

交通流のダイナミック流体モデルを用いた 道路凸部の定常密度分布に関する一考察

細田 尚¹・前原 耀太²・白井 秀和³

¹フェロー会員 京都大学大学院教授 都市社会工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂C1-3)

E-mail: hosoda.takashi.4w@kyoto-u.ac.jp

²学生会員 京都大学大学院工学研究科修士課程 都市社会工学専攻

(〒615-8540 京都市西京区京都大学桂C1-3) E-mail: maehara.youta.48n@st.kyoto-u.ac.jp

³正会員 三洋テクノマリン(株) (〒103-0012 東京都中央区日本橋堀留町1-3-17)

E-mail: shirai.hidekazu.28w@gmail.com

本研究は、交通流のダイナミック流体モデルと開水路流れの基礎式の類似性に着目して、水面形解析法等の水理学的手法の交通流への適用可能性について検討したものである。ダイナミック流体モデルとしてペイン・モデルを基本モデルとして考え、定常状態を仮定すると開水路流れの水面形方程式と同等の交通流の密度分布方程式を導くことができる。これまでにこの密度分布方程式を用いて、等流密度が二つ存在すること、二つの等流密度と限界密度の大小関係により空間分布パターンを三通りに分類できること、限界密度においてフルード数と等価の無次元パラメータが1となること等を指摘した。本研究ではさらに、路床に凹凸がある場合の水面形解析法との類似性に基づき、道路勾配の効果を考慮した密度分布方程式を用いて常微分方程式の特異点解析を含んだ定常密度分布を計算する一連の手順を示すと同時に、上り勾配区間で交通渋滞が発生するメカニズムについて検討する。

Key Words: traffic flow analysis, Payne model, steady density profile, jamming transition

1. はじめに

本研究は、交通流のダイナミック流体モデルと開水路流れの基礎式の類似性に着目して、水面形解析法等の水理学的手法の交通流への適用可能性について検討したものである。ダイナミック流体モデルとしてマイクロ・シミュレーションモデル¹⁾の第一近似と考えられているPayneモデル²⁾を基本モデルとして考え、定常状態を仮定すると開水路流れの水面形方程式と同等の交通流の密度分布方程式を導くことができる。これまでにこの密度分布方程式を用いて、等流密度が二つ存在すること、二つの等流密度と限界密度の大小関係により分布パターンを三通りに分類できること、限界密度においてフルード数と等価の無次元パラメータが1となること等を指摘した。本研究ではさらに、路床に凹凸がある場合の水面形解析法³⁾との類似性に基づき、道路勾配の効果を考慮した密度分布方程式を用いて、常微分方程式の特異点解析を含んだ定常密度分布を計算する一連の手順について検討する。まず、路床に凹凸がある場合の水面形解析と同

様に、限界密度分布と擬似等流密度分布を描き、その交点として定義される特異点の分類を行う。特異点の一つが鞍形点に分類されることを示し、鞍形点から上下流方向に密度分布を追跡することができることを示す。最後に、上流端からの密度分布と鞍形点から上流側に追跡された密度分布が衝撃条件を満たす点で不連続に接続される可能性があることを示す。

2. ダイナミック流体モデルの基礎式と基本特性

ダイナミック・モデルの基礎式は交通流密度の保存則(1)と運動方程式(2)から構成される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{T} (U(\rho) - u) - \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2)$$

ここに、 t : 時間, x : 空間座標, ρ : 車の平均密度, u : 車の平均速度, T : ドライバーの反応時間に相当する定数, a : 反応時間と密度に依存した定数 (圧縮性

流体の音速に対応) , $U(\rho)$: 最適速度関数である. また, a と T は以下の式で関係づけられる.

$$a^2 = -\frac{1}{2T} \frac{\partial U}{\partial \rho} > 0$$

運動方程式(2)の左辺は, 追従モデル(マイクロ・シミュレーションモデル)の加速度項(慣性項)に対応しており, 右辺の密度勾配項とともに追従モデルの一つである Newellモデル¹⁾から導くことができる. 交通工学でよく用いられてきた Lighthill-Whithamモデル⁴⁾は式(2)中の左辺と右辺の密度勾配項を無視した場合であり, キネマティック・モデルと呼ばれる. これは, 河川洪水流のダイナミック・ウェーブモデルとキネマティック・ウェーブモデルの関係に対応している.

簡単のため最適速度関数として式(3)で与えられる Greenshieldsの式を用いる. 定常状態を考えると, 質量保存則は流量一定の連続式(4)となる.

$$U(\rho) = u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \quad (3)$$

$$\frac{d\rho u}{dx} = 0, \rho u = q = \text{const.} \quad (4)$$

これらの関係式を用いて式(2)を変形すると, 定常交通流の空間密度分布方程式(5)が得られる⁵⁾.

$$\frac{d\rho}{dx} \left(a^2 - \frac{q^2}{\rho^2} \right) = \frac{1}{T} \left(u_{\max} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) - q \right) \quad (5)$$

式(5)において右辺=0とおいた関係式が等流密度の関係式(6)であり, 左辺の括弧=0とおいた関係式が限界密度の関係式(7)である. 力学的な意味は水理学の水面形方程式の場合と同様である. 次式で定義される等流密度, 限界密度を用いると空間密度方程式は式(8)となる.

$$\frac{\rho_{0\pm}}{\rho_{\max}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{\rho_{\max} u_{\max}}}}{2} \quad (6)$$

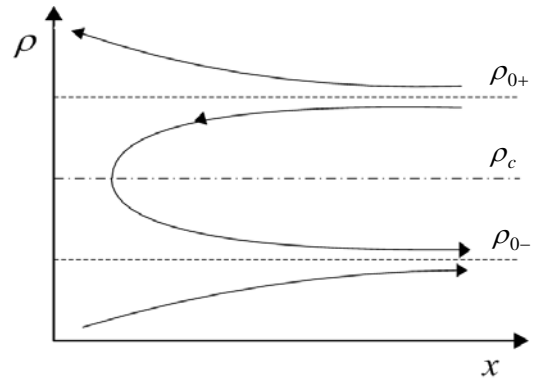
$$a^2 - \frac{q^2}{\rho_c^2} = 0, \rho_c = \frac{q}{a} \quad (7)$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{-\frac{\rho_{\max} u_{\max}}{T} \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} - \left(\frac{\rho_{0+}}{\rho_{\max}} \right) \right) \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} - \left(\frac{\rho_{0-}}{\rho_{\max}} \right) \right)}{a^2 \left(1 - \frac{\rho_c^2}{\rho^2} \right)} \quad (8)$$

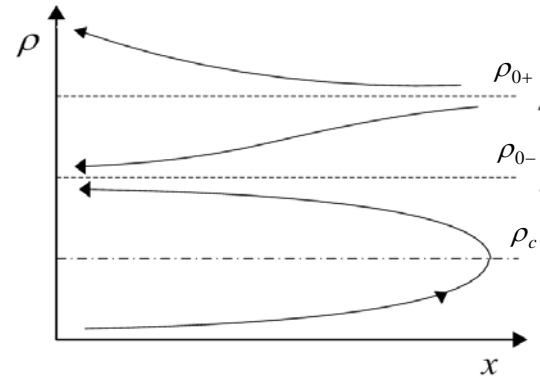
等流密度と限界密度の大小関係から式(8)の解のパターンの一例を示せば図-1のようになる.

3. 道路の勾配を考慮した定常密度分布解析法

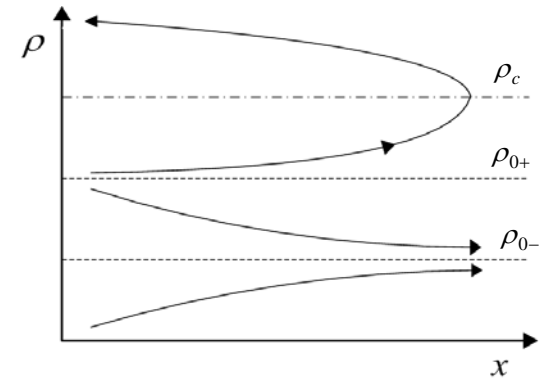
ダイナミックモデルの中に道路勾配の効果を考慮する



(a) $\rho_{0-} < \rho_c < \rho_{0+}$



(b) $\rho_c < \rho_{0-} < \rho_{0+}$



(c) $\rho_{0-} < \rho_{0+} < \rho_c$

図-1 定常空間密度分布の三パターン

方法として, 平衡速度式(1)に道路の縦断勾配を考慮することが考えられる. 一例を式(9)に示した.

$$U(\rho) = u_{\max} \left(1 - S \frac{dy_b}{dx} \right) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \quad (9)$$

式(9)を用いて式(8)と同様の定常密度分布式を記述すると式(10)となる.

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{\frac{1}{T} \left[\rho_{\max} u_{\max} \left(1 - S \frac{dy_b}{dx} \right) \left\{ \frac{\rho}{\rho_{\max}} - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^2 \right\} - q \right]}{a^2 - \frac{q^2}{\rho^2}} \quad (10)$$

ここに、 S は定数である。

式(10)の分子=0となる密度を水面形解析と同様に擬似等流密度と呼ぶことにする。条件によっては分母=0の分布形と分子=0の分布形が交差する場合がある。このように式(10)右辺の分子と分母が同時にゼロとなる点は特異点と呼ばれ、その点では限界水深を過ぎる有限な密度勾配が存在する。

擬似等流密度を ρ_n とおくと、 ρ_n は次式で計算することができる。

$$\frac{\rho_{n\pm}}{\rho_{\max}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{\rho_{\max} u_{\max} (1 - S dy_b / dx)}}}{2} \quad (11)$$

実際に道路の縦断勾配を考慮して密度分布の計算を行ってみよう。本研究では式(12)を用いて道路の標高を与えた。標高の縦断分布形を図-2に示した。

$$y_b = \frac{\delta_b}{2} \left\{ 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right\}, \quad \frac{dy_b}{dx} = -\frac{\pi \delta_b}{2L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (12)$$

ここに、 δ_b は原点の道路の標高、 L は標高の変化が始まる原点からの距離。

以下のように定数を設定して計算した限界密度と擬似等流密度分布を図-3に示した。

$$\rho_{\max} = 0.25 \text{ (台/m)}, \quad u_{\max} = 30 \text{ (m/sec.)}, \quad a = 15 \text{ (m/sec.)}, \\ q = 1.0 \text{ (台/sec.)}, \quad S = 7.5$$

ρ_{n-} と ρ_c の空間分布には交点が二つ、すなわち特異点が二つ存在している。特異点近傍の解の特性を検討するために、密度 ρ と x を特異点での値とそれからの微小な偏差の和として表し、式(10)に代入後線形化する。式(10)の線形化方程式を式(13)に示した。さらに、特異点位置での密度勾配を式(13)にロピタルの定理を適用して計算すると式(14)になる。

以上の結果を用いて特異点を分類すると、上流側は結節点、原点に近い下流側は鞍形点に分類された。

水面形解析と同様に下流側の鞍形点位置での密度勾配を式(14)を用いて計算し、鞍形点から上流方向、下流方向に

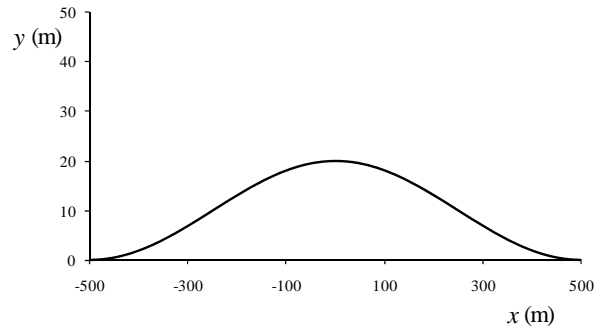


図-2 道路標高の縦断分布形

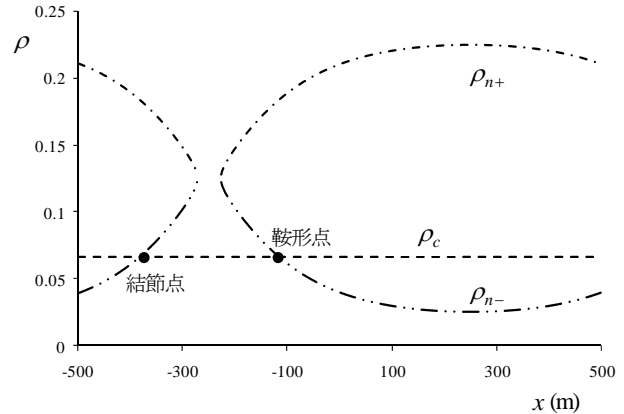


図-3 擬似等流密度と限界密度および特異点の分類

それぞれ空間密度を追跡した結果が図-4 である。

鞍形点から上流側に計算された密度分布は極大値をとった後、上流側の結節点に吸収されていくことが分かる。一方、限界密度より小さい密度（すなわちSuper-criticalな状態、水面形解析では射流状態に対応）で上流端から出発した密度分布も結節点に吸収されていっている。水面形解析の場合このような状況は現実に存在せず、結節点近傍で跳水が発生することが知られている。交通流の場合このような密度の遷移が発生しうるのでどうか現在のところ不明であり今後解明する必要がある。

上流端密度をさらに小さくして計算すると、結節点に吸収されずに限界密度に到達する密度分布が得られる。この場合は、水面形解析と同様に下流側の密度分布に不連続に接続する(跳水に対応)と考えられる。

$$\frac{d\rho'}{dx'} = \frac{\frac{1}{T} \left[\rho_{\max} u_{\max} \left\{ 1 + \frac{\pi S \delta_b}{2L} \sin\left(\frac{\pi x_s}{L}\right) \right\} \left(\frac{1}{\rho_{\max}} - \frac{2\rho_s}{\rho_{\max}^2} \right) \rho' + \rho_{\max} u_{\max} \frac{\pi^2 S \delta_b}{2L^2} \cos\left(\frac{\pi x_s}{L}\right) \left\{ \frac{\rho_s}{\rho_{\max}} - \left(\frac{\rho_s}{\rho_{\max}} \right)^2 \right\} x' \right]}{\frac{2q^2}{\rho_s^3} \rho'} \quad (13)$$

$$\frac{d\rho'}{dx'} \Big|_s \rightarrow \frac{\rho_{\max} u_{\max} \left\{ 1 + \frac{\pi S \delta_b}{2L} \sin\left(\frac{\pi x_s}{L}\right) \right\} \left(\frac{1}{\rho_{\max}} - \frac{2\rho_s}{\rho_{\max}^2} \right) \pm \sqrt{\left[\rho_{\max} u_{\max} \left\{ 1 + \frac{\pi S \delta_b}{2L} \sin\left(\frac{\pi x_s}{L}\right) \right\} \left(\frac{1}{\rho_{\max}} - \frac{2\rho_s}{\rho_{\max}^2} \right) \right]^2 + \frac{8q^2 T}{\rho_s^3} \rho_{\max} u_{\max} \frac{\pi^2 S \delta_b}{2L^2} \cos\left(\frac{\pi x_s}{L}\right) \left\{ \frac{\rho_s}{\rho_{\max}} - \left(\frac{\rho_s}{\rho_{\max}} \right)^2 \right\} T}}{\frac{4q^2 T}{\rho_s^3}} \quad (14)$$

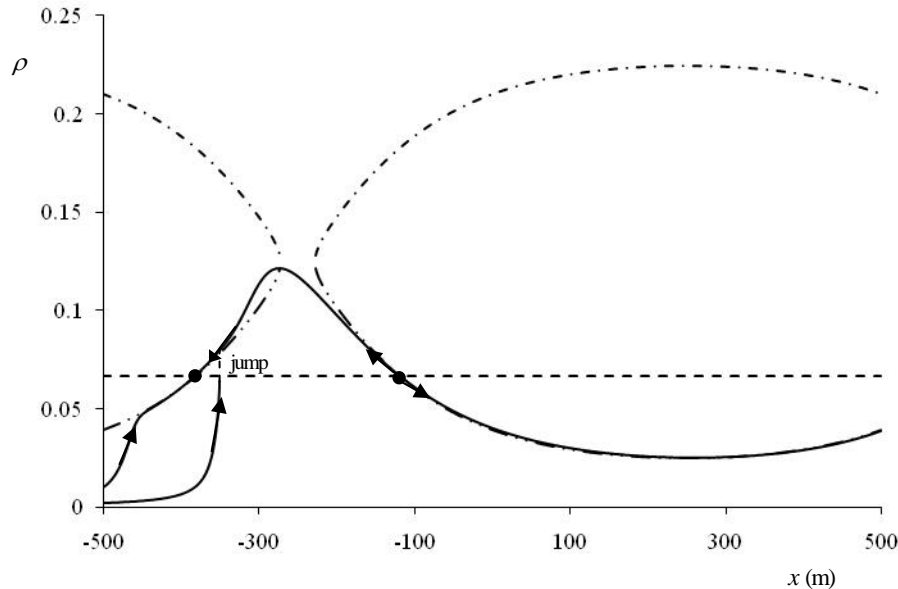


図-4 定常密度分布の追跡結果

4. おわりに

本研究は、交通流のダイナミック流体モデルに基づいて道路勾配の効果を検討した密度分布方程式を導くとともに、常微分方程式の特異点解析を含んだ定常密度分布を計算する一連の手順について検討した。限界密度と擬似等流密度の交点として定義される特異点の一つが鞍形点に分類されることを示し、密度勾配が理論的に与えられる鞍形点から上下流方向に密度分布を追跡することができることを示した。さらに、上流方向に追跡された密度分布は上流側の特異点である結節点に吸収されていくことが示されたが、このような現象が実際に発生するかどうかなど結節点近傍の密度分布の特性については不明な点が多い。今後、非定常流解析⁶⁾やマイクロシミュレーションを行った結果と比較検討することにより定常密度分布解析の有効性について検討を進めていきたいと考えている。

参考文献

- 1) Newell, G.F.: Nonlinear effects in the dynamics of car following, J. Opns. Res. Soc. Am. Vol.9, pp.209-229, 1961.
- 2) Payne, H.J.: Mathematical Models of Public Systems, Simulation Council Proceedings Vol.1, pp.51, 1971.
- 3) Iwasa, Y.: Lecture Note on Mathematical Analysis of Steady Behaviours of One-Dimensional Free Surface Shear Flows, Hyrraulic Lab., Dept. of Civil Engineering, Kyoto Univ., 1966.
- 4) Lighthill, M.J. and Whitham, G.B.: On kinematic waves II, A theory of traffic flow on long crowded roads, Proc. R. Soc. London A 299, pp.317, 1955.
- 5) 細田 尚: ダイナミックモデルによる定常交通流の空間密度分布解析法とサグ部の表現, 土木学会年次学術講演会講演概要集, 2010.
- 6) 前原耀太・細田 尚・白井秀和: ダイナミックモデルによる道路の上下流端条件を考慮した交通流の非定常解析, 土木学会年次学術講演会講演概要集, 2016.

(2017.7.31 受付)

STEADY TRAFFIC DENSITY PROFILE ANALYSIS ALONG A ROAD WITH VARIABLE LONGITUDINAL SLOPE USING DYNAMIC FLUID MODEL FOR TRAFFIC FLOWS

Takashi HOSODA, Youta MAEHARA and Hidekazu SHIRAI

This paper describes the spatial traffic density profile analysis along a road with variable longitudinal slope. Payne model can be considered as a first approximation of a micro simulation model and is used as a dynamic fluid model for traffic flows. A steady traffic density profile equation similar to water surface profile equation is firstly derived considering the variation of longitudinal slope of a road. Then, the procedures to calculate the steady profile of traffic density along a road are shown including the classification of singular points of a density profile equation which are defined as the intersections between a critical density and a quasi-normal density line. It is shown that an actual density profile with given model constants can be calculated in both upstream and downstream directions starting from a saddle point where the gradient of density profile is given as a boundary condition, although the behavior of spatial density profile around a nodal point should be further examined.