値をとると考える。ただし、簡単化のため、評価値は連続変数を取り、小さな値をとるほど橋梁の状態が悪くなり、 $v_a(t) = \bar{s}$  が最良、 $v_a(t) = \underline{s}$  のとき最悪であると評価していると考え。管理者は点検または補修工事を実施することによってのみ、橋梁の真の状態  $s_a(t)$  を知ることができると考え、それ以外の場合には、前回の点検結果に基づく期待値に基づいて評価値を決めると考える。具体的には、計画開始年を  $t = 0$  としたときに、橋梁  $a$  の点検年は計画開始年の  $\tau_a$  年前であるとした場合、計画開始年の評価値  $v_a(t = 0)$  は、期待オペレータ  $E_{-\tau_a}[\cdot]$  を用いて、 $E_{-\tau_a}[s_a(0)]$  と表し、

$$E_{-\tau_a}[s_a(0)] = s_a(-\tau_a) - E_{-\tau_a}\left[\sum_{k=-\tau_a}^0 u_a(k)\right] \quad (1)$$

と仮定する。ここでは、 $u_a(t)$  を 1 年当たりの健全度の低下を表す項であり、正確な値は未知であるが、 $\tilde{u}_a - \hat{u}_a \leq u_a(t) \leq \tilde{u}_a + \hat{u}_a$  の範囲にあることは把握していると考え。すなわち、 $\tau_a$  年前の点検によって  $s_a(-\tau_a)$  は正確に把握しているものの、それ以降の劣化については期待値によって評価していると考え。また、計画開始年

以降の真の健全度  $s_a(t)$  は、1 年当たりの健全度の低下  $u_a(t)$  を用いて、次の式にしたがって推移すると考える。

$$s_a(t) = s_a(t-1) - u_a(t) \quad (2)$$

ただし、管理者は、点検、補修工事以外の方法で  $s_a(t)$  の値を正確に把握することはできないと考える。

ここで、補修工事の有無を  $y_a(t)$  を用いて表し、 $t$  年に補修工事を実施した場合は  $y_a(t) = 1$ 、実施しない場合は  $y_a(t) = 0$  とし、補修工事によって橋梁の健全度は最良の状態  $\bar{s}$  に回復すると考えると、管理者が考える橋梁  $a$  の評価値は、次のように定式化することができる。

$$\begin{cases} v_a(t) \leq E_{-\tau_a}[s_a(t)] + \bar{s}y_a(t) & \forall a, t, \\ v_a(t) \leq \bar{s} + \bar{s}(1 - y_a(t)) & \forall a, t, \end{cases} \quad (3)$$

健全度の定義より  $v_a(t)$  は大きいほど望ましく、真の健全度  $s_a(t)$  は、 $0 \leq \underline{s} \leq s_a(t) \leq \bar{s}$  と考える。この場合、 $t$  年に補修工事を実施した場合 ( $y_a(t) = 1$ )、 $v_a(t)$  の上限は式 (3) の第 2 式で決まるため、 $v_a(t) = \bar{s}$  となる。一方、補修工事を実施しない場合 ( $y_a(t) = 0$ ) には、 $v_a(t)$  の上限は式 (3) の第 1 式で決まるため、 $v_a(t) = E_{-\tau_a}[s_a(t)]$  となる。

### (2) 橋梁の劣化または補修工事による影響

交通ネットワーク上のノードとリンクを考え、ノード  $i$  とノード  $j$  を結ぶリンク  $ij$  を  $t$  年に通過する交通量を  $x_{i,j}$  として表す。ここではリンク  $ij$  にかかる橋梁は最大でも 1 橋と考え、この橋梁  $a$  が劣化または補修工事によって通行止めになった場合の、交通容量の低下を  $\Phi_a(t)$  とすると、 $t$  年におけるリンク交通量は

$$x_{i,j}(t) \leq \{1 - \Phi_a(t)\}C_a \quad \forall (i, j) \in \mathcal{J}_a, \forall t \quad (4)$$

となる。ただし、 $\mathcal{J}_a$  は、リンク  $\{i, j\}$  の全ての集合の内、橋梁がかかっているリンクの部分集合を表す。

リンク交通量が低下する要因は、補修工事による容量低下、橋梁の状況が悪いため安全面を考慮して通行止めにする容量低下の二種類があると考える。橋梁  $a$  における補修工事による容量低下を  $\{0, 1\}$  変数  $\sigma^y(t)$  を用いて、 $\sigma^y(t) = 1$  のときに容量低下するものと考え、 $\sigma^y(t)$  は

$$\sigma_a^y(t) \geq y_a(t) \quad \forall a, t \quad (5)$$

と表せる。また、この補修工事による容量低下を  $\phi^y \sigma_a^y(t)$  と仮定する。ただし、ここでのリンク交通量は 1 年当たりの交通量を考慮しており、容量低下の程度を表す  $\phi^y$  は、例えば 1 年のうち 6 ヶ月を通行止め、または 1 年間の間、半分の車線しか使用できないような補修工事をしたと考えれば  $\phi^y = 6/12$  のように表現できる。

次に、橋梁の状況が悪いため安全面を考慮して通行止めにした場合について述べる。橋梁の状況が悪いと判断するのは、管理者の考える評価値  $v_a(t)$  が  $\underline{s}$  に近い

値をとった場合、または住民からの連絡など管理者以外から真の橋梁状態  $s_a(t)$  が  $\underline{s}$  に近づいていると知られる場合である。  $v_a(t)$  または  $s_a(t)$  に基づいてなされる容量低下をそれぞれ  $\{0, 1\}$  変数  $\sigma_a^v(t), \sigma_a^s(t)$  を用いて表すと、  $\sigma_a^v(t), \sigma_a^s(t)$  と  $v_a(t), s_a(t)$  との関係は、

$$\begin{cases} \sigma_a^v(t) \geq \epsilon^v - \frac{v_a(t) - \underline{s}}{\underline{s}} & \forall a, t \\ \sigma_a^s(t) \geq \epsilon^s - \frac{s_a(t) - \underline{s}}{\underline{s}} & \forall a, t, \end{cases} \quad (6)$$

と表すことができる。ただし、  $\epsilon^v, \epsilon^s$  は、十分小さな値であり、最悪の状態  $\underline{s}$  から、橋梁の状態がどれぐらいの水準にあるときに容量を低下させるかを表している。ただし、  $\epsilon^v \geq \epsilon^s$  である。図-1 は、式 (6) の第 1 式を模式的に表したものである。この式の右辺は、  $v_a(t)$  に関する減少関数であり、図-1 のように表される。今、  $\underline{s} \leq v_a(t) < (1 + \epsilon^v)\underline{s}$  の範囲内では、式 (6) 第 1 式の右辺は正の値をとる。ここで  $\sigma_a^v(t) \in \{0, 1\}$  の離散変数であるため、  $\sigma_a^v(t) > 0$  を満たすためには、  $\sigma_a^v(t) = 1$  をとらなければならない。一方、  $(1 + \epsilon^v)\underline{s} \leq v_a(t) \leq \bar{s}$  の範囲内では  $\sigma_a^v(t) = 0$  をとることができ、容量低下は起こらない。  $\epsilon^v$  は、安全面を考慮して最悪の状態を避けて通行止めにする行動を表しており、管理者の評価値よりも、住民などからの連絡により通行止めにする方が、最悪の状況により近いと考え、  $\epsilon^v \geq \epsilon^s$  と定義する。

これらの要因による容量低下を表す係数を、それぞれ  $\phi^v \sigma_a^v(t), \phi^s \sigma_a^s(t)$  とおく。ただし、  $\phi^z \leq \phi^v \leq \phi^s$  とし、住民などからの連絡による通行止めが最も影響が大きいと考える。これは、事前に計画していない補修工事が必要になることにより、機材の確保や工事計画などに時間がかかる状況を表している。一方、事前に計画した補修工事による容量低下  $\phi^z$  は、補修工事に必要な機材の確保や夜間工事など影響の少ない工事を事前に計画するものとし、容量低下の影響が最も小さいと考える。

### (3) ロバスト最適補修計画モデルの定式化

以上の制約条件を下に、橋梁の真の状態が不確実な状況下におけるロバスト最適化補修計画モデルを次のように定式化する。具体的には、混雑によって所要時間が変化しないと考えた場合の需要変動型モデルが消費者余剰を最大化するような数理最適化モデルとして定式化できる<sup>13)</sup>ことを考慮し、リンク交通量に関して所要時間一定と仮定した次のような消費者余剰を目的関数とする問題を考える。

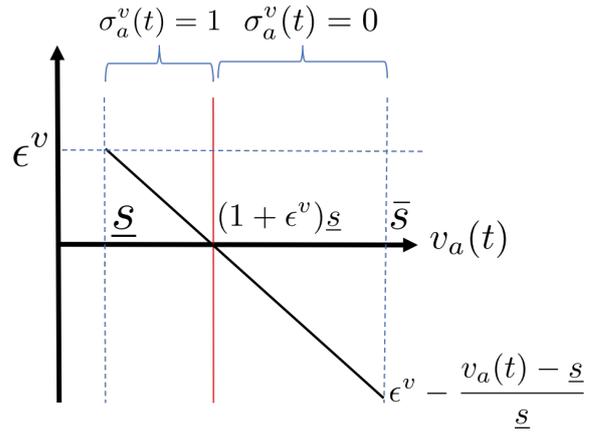


図-1 式 (6) の模式図

$$\max_{q, v, x, y} \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{od \in OD} \int_0^{q_{od}(t)} D_{od}^{-1}(w) dw - \sum_{a \in \mathcal{A}} c_a x_a(t) \right\} \quad (7)$$

subject to

$$\sum_{i \in I} x_{i,k}^o(t) - \sum_{j \in J} x_{k,j}^o(t) + \sum_{s \in \mathcal{D}} (\delta_{o,s} - \delta_{s,k}) q_{o,s}(t) = 0 \quad \forall k \in K, \forall o \in O \quad (8)$$

$$\sum_{a=1}^N f_a y_a(t) \leq B(t) \quad \forall t \quad (9)$$

$$x_{i,j}(t) \leq \{1 - \Phi_a(t)\} C_a \quad \forall (i, j) \in \mathcal{J}_a, \forall t \quad (10)$$

$$\sigma_a^v(t) \geq y_a(t) \quad \forall a, t \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sigma_a^v(t) \geq \epsilon^v - \frac{v_a(t) - \underline{s}}{\underline{s}} & \forall a, t \\ \sigma_a^s(t) \geq \epsilon^s - \frac{s_a(t) - \underline{s}}{\underline{s}} & \forall a, t, \end{cases} \quad (12)$$

$$\Phi_a(t) \geq \phi^l \sigma_a^l(t), \quad \forall a, \forall l, \forall t, \quad (13)$$

$$\begin{cases} v_a(t) \leq E_{-\tau_a}[s_a(t)] + \bar{s} y_a(t) & \forall a, t, \\ v_a(t) \leq \bar{s} + \bar{s}(1 - y_a(t)) & \forall a, t, \end{cases} \quad (14)$$

$$E_{-\tau_a}[s_a(0)] = s_a(-\tau_a) - E_{-\tau_a} \left[ \sum_{k=-\tau_a}^0 u_a(k) \right] \quad \forall a \quad (15)$$

$$\underline{s} \leq v_a(t) \leq \bar{s}, \underline{s} \leq s_a(t) \leq \bar{s} \quad \forall a, t \quad (16)$$

$$x_{i,j}(t) \geq 0, q_{od}(t) \geq 0 \quad \forall (i, j), \forall od, \forall t \quad (17)$$

$$y_a(t), z_a(t), \sigma_a^z(t), \sigma_a^s(t) \in \{0, 1\} \quad \forall i, t \quad (18)$$

ただし、  $c_{i,j}$  は、リンク  $\{i, j\}$  の所要時間、  $OD$  は  $OD$  の集合、  $q_{od}$  は  $od$  間の  $OD$  を移動する交通量、  $D_{od}^{-1}(w)$  は  $od$  間の逆需要関数である。また、交通量保存に関する条件式を、起点別リンク交通量  $x_{i,j}^o(t)$  を用い、arc-node 形式によって式 (8) のように表現する。以上の定式化に加えて、各年ごとの金銭的な予算制約  $B(t)$ 、および橋梁  $a$  の一回当たりの補修工事費用  $f_a$  に関する制約条件

式 (9) を考える。

このモデルは、 $od$  間の逆需要関数を適切な関数形に設定することによって、Gurobi などのソフトウェアで求解可能な混合整数計画問題とすることができる。ただし、モデル内には管理者が正確な値を把握することが難しい  $E[s_a(t)]$ ,  $s_a(t)$  が含まれており、これらの変数に対して、管理者はシナリオを設定すると考える。ここでは、式 (12) 内の  $s_a(t)$  と式 (14) 中の  $E_{-\tau_a}[s_a(t)]$  は同様のシナリオを設定するものと考え、ともに Robust Counterpart に従って、 $E[s_a(t)]$ ,  $s_a(t)$  のシナリオを設定することを考える。

#### (4) Robust Counterpart

橋梁の健全度の予測値  $E[s_a(t)]$ ,  $s_a(t)$  を含む項は、他の操作変数や状態変数といった他の変数との積ではない一次の項として表されている。したがって、 $E[s_a(t)]$ ,  $s_a(t)$  のシナリオを決める問題は、 $\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$  を決める上記のモデルとは分離したサブ問題として定式化することができる。ここでは、真の健全度が、 $s_a(t) = s_a(-\tau_a) + \sum_{k=-\tau_a}^t u_a(k)$  に従って決まり、 $u_a(k)$  の正確な値は管理者にとって未知であることから  $u_a(k)$  に関する将来シナリオを策定することを考える。既存の研究にならい、 $u_a(t)$  を  $z_a(t) = (u_a(t) - \bar{u}_a) / \hat{u}_a$  に従って基準化した  $z_a(t)$  を考える。管理者が、目的関数式 (7) を最大化する上で、 $u_a(t)$  および  $z_a(t)$  の値が大きいくほど悪い状況にあるといえる。ロバスト最適化問題は、そのような悪い状況の中で最善の解を求めるような問題であり、Budget of Uncertainty を  $\Gamma(t)$  を制約条件としたときに、最も状況が悪くシナリオ  $\mathbf{z}$  決めるような次の最適化問題を考える。

$$\max_{\mathbf{z}} \sum_{k=0}^t \sum_{a=1}^N \hat{u}_a z_a(k) \quad (19)$$

subject to

$$\sum_{a=1}^N \sum_{k=0}^t z_a(k) \leq \Gamma(t) \quad (20)$$

$$\sum_{k=0}^t z_a(k) \leq t + \tau_a \quad \forall a \quad (21)$$

$$\Gamma(t) = \gamma \sum_{a=1}^N (t + \tau_a) \quad (22)$$

$$0 \leq z_a(k) \leq 1 \quad \forall a, \forall k \leq t \quad (23)$$

この問題は各  $t$  について求解することによって、それぞれの年ごとのシナリオ  $z_a(t)$  を求めることができる。目的関数を構成する項  $\hat{u}_a z_a(k)$  は、 $\hat{u}_a$  が大きいくほど、 $z_a(t)$  に大きな値を割り当てるような問題である。制約条件式 (20) は、Budget of Uncertainty が大きくなるほど、 $z_a(k)$  に大きな値を割り振ることができることを示している。ただし、 $z_a(k)$  は (21) に示す制約条件を満たし、等式が成立

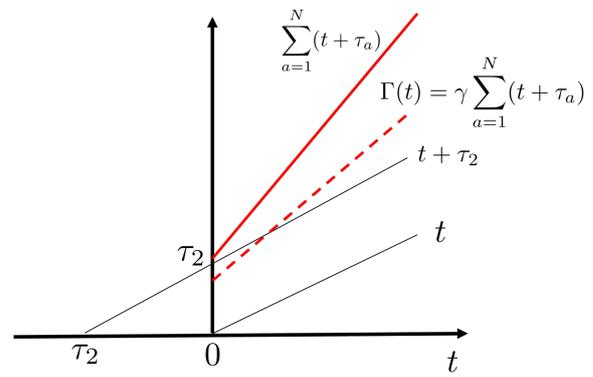


図-2 Robust Counterpart の制約条件

するのは、毎年、最悪の劣化が発生する場合  $z_{at} = 1$  である。(20) で考える Budget of Uncertainty は、式 (22) で示される。例えば、点検年が計画開始年の橋梁 1 ( $\tau_1 = 0$ ) と  $\tau_2 (> 0)$  年前の橋梁 2 の 2 橋がある場合を考える。それぞれの最悪シナリオは、 $t$  および  $t + \tau_2$  であり、 $t$  年における橋梁全体としての最悪シナリオは  $\sum_{a=1}^N (t + \tau_a)$  である (図-2 中の赤線)。係数  $\gamma$  は、その最悪シナリオの内、何割程度悪いシナリオを考えるのかを表すパラメータであり、図-2 中の赤い点線で表される ( $0 \leq \gamma \leq 1$ )。したがって、 $\gamma = 1$  と設定した場合には、全ての橋梁に最悪のシナリオを考えた場合、 $\gamma = 0$  と設定した場合には、 $z_a(t) = 0$  すなわち、 $u_a(t) = \bar{u}_t$  を考慮した場合に対応しており、 $\gamma = 1$  を大きくするほど、悲観的なシナリオを想定することに対応する。

### 3. まとめ

本研究では、橋梁の劣化に関する将来予測値の不確実性に対して頑健な補修計画を策定できるようなロバスト最適補修計画モデルを提案した。具体的には、道路ネットワークにおける需要変動型モデルを基礎として、橋梁の劣化や補修工事による交通容量の低下や迂回を考慮した補修計画モデルを定式化した。提案したモデルにおいては、計画開始時点での橋梁ごとの最新の点検結果を所与として、管理者が望む頑健性の水準に応じて、想定すべき将来の劣化シナリオを策定するようなサブ問題から算出した枠組みを用いる発表会では補修工事に利用可能な予算と頑健性とのトレードオフや、劣化の個体差が補修計画にもたらす影響に関する数値計算結果を報告させていただきたい。

謝辞： 本研究の一部は、内閣府総合科学技術・イノベーション会議の「SIP インフラ維持管理・更新・マネジメント技術」(管理法人: JST) によって実施されました。記して謝意を表します。

## 参考文献

- 1) 国土交通省：道路構造物の現状（橋梁）：2013.< [http :  
//www.mlit.go.jp/road/sisaku/yobohozen/yobo1\\_1.pdf](http://www.mlit.go.jp/road/sisaku/yobohozen/yobo1_1.pdf) >  
(accessed 2017.7.31)
- 2) 小池真登, 長井宏平:新潟市市町村における橋梁点検データをを用いた経年劣化傾向分析, コンクリート工学年次論文集, Vol.37, No.2, pp.1339-1344, 2015.
- 3) 吉田祥二, 稲村肇, 森知茂:首都高速道路の橋梁上部工における累積軸数と設計基準変遷による損傷発生特性分析, 土木計画学研究発表会・講演集, Vol.54,CD-ROM, 2016.
- 4) 全邦釘, 大窪和明, 浅本晋吾, 岡崎慎一郎:橋梁の劣化過程の地域性の解明と地域アセットマネジメント手法の提案, 土木計画学研究発表会・講演集, Vol.55,CD-ROM, 2017.
- 5) 貝戸清之, 小林潔司, マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定, 土木学会論文集 A, Vol. 63, N0.2, pp.336-355, 2007.
- 6) 全邦釘, 瀬戸大輔, 大賀水田生:確率分布表現されたマルコフ連鎖モデルによる劣化予測区間の導出とベイズ理論による個体劣化特性の反映, 土木学会論文集 A2, Vol.68, pp.771 - 781, 2012.
- 7) 青木一也, 山本浩司, 小林潔司:時間依存型劣化過程を有するシステムの集計的最適点検・補修モデル, 土木学会論文集 F, Vol.62, No.2, pp.240-257, 2006.
- 8) Hu, X., Daganzo, C., and Madanat, S.: A reliability-based optimization scheme for maintenance management in large-scale bridge networks. *Transportation Research Part C*, 55(C), 166178, 2015.
- 9) Soyster, A. L.: Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming, *Operations Research*, Vol.21, pp. 1154-1157, 1973.
- 10) Bertsimas, D. Thiele, A.: A Robust Optimization Approach to Inventory Theory, *Operations Research*, Vol.54, pp. 150-168, 2006.
- 11) Adida, E. Perakis, G.: A robust optimization approach to dynamic pricing and inventory control with no backorders, *Mathematical Programming*, Vol. 107, pp.97-129, 2006.
- 12) Adida, E. Perakis, G.: Dynamic pricing and inventory control: robust vs. stochastic uncertainty models-a computational study, *Annals of Operations Research*, Vol. 181, pp.125-157, 2010.
- 13) 松井寛 (編):交通ネットワークの均衡分析-最新の理論と解法-, 土木学会, 1998.

(平成 29 年 7 月 31 日 受付)