更新施策を考慮した道路照明柱の劣化予測

田中 誠勝[1]・水谷 大二郎[2]・貝戸 清之[3]

[1]学生会員　大阪大学大学院 工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail:m.tanaka@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[2]正会員　大阪大学特任研究員（常勤）　大学院工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail:d.mizutani@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[3]正会員　大阪大学准教授　大学院工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail:kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

道路照明柱の倒壊は利用者の安全性を著しく脅かす．そのため従来の事後的な補修・更新施策でなく，適切な劣化予測結果に基づく計画的な維持管理を道路照明柱に対しても行う必要がある．しかしながら，道路照明柱の統計的な劣化予測を行う場合，補修・更新履歴が記録されておらず，劣化の開始時点の不可観測性が問題となる場合も少なくない．本研究ではこの問題に対し，過去の更新の有無の不確実性を考慮するために，更新回数と更新時点を潜在変数として明示的に考慮した劣化予測モデルを提案する．その際，従来，照明柱に対して事後的な更新施策が採用されていたという部分的な情報を用いて，潜在変数の確率密度を定義することにより，モデル推定精度の向上を図る．提案した方法論を実在の道路照明柱の点検データに適用し，その維持管理に関する実証的示唆を行う．

Key Words : *asset management, road lighting pole, missing data, deterioration forecasting, replacement policy*

1.　はじめに

近年では，道路付属構造物の倒壊事故の発生が報告されている．このような事例は，利用者の安全性を大きく損なう可能性がある．そのため，現在の事後的な維持管理手法を見直し，道路付属構造物に対しても予防保全型の維持管理手法の提案やその実用化が必要であると考えられる．橋梁や高速道路等の大規模な社会基盤施設に対する維持管理手法の提案やその実用化は多くなされている一方で，維持管理手法が確立されてこなかった道路付属構造物に関しては，実際に記録として蓄積されてきた点検結果や更新履歴は乏しいのが現状となっており，道路付属構造物と同様の維持管理手法を適用することが難しい．

本研究では，この問題に対し，道路付属構造物の一つである照明柱を対象として，記録として蓄積されていない過去の更新の有無の不確実性を考慮するために，更新回数と更新時点を潜在変数として明示的に考慮した劣化予測モデルを提案する．その際，従来，照明柱に対して事後的な更新施策が採用されていたという部分的な情報を用いて，潜在変数の確率密度を定義することにより，モデル推定精度の向上を図る．さらに，提案した方法論を実在の道路照明柱の点検データに適用し，その維持管理に関する実証的示唆を行う．以下，**2.** で本研究の基本的な考え方を説明する．**3.** では，更新施策を考慮したモデルの定式化を行う．**4.** では，ベイズ推計を用いたモデルの推定手法について説明する．なお，実証分析に関しては，講演会当日に発表を行うこととする．

2.　本研究の基本的な考え方

(1)　既往研究の概要

社会基盤施設の劣化予測に関して，他段階の離散的な健全度判定を用いたマルコフ劣化ハザードモデル[1)]の数多くの採用実績があり，その中でもデータ欠損を考慮した，社会基盤施設の劣化予測に関する研究事例は数多くある．水谷等[2)]は施設の管理期間中における健全度の判定基準の変更を考慮した，隠れマルコフ劣化ハザードモデルを開発し，判定基準変更前後での点検データを総合的に用い推計精度の向上を計った．また，小林等[3)]は，社会基盤施設の健全度の測定結果に生じ得る多大な誤差である，システム誤差を考慮した，マルコフ推移確率の非集計的推計方法を開発している．しかしながら，本研究で取り上げる，過去の更新の不確実性を考慮した隠れマルコフ劣化ハザードモデルでは，より幅広いサンプルを扱う事が出来，精度の向上が期待できる．筆者等の知る限り，更新の不確実性を考慮した劣化予測モデルの開発を行った研究事例は他に見あたらない．

(2) 道路照明柱の維持管理

道路照明柱はかつて，事後的な維持管理施策をとっており，定期的な目視点検等の計画的な点検や維持管理は実施されておらず，日頃のパトロールの中で，照明柱の倒壊の危険性が極めて高いと判断された照明柱に対してのみ，補修や更新といった維持管理施策が実施されていたので，過去に実施された補修や更新の記録は蓄積されておらず，過去における直近の照明柱倒壊後に実施された緊急点検結果のみしか蓄積されていない（緊急点検とは，ある地方自治体の管轄化にある照明柱に対して，倒壊事案を受けて実施された目視点検）．従って，過去のどの時点において補修や更新が行われたのかが明確でない．上記の倒壊事案後の緊急点検により獲得されたサンプルからは，道路照明柱の劣化事象として，基部コンクリートの亀裂，交通事故による変形損傷，掘削部の孔食，基部の腐食をあげる事が出来るが，健全度判定に関しては，倒壊要因が照明柱基部の腐食によるものであったことから，主に照明柱基部の腐食に着目して実施された（健全度判定は 1 から 3 の三段階評価となっており，健全度判定 3 の照明柱が補修または更新対象となっている）．

本研究では緊急点検により獲得されたサンプルを用いて，過去の更新の有無を考慮した劣化予測モデルの定式化を行なう．さらに，従来では照明柱に対して事後的な更新施策が採用されていたという部分的な情報を用いて，潜在変数の確率密度を定義する事により，モデル推定精度の向上を図る．

(3) 更新施策を考慮した劣化予測モデル

本研究で提案する劣化予測モデルでは，過去の更新の有無の不確実性を考慮するために，更新回数と更新時点を潜在変数として明示的に考慮する．その際，更新が実施される直前の健全度判定を 3 と設定し，更新実施後に健全度が 1 に回復すると仮定している．

3. 照明柱の劣化モデルの定式化

(1) モデル化の前提条件

本研究では照明柱の劣化過程を，照明柱の健全性を表現する I 段階の離散的指標（以下，健全度と呼ぶ）$1,\cdots,I$ の推移を用いて記述する．ただし，健全度が大きくなるほど，劣化が進行している様子を表現する．すなわち，健全度の小さい値から大きい値への推移は，照明柱の劣化の進行を表現する．さらに，照明柱に対して，その供用開始時点を原点とする離散的時間軸を導入する．離散的時間軸上の点を時点と呼び，任意時点 τ_A における照明柱の健全度を状態変数 $h(\tau_A)$ を用いて表す．例えば，$h(\tau_A)=i\ (i=1,\cdots,I)$ であれば時点 τ_A における照明柱の健全度が i であることを表現する．

(2) マルコフ連鎖モデル

照明柱の劣化過程をマルコフ連鎖モデルに基いてモデル化する．照明柱の任意時点 τ_A における健全度 $h(\tau_A)$ が確率変数であるとする．この確率変数の時間的遷移（確率過程）を

$$\begin{aligned}&\mathrm{Prob}[h(t_{n+1})=i)|h(t_0),h(t_1),\cdots,h(t_n)]\\&=\mathrm{Prob}[h(t_{n+1})=i|h(t_n)]\end{aligned}\tag{1}$$

の関係が成立すると考える．すなわち，健全度の時間的推移を表現する確率過程が，マルコフ性（将来の健全度が現在の健全度のみに依存し，過去の健全度の推移の履歴とは無関係となる性質）をもつマルコフ過程であると考える．健全度の集合を表す状態空間は有限であるため，単位時間で健全度が任意の $i\ (=1,\cdots,I)$ から任意の $j\ (=1,\cdots,I)$ に推移する単位時間あたりのマルコフ推移確率を

$$\begin{aligned}&\mathrm{Prob}[h(t_{n+1})=i|h(t_n)=j]=\pi_{i,j}\\&(i=1,\cdots,I;\ j=1,\cdots,I)\end{aligned}\tag{2}$$

と表現する．さらに，(i,j) 成分がマルコフ推移確率 $\pi_{i,j}$ となる I 行 I 列のマルコフ推移確率行列を

$$\mathbf{\Pi}=\begin{pmatrix}\pi_{1,1} & \cdots & \pi_{1,I}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \pi_{I,1} & \cdots & \pi_{I,I}\end{pmatrix}\tag{3}$$

と定義できる．マルコフ推移確率 (2) は与件の単位時間における健全度間の推移確率を示したものであり，当然のことながら，対象とする時間間隔が異なれば推移確率の値は異なる．このような時間間隔を考慮したマルコフ推移確率に関しては，次項の **3.(3)** で詳細に議論するが，補修や更新が照明柱に対して実施されない限り，健全度の値が大きい値が推移する（照明柱の状態が回復する）ことは考えられないため，$\pi_{i,j}=0\ (j<i)$ が成立する．また，推移確率の定義より $\sum_{j=i}^{I}\pi_{i,j}=1$ が成立する．すなわち，マルコフ推移確率に関して，

$$\begin{cases}\pi_{i,j}\geq 0\ (i=1,\cdots,I;\ j=i,\cdots,I) & \text{(4a)}\\ \pi_{i,j}=0\ (i>j\ \text{のとき}) & \text{(4b)}\\ \displaystyle\sum_{j=i}^{I}\pi_{i,j}=1 & \text{(4c)}\end{cases}$$

が成立しなければならない．健全度 I はマルコフ連鎖における吸収状態であり，$\pi_{I,I}=1$ が成立すると考える．

(3) マルコフ推移確率の定式化

マルコフ推移確率をハザードモデルに基いて定式化する．いま，照明柱の健全度 $i\ (i=1,\cdots,I-1)$ の寿命（健全度が i に達した時点から健全度が $i+1$ に推移する時点までの期間）を確率変数 ζ_i で表す．健全度 i の

寿命 ζ_i が，確率密度関数 $\phi_i(\zeta_i)$，分布関数 $\Phi_i(\zeta_i)$ に従うと考える．ある時点 τ_A において照明柱の健全度が i であり，そこから時間 y_i が経過した時点で健全度 $i+1$ に到達する確率密度をハザード関数 [4),5)] を用いて表現する．ハザード関数 $\lambda_i(y_i)$ は，照明柱の健全度が i に達した時点から時間 y_i が経過するまで健全度 i の状態が継続したという条件の下で，微小期間 $[y_i, y_i+\Delta y_i)$ 中に健全度 $i+1$ に進展する条件付き確率となる．すなわち，時間 y_i まで健全度が i のまま継続する生存確率 $\tilde{\Phi}_i(y_i)$ $(=1-\Phi_i(y_i))$ を用いて，

$$\lambda_i(y_i)\Delta y_i = \frac{\phi_i(y_i)\Delta y_i}{\tilde{\Phi}_i(y_i)} \tag{5}$$

と表せる．ハザード関数がサンプル時間軸上の時点 y_i に依存せず，常に一定値 $\theta_i > 0 (i=1,\cdots,I-1)$ をとる場合，指数ハザード関数を

$$\lambda_i(y_i) = \theta_i \qquad (i=1,\cdots,I-1) \tag{6}$$

と表現する．指数ハザード関数を用いることにより，劣化過程が過去の履歴に依存しないというマルコフ性を表現できる．さらに，ハザード関数 θ_i $(i=1,\cdots,I-1)$ が照明柱の構造条件や環境条件に依存して変化すると考え，具体的なハザード関数を

$$\theta_i = \exp(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta}_i') \qquad (i=1,\cdots,I-1) \tag{7}$$

と定義する．記号「$'$」は転置操作を表す．また，$\boldsymbol{x} = (x_0,\cdots,x_A)$ は特性変数ベクトル，$\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{0,i},\cdots,\beta_{A,i})$ は各特性変数がハザード関数 θ_i へ及ぼす影響の度合いを表現する未知パラメータベクトルである．I は特性変数の数を表す．なお，$x_0\beta_{0,i}$ は定数項を表すとし，$x_0=1$ とする．式 (7) により，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{I-1})$ の関数としてマルコフ推移確率を表現することができ，照明柱の構造条件や環境条件が劣化過程に及ぼす影響を定量化できる．

さらに，指数ハザード関数を用いれば，健全度 i の寿命が y_i 以上となる確率 $\tilde{\Phi}_i(y_i)$ は，

$$\tilde{\Phi}_i(y_i) = \exp(-\theta_i y_i) \qquad (i=1,\cdots,I-1) \tag{8}$$

と表現できる．

サンプル時間軸上の τ_A で，健全度が i であり，かつ時点 τ_A から追加的に z (≥ 0) 以上にわたって健全度 i が継続する確率 $\tilde{\Phi}_i(\tau_A+z|\zeta_i \geq \tau_A)$ は，

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Phi}_i(\tau_A+z|\zeta_i \geq \tau_A) \\
&= \mathrm{Prob}\left[\zeta_i \geq \tau_A+z|\zeta_i \geq \tau_A\right] \\
&= \frac{\exp\{-\theta_i(\tau_A+z)\}}{\exp(-\theta_i\tau_A)} \\
&= \exp(-\theta_i z) \\
&(i=1,\cdots,I-1)
\end{aligned} \tag{9}$$

と表される．すなわち，時点 τ_A において健全度が i であり，時点 $\tau_B = \tau_A+z$ においても健全度が i と判定される確率は，

$$\mathrm{Prob}\left[h(\tau_B)=i|h(\tau_A)=i\right] = \exp(-\theta_i z) \qquad (i=1,\cdots,I-1) \tag{10}$$

となる．確率 $\mathrm{Prob}[h(\tau_B)=i|h(\tau_A)=i]$ はマルコフ推移確率 $\pi_{i,i}(z|\boldsymbol{\beta})$ に他ならない．指数ハザードモデルを用いた場合，推移確率 $\pi_{i,i}(z|\boldsymbol{\beta})$ はハザード関数 θ_i と時間間隔 z のみに依存し，時点 τ_A，時点 τ_B に関する情報を用いなくとも推移確率を推計することが可能となる．以上の議論を拡張し，指数ハザード関数を用いて，時点 τ_A と時点 $\tau_B = \tau_A + z$ の間で健全度が i から j $(>i)$ に推移するマルコフ推移確率 $\pi_{i,j}(z|\boldsymbol{\beta})$ $(i=1,\cdots,I-1; j=i,\cdots,I)$ は，

$$\begin{aligned}
&\pi_{i,j}(z|\boldsymbol{\beta}) = \mathrm{Prob}\left[h(\tau_B)=j|h(\tau_A)=i\right] \\
&= \sum_{k=i}^{j}\prod_{m=i}^{k-1}\frac{\theta_m}{\theta_m-\theta_k}\prod_{m=k}^{j-1}\frac{\theta_m}{\theta_{m+1}-\theta_k}\exp(-\theta_k z) \\
&(i=1,\cdots,I-1;\ j=i+1,\cdots,I)
\end{aligned} \tag{11}$$

と表すことができる [1)]．ただし，表記上の規則として，

$$\begin{cases}
\displaystyle\prod_{m=i}^{k-1}\frac{\theta_m}{\theta_m-\theta_k} = 1 & (\text{k=i のとき}) \quad (12a) \\
\displaystyle\prod_{m=k}^{j-1}\frac{\theta_m}{\theta_{m+1}-\theta_k} = 1 & (\text{k=j のとき}) \quad (12b)
\end{cases}$$

が成立すると考える．さらに，表記の便宜上，

$$\begin{aligned}
&\prod_{m=i,\neq k}^{j-1}\frac{\theta_m}{\theta_m-\theta_k}\exp(-\theta_k z) \\
&= \prod_{m=i}^{k-1}\frac{\theta_m}{\theta_m-\theta_k}\prod_{m=k}^{j-1}\frac{\theta_m}{\theta_{m+1}-\theta_k}\exp(-\theta_k z)
\end{aligned} \tag{13}$$

と簡略化する．また，$\pi_{i,I}$ に関しては，マルコフ推移確率の条件より次式で表せる．

$$\pi_{i,I}(z|\boldsymbol{\beta}) = 1 - \sum_{j=i}^{I-1}\pi_{i,j}(z|\boldsymbol{\beta}) \qquad (i=1,\cdots,I-1) \tag{14}$$

4. 補修施策を考慮したモデル推定

(1) MCMC 法を用いたベイズ推定

提案したモデルのパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ および照明柱の更新時点を同時推定するために，本研究ではベイズ推定法を援用した推定手法を構築する．ベイズ推定法においては，ベイズの定理を援用することにより，パラメータの真の値の確率分布（事後確率分布）を推定する．ベイズの定理から，パラメータの事後確率分布は，情報が無いときのパラメータの確率分布（事前確率分布）およびデータが得られる確率（尤度関数）の積に比例する．よって，パラメータの事後確率分布を推定するためには，事前確率分布および尤度関数を設定する必要がある．

本研究では，モデルの全パラメータの事前確率分布に無情報事前分布を設定することにより，推定するパラメータの事後確率分布の客観性を担保する．具体的には，確率分布の変数変換を行っても，少なくとも尤度がある程度存在する範囲においては一様性を確率分布が保つようにするために，部分的な一様分布を設定する．Jeffreys はフィッシャーの情報量の平方根に比例するように定めることで，このような局所一様分布が得られることを示している．

尤度関数の定式化に関しては次項の **4.(2)** で詳述する．一方で，事後確率分布は非常に複雑になることが多いため，それに基づいた議論や考察をすることが難しくなるといった欠点が存在する．このような問題を解決するために，1) 事前確率分布に事後確率分布と自然共役な関係にある確率分布を設定する，2) 事後確率分布に従う確率標本を発生させ，確率分分布を表現するといった手法が一般的に用いられる．本研究では，MCMC 法を援用し，後者 2) の手法に基いて，パラメータの事後確率分布を推定する．

(2) 尤度関数

照明柱の健全度を記録した点検データ（時系列データ）の尤度関数を定式化する．いま，P 個の照明柱に関する点検データを対象とし，個々の照明柱それぞれに番号：$1,\cdots,P$ を付与する．

ここで，任意の照明柱 $p\,(=1,\cdots,P)$ に着目する．照明柱 p の劣化速度を説明する構造条件や環境条件等の複数の説明変数を $\bar{x}_{p,1},\cdots,\bar{x}_{p,A}$ とする．ただし，定数項を表現するために，$\bar{x}_{p,0}=1$ が成立する $\bar{x}_{p,0}$ を導入し，照明柱 p の説明変数ベクトルを $\bar{\boldsymbol{x}}_p=(\bar{x}_{p,0},\bar{x}_{p,1},\cdots,\bar{x}_{p,A})$ と定義する．なお，点検データから直接的に把握することが可能な情報を表現する文字には，そのことを明確に示すために，記号「¯」を付している．

当該照明柱 p がその供用開始時点 $\bar{t}_{p,0}$ から最新の点検データの獲得時点 $\bar{t}_{p,K}$ までに経験している更新回数，および，それぞれが実施された時点は不明であるが，当該照明柱 p が最新の点検データの獲得時点までに経験している更新回数を R_p，更新時点をそれぞれ $\tilde{\xi}_{p,1},\cdots,\tilde{\xi}_{p,R}$ とする．ただし，ここでの更新時点 $\tilde{\xi}_{p,1},\cdots,\tilde{\xi}_{p,R}$ は，照明柱 p の供用開始時点 $\bar{t}_{p,0}$ を原点とする時間軸上での時点を表現する．なお，点検データから直接的に把握することが不可能な情報を表現する文字には，そのことを明確に示すために，記号「˜」を付している．供用開始から任意の更新回数 $r\,(=1,\cdots,R_p)$ を経験している期間 $[\tilde{\xi}_{p,r},\tilde{\xi}_{p,r+1})$ $(r=1,\cdots,R_p-1)$ を照明柱 p の第 $r+1$ 回目のライフサイクル期間と定義する．ただし，第 1 回目のライフサイクル期間を期間 $[\bar{t}_{p,0},\tilde{\xi}_{p,1})$ と定義し，第 R_p+1 回目のライフサイクル期間を $[\tilde{\xi}_{p,R},\bar{t}_{p,K})$ と定義する．

また，当該照明柱 p に関して記録されている点検結果（時間的に離散的な点検結果）の回数を K_p 回とする．点検データを時系列に並べ，過去の点検から順に番号：$1,\cdots,K_p$ を付与する．任意の第 $r\,(=1,\cdots,R_p+1)$ 回目のライフサイクル期間内に獲得されている点検データを $s_{p,r},\cdots,s_{p,r+1}$ と定義する．

任意の点検データ $k_p(\ =1,\cdots,K_p)$ には，1) 点検実施時点 $\bar{t}_{p,k}$，2) 照明柱の状態を表現する I 段階の離散的指標（以下，健全度と呼ぶ）$\bar{i}_{p,k}$，といった情報が内包される．

照明柱 p に関する点検データの尤度関数 $\ell_p(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}}_p)$ は，各回の点検データが独立に生起していると考え，それらの同時確率を計算することにより定義できる．よって，式 (11) を用いて，

$$
\begin{aligned}
&\ell_p(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}}_p)\\
&=\prod_{r=1}^{R_p+1}\Biggl\{\int_{\bar{\tau}_{p,s-1,1}}^{\bar{\tau}_{p,s,M}}\pi_{\bar{j}_{p,s,m},\bar{j}_{p,s,m+1}}(\bar{\tau}_{p,s,1}-\tilde{\xi}_{p,r},\\
&\quad\bar{\boldsymbol{x}}_p|\boldsymbol{\beta})\mathrm{d}\tilde{\xi}_{p,r}\cdot\prod_{m=1}^{M_{p,s}-1}\pi_{\bar{j}_{p,s,m},\bar{j}_{p,s,m+1}}(\bar{z}_{p,s,m},\bar{\boldsymbol{x}}_p|\boldsymbol{\beta})\Biggr\}\\
&\quad(p=1,\cdots,P)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

となる．ここに，$\bar{z}_{p,s,m}$ は連続する 2 点検 k と $k+1$ の間の時間間隔を表し，$\bar{z}_{p,s,m}=\bar{\tau}_{p,s,m+1}-\bar{\tau}_{p,s,m}$ とする．なお，$\bar{\boldsymbol{\Xi}}_p$ $(p=1,\cdots,P)$ は，当該照明柱 p の尤度関数を定義するために必要な点検データセットを表し，具体的に $\bar{\boldsymbol{\Xi}}_p=(\bar{\boldsymbol{t}}_p,\bar{\boldsymbol{i}}_p,\bar{\boldsymbol{x}}_p)$ で構成される．ここに，$\bar{\boldsymbol{t}}_p=(\bar{t}_{p,1},\cdots,\bar{t}_{p,K_p})$，$\bar{\boldsymbol{i}}_p=(\bar{i}_{p,1},\cdots,\bar{i}_{p,K_p})$ とする．

点検データ全体の尤度関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\Xi}})$ は，対象とする全 P 個の照明柱において獲得されている点検データが独立に生起していると考え，それらの同時確率を計算す

ることにより定義できる．よって，式 (15) を用いて，

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}|\bar{\Xi}) = \prod_{p=1}^{P} \ell_p(\boldsymbol{\beta}|\bar{\Xi}_p) \tag{16}$$

となる．ここに，$\bar{\Xi}$ は尤度関数 (16) を定義するために必要な点検データセットを表し，具体的に $\bar{\Xi} = (\bar{\Xi}_1, \cdots, \bar{\Xi}_P)$ で構成される．

(3) 尤度関数の完備化操作

尤度関数 (16) は，未知パラメータ $\boldsymbol{\beta}$ に関して高次の非線形多項式であり，複素解を含む多くの最適解を有しているために，最尤推定法を用いて未知パラメータの最尤推定値を求めることは非常に困難である [6),7)]．最尤推定法の代わりにベイズ推定法を用いれば，高次の非線形最適化問題を解くことを回避できるが，尤度関数 (16) が非常に多くの項で構成され，計算量が膨大になってしまう欠点がある [6)−8)]．このような計算上の問題を克服するために，尤度関数の完備化操作が必要になる．

ここで，任意の照明柱 $p\ (=1, \cdots, P)$ に着目する．尤度関数 (16) を完備化操作するために，照明柱 $p\ (=1, \cdots, P)$ の第 r $(1, \cdots, R_p)$ 回目の更新時点が $\tilde{\xi}_{p,r}$ であると考える．なお，潜在変数を表す文字には，そのことを明確に示すために，記号「˜」を付している．このとき，部分尤度関数 (15) を完備化操作した尤度関数（以下，完備化尤度関数と呼ぶ）は，

$$\begin{aligned}
&\tilde{\ell}_p(\boldsymbol{\beta}|\bar{\Xi}_p) \\
&= \prod_{r=1}^{R_p+1} \Big\{ \pi_{\bar{j}_{p,s,m}, \bar{j}_{p,s,m+1}}(\bar{\tau}_{p,s,1} - \tilde{\xi}_{p,r}, \bar{\boldsymbol{x}}_p|\boldsymbol{\beta}) \\
&\cdot \prod_{m=1}^{M_{p,s}-1} \pi_{\bar{j}_{p,s,m}, \bar{j}_{p,s,m+1}}(\bar{z}_{p,s,m}, \bar{\boldsymbol{x}}_p|\boldsymbol{\beta}) \Big\} \\
&(p = 1, \cdots, P)
\end{aligned} \tag{17}$$

と定義できる．同様にして，照明柱 p の全ての更新時点 $\tilde{\xi}_{p,1}, \cdots, \tilde{\xi}_{p,R} (= \tilde{\boldsymbol{\xi}}_p)$ を設定し，部分完備化尤度関数 $\tilde{\ell}'_{d,A'_d+1}, \cdots, \tilde{\ell}'_{d,A_d}$ を定義することができる．さらに，分析対象とする全ての照明柱においても同様に部分完備化尤度関数を定義できる．よって，点検データ全体に関する完備化尤度関数は，式 (17) を用いて，

$$\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\beta}|\bar{\Xi}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \prod_{p=1}^{P} \tilde{\ell}_p(\boldsymbol{\beta}|\bar{\Xi}_p) \tag{18}$$

と定義できる．ただし，$\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ は潜在変数ベクトルを表し，具体的に $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = (\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{\xi}}_P)$ で構成される．完備化尤度関数 (18) は通常の尤度関数 (16) よりも大幅に簡略化されている．ただし，完備化尤度関数 (18) を構成する潜在変数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ は観測できない変数である．そこで，この潜在変数ベクトルに関する全条件付き事後確率分布を，完備化尤度関数 (18) をもとに導出する．照明柱 p の第 r 回目の更新時点 $\xi_{p,r}$ は，期間 $[\bar{t}_{p,r-1,M}, \bar{t}_{p,r,1}]$ に存在するため，

$$\bar{t}_{p,r-1,M} < \xi_{p,r} < \bar{t}_{p,r,1} \tag{19}$$

を満足する．したがって，照明柱 p の第 r 回目の更新時点 $\xi_{p,r}$ が $\tilde{\xi}_{p,r}$ である確率を表現する全条件付き事後確率分布は，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}\left[\xi_{p,r} = \tilde{\xi}_{p,r}|\boldsymbol{\beta}, \bar{\Xi}_p\right] \\
&= \frac{\tilde{\ell}_{p,r}(\boldsymbol{\beta}|\bar{\Xi}_p, \tilde{\xi}_{p,r})}{\int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \tilde{\ell}_{p,r}(\boldsymbol{\beta}|\bar{\Xi}_p, \xi_{p,r}) d\xi_{p,r}}
\end{aligned} \tag{20}$$

となる．全条件付き事後確率分布 (20) は，未知パラメータ $\boldsymbol{\beta}$ で構成されるため，潜在変数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ の全条件付き事後確率分布を先験的に求めることは不可能である．そこで，MCMC 法を用いて，未知パラメータ $\boldsymbol{\beta}$ の確率標本と潜在変数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ の確率標本とを反復的にランダム発生させることにより，未知パラメータを推定する．このような手続きを用いて推定した未知パラメータのベイズ推定値が，尤度関数 (16) のみを用いて推定した未知パラメータの最尤推定値に収束することが証明されている [9)]．

5. おわりに

本研究では，近年まで事後保全型の維持管理施策が実施されており，さらに過去の点検および補修・更新履歴が記録されていない道路照明柱を対象とした劣化予測モデルの開発を行なった．具体的には，過去の更新回数と更新時点を潜在変数として明示的に考慮した劣化予測モデルを提案した．その際，従来では道路照明柱に対して事後的な更新施策が採用されていたという部分的な情報を用いて，潜在変数の確率密度を定義することによりモデル推定精度の向上を図った．

一方で，今後に残された課題がいくつか存在する．第 1 に，適用事例の拡大があげられる．本研究の実証分析では，提案した方法論の限られた単一の対象区間における道路照明柱への適用を試みたにすぎず，本研究の適用事例で得られた知見は，対象とした道路照明柱でのみ適用可能である．今後，点検記録の蓄積や本研究で提案したモデルの実フィールドへの適用事例の拡大を通して，照明柱の更新手法を逐次改善するとともに，道路照明柱の劣化予測モデルの推定精度をより向上させる努力や，照明柱の劣化機構に関して物理的な考察や定義が必要である．第 2 に，本研究では，劣化過程の分析を行ったが，社会的により価値を見出すためにも，本研究の分析結果に基づいた道路照明柱のライフサイクル費用分析を行うことが必要となる．

なお，実証分析に関しては，第 56 回土木計画学発表会・秋大会にて当日発表予定である．

参考文献

1) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.69-82，2005.10
2) 水谷大二郎，貝戸清之，小林潔司，秀島栄三，山田洋太，平川恵士：判定基準を考慮した隠れマルコフ劣化ハザードモデル，土木学会論文集 D3，Vol.71，No.2，pp.70-89，2015.8
3) 小林潔司，貝戸清之，林秀和：測定誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデル，土木学会論文集 D，Vol.64，No.3，pp.493-512，2008.9
4) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
5) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
6) 和合肇：ベイズ計量経済分析，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用，東洋経済新聞社，2005.
7) 伊庭幸人ほか：計算統計 2 マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺 (統計科学のフロンティア 12)，岩波書店，2005.
8) Titterington, D. M., Smith, A. F. M. and Markov, U. E.: *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, John Wiley & Sons, 1985.
9) Diebolt, J. and Robert, C. P.: Estimation of finite mixture distributions through Bayesian sampling, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol.56, pp.363-375, 1994.

(2017. 7. 31 受付)

DETERIORATION FORECASTING OF ROAD LIGHTING POLES CONSIDERING REPLACEMENT POLICY

Masakatsu TANAKA, Daijiro MIZUTANI and Kiyoyuki KAITO