不安定な動的利用者均衡に対する安定化制御

井料　隆雅 [1]

[1] 正会員　神戸大学　大学院工学研究科市民工学専攻（〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1）
E-mail:iryo@kobe-u.ac.jp

動的利用者交通量配分問題の解はしばしば日々のドライバーの選択行動調整過程において不安定になることが既存研究で指摘されている．この不安定性は，将来の混雑状況の予測を阻害したり，所要時間の安定性を損なう結果を生むことになるので，何等かの制御方法によって可能な限り低減させることが望ましい．本研究では，出発時刻選択問題を例にとり，その不安定性の解析と，それを緩和するための安定化制御の提案およびその効果の評価を行った．その結果，各時刻におけるボトルネック流入交通量に依存する追加費用を適切に付加することにより，渋滞パターンの不安定性をほぼ解消できることがわかった．また，この施策は，追加費用を伴うのにもかかわらず，一般化交通費用全体をほとんど増加させないこともわかった．このことは，提案施策の受容性が比較的高いことを示唆する．

Key Words: *dynamic user equilibrium, departure time choice, stability, instability*

1. はじめに

Vickrey[1]が提案したことで知られる出発時刻選択問題（いわゆる Vickrey モデル）は，1 個のボトルネックを持つ単一の道路における利用者の出発時刻選択が混雑に対してどう均衡するかを分析する問題である．この問題では，利用者は混雑とスケジュール制約からなる一般化交通費用を持ち，また，混雑費用は容量制約のあるボトルネックで発生する渋滞の待ち時間により発生するとする．すべての利用者が最小の一般化交通費用を持つように出発時刻を選択している状態を均衡状態とする．出発時刻問題は動的利用者均衡配分問題の一種である．その均衡解の存在と一意性の証明は Smith[2]，Daganzo[3]，Lindsey[4]などによりなされている．

実際の交通システムにおいて均衡解が実現すると考えるためには，その存在と一意性に加えて，均衡解の安定性が数学的に成り立つかどうかを知ることが重要である[5]．交通量配分問題における均衡解の安定性の重要性については，Beckmann らのよく知られた著書ですでに議論がなされている[6]．Smith は，リアプノフ関数を用いて，静的な交通流モデル（BPR 関数を用いたモデルなど）における利用者均衡配分問題の均衡解が漸近的に安定であるという証明を提示している[7]．動的利用者均衡配分問題については，1 経路に 1 ボトルネックしか存在しないネットワークにおいて出発時刻が固定された問題における漸近安定性が知られる[8]．一方，出発時刻選択問題の安定性については，その安定性について否定的な結論を示唆する報告がある[9-11]．

均衡解の安定性が自然には担保されない状況に対して，何らかの制御によってその安定性を確保することができれば，将来の混雑状況の予測や旅行時間の信頼性の担保といった実務的なメリットを享受することができるだろう．もっとも確実な制御は，もちろん，混雑を完全に解消するような制御である．そのため，例えば混雑料金によって混雑を完全に解消できれば，混雑による不安定性は発生しえないので，安定性を担保したことになる．しかし，混雑を完全に解消する制御はいつでも実施できるわけではない．混雑を残したまま，安定性を担保する，あるいは不安定性を緩和することの理論的可能性を知っておくことは，上述の実務的なメリットを実現するために一定の有用性があると考えられえる．

本稿では，経路選択と個人特性を考慮したもっとも簡単な出発時刻選択問題を例として，その不安定性を解析する．また，安定性を高めるための制御手段を提案し，その効果を見ることを行う．まず第 2 章において，著者自身の過去の報告 [12] におおむね沿う形で，出発時刻選択問題の動学を解析する．動学解析の際にはレプリケーターダイナミクスを仮定し，均衡解周辺の挙動を線形近

似を用いて解析する．次に第 3 章において，安定性を高めるための制御手段を，第 2 章の結果に基づいて提案する．第 4 章で数値計算により提案手法を検討する．第 5 章でまとめと今後の課題を示す．

2. 出発時刻選択問題の動学解析

本研究では，1 つの起点と終点，それらを結ぶ 1 本の道路，経路上の 1 個のボトルネック，この道路のみを使用して起点から終点まで移動するドライバーから構成される交通システムを考える（**図-1**）．すべてのドライバーは，この道路を利用するトリップを毎日 1 回だけ行うことを繰り返している．以降では，一般性を失うことなく，ドライバー（車両）の総数を 1 と設定し，また，ボトルネックの容量も 1 と設定する．ドライバーは一般化交通費用を最小にするような出発時刻を選択する．ボトルネックに入る交通量を $x^{\tau}(t) \geq 0$ と示す．ここで，t は 1 日の中の時刻を示す変数であり，τ は日付を示す変数である．日付は本来は整数で示すべきであるが，本研究ではこれを実数とみなした解析を行う．

時刻 t にボトルネックに到着するドライバーの一般化交通費用は

$$p(t;x^{\tau}) = w(t;x^{\tau}) + g(w(t;x^{\tau}) + t) \tag{1}$$

と定義される．ここで，$w(t;x^{\tau}) \geq 0$ はボトルネックでの遅れ時間を，$g(u)$ は時刻 u にボトルネックを出発するドライバーのスケジュール費用を示す．$g(u)$ は u で 2 回微分可能であり，なおかつ狭義凸関数（下に凸な関数）であるとする．また，$\partial_u g(u) > -1$，$g(-\infty) = \infty$，$g(+\infty) = \infty$ であるとする．ドライバーの個人特性は考えず，すべてのドライバーが式(1)の一般化交通費用を持つとする．このとき，$g(u)$ の形状が希望到着時刻を決めるので，どのドライバーも同一の希望到着時刻をもっていることに注意したい．

利用者の日々の出発時刻選択の変動は以下の式で示す：

$$\dot{x}^{\tau}(t) = x^{\tau}(t)\left\{\overline{p}(x^{\tau}) - p(t;x^{\tau})\right\}. \tag{2}$$

ただし

$$\overline{p}(x^{\tau}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{\tau}(s) p(s;x^{\tau}) \mathrm{d}s \tag{3}$$

である．この式では，日付が連続時間で示されることを前提とし，動学を微分方程式で示している．この式による動学はレプリケータダイナミクスと呼ばれる [12]．この動学は，他人の選択行動をまねる（言い換えれば，よりよい選択肢に関する情報を他人に聞くことにより得る）行動を模していると考えることができる．式(2)のような定式化が，個々人の情報収集行動とどう関連づけることができるかについては，Iryo による解析 [9]を参照されたい．

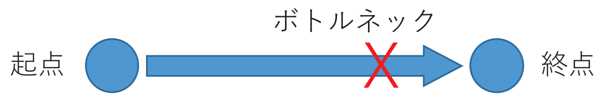


図-1 分析対象の道路ネットワーク

上記で定式化した出発時刻選択問題の均衡解は，Lindsey による方法 [4]で解くことができる．詳細は Iryo[9] を参照のこと．結果として得られる均衡解 $x^{*}(t)$ は

$$\begin{aligned} &w(t_0, x^{*}) = w(t_0+1, x^{*}) = 0 \\ &w(t, x^{*}) > 0 \text{ for } t_0 < t < t_0+1 \end{aligned} \tag{4}$$

と，

$$\begin{aligned} &x^{*}(t) > 0 \\ &\text{if and only if } t_0 \leq t \leq t_0+1 \end{aligned} \tag{5}$$

と，さらに

$$x^{*}(t_0) > 1 \tag{6}$$

を満たす．ここで，t_0 は渋滞の開始時刻である．

式(2)の動学の均衡解の近辺におけるふるまいを解析する．このために，以降では，$x^{\tau}(t)$ は均衡解に十分近いとし，均衡解からの差を

$$\Delta x^{\tau}(t) = x^{\tau}(t) - x^{*}(t) \tag{7}$$

で示す．ただし，$|\Delta x^{\tau}(t)| << 1$ であると仮定する．また，以降では，

$$\Delta x^{0}(t) = 0 \text{ for } t < t_0 \text{ or } t > t_0+1 \tag{8}$$

という条件をつける．この条件は，$\tau = 0$ において，均衡解からのずれは渋滞が存在しない時刻にはないことを仮定している．この仮定は，レプリケータダイナミクスでは，初期条件でどのドライバーも選択していない選択肢については，それ以降いずれの時点（日付）においても選択されない，という性質を利用するためにおいている．式(8)の仮定と，式(6)，および $|\Delta x^{\tau}(t)| << 1$ を組み合わせることにより，今後，ボトルネックにおける渋滞の開始時刻を不変（t_0）とすることが可能となる．このことを利用すれば

$$w(t;x^{\tau}) = a(t;x^{\tau}) - (t - t_0) \quad \text{for } t_0 \leq t \leq t_0+1 \tag{9}$$

ただし

$$a(t;x^{\tau}) = \int_{t_0}^{t} x(s) \mathrm{d}s \tag{10}$$

という関係式を導くことができる．式(9)を用いれば，

一般化交通費用は

$$p(t;x^\tau)=a(t;x^\tau)-t+g(a(t;x^\tau)+t_0) \tag{11}$$

と書き直せる，元の定義式(1)からは定数項分だけずれているが，結果には影響をおよばさないので，以降では式(11)を一般化交通費用の式として用いる．

均衡解近傍の動学の特性，特に，動学が均衡解に近づくのか遠ざかるのかを調べるために，以下のような関数を定義する：

$$H(x^\tau)=\int_{t_0}^{t_0+1} x^*(s)\ln\frac{x^*(s)}{x^\tau(s)}\mathrm{d}s\,. \tag{12}$$

ここで，$H(x^\tau)\geq 0$ が常に成立し，また，$x^\tau=x^*$ のときは常に，またそのときに限って $H(x^\tau)=0$ が成立することに注意．関数 $H(x^\tau)$ は，ある種の進化ゲームのレプリケータダイナミクスによる漸近安定性を証明する際のリャプノフ関数として用いられている 13)．ただし，今回の問題においてこれがリャプノフ関数である保証はない．

$H(x^\tau)$ の動学を調べるために，その τ による微分である $\dot{H}(x^\tau)$ を計算する．これは，

$$\dot{H}(x^\tau)=-\int_{t_0}^{t_0+1}\frac{x^*(s)}{x^\tau(s)}\dot{x}^\tau(s)\mathrm{d}s \tag{13}$$

となる．計算を進めると

$$\begin{aligned}\dot{H}(x^\tau)&=-\int_{t_0}^{t_0+1}\frac{x^*(s)}{x^\tau(s)}x^\tau(s)\left\{\overline{p}(x^\tau)-p(s;x^\tau)\right\}\mathrm{d}s\\&=-\int_{t_0}^{t_0+1}x^*(s)\left\{\overline{p}(x^\tau)-p(s;x^\tau)\right\}\mathrm{d}s\\&=-\int_{t_0}^{t_0+1}\left\{x^\tau(s)-x^*(s)\right\}p(s;x^\tau)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{14}$$

とできる．さらに計算を進めるために，

$$\begin{aligned}\Delta p(t;\Delta x^\tau)&=p(t;\Delta x^\tau+x^*)-p(t;x^*)\\&=\Delta a(t;\Delta x^\tau)\left\{1+g_u(a(t;x^*)+t_0)\right\}\end{aligned} \tag{15}$$

の関係式を用いる．ここで，

$$\Delta a(t;x^\tau)=\int_{t_0}^{t}\Delta x^\tau(s)\mathrm{d}s \tag{16}$$

と定義した．なお，

$$\Delta a(t_0;x^\tau)=\Delta a(t_0+1;x^\tau)=0 \tag{17}$$

が常に成立することに注意．式(16)を式(14)に代入することにより

$$\dot{H}(x^\tau)=-\int_{t_0}^{t_0+1}\Delta x^\tau(s)\Delta a(s;\Delta x^\tau)\left\{1+g_u(a(s;x^*)+t_0)\right\}\mathrm{d}s \tag{18}$$

という関係式を導くことができる．

式(18)をさらに解析するために，積分の中の Δx^τ と Δa の積に着目する．式(16)より，この部分は Δx^τ と，その原関数である Δa の積になっている．よって

$$\Delta x^\tau(s)\Delta a(s;\Delta x^\tau)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\Delta a(s;\Delta x^\tau)\right)^2 \tag{19}$$

と，関数 Δa を二乗したもの全体を微分したものと置き換えることが可能である．これにより，式(18)に対して部分積分が適用可能になる．具体的には

$$\begin{aligned}\dot{H}(x^\tau)&=-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\Delta a(s;\Delta x^\tau)\right)^2\left\{1+g_u(a(s;x^*)+t_0)\right\}\mathrm{d}s\\&=-\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\Delta a(s;\Delta x^\tau)\right)^2\left\{1+g_u(a(s;x^*)+t_0)\right\}\right]_{t_0}^{t_0+1}\\-\int_{t_0}^{t_0+1}\left(\Delta a(s;\Delta x^\tau)\right)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g_u(a(s;x^*)+t_0)\mathrm{d}s\end{array}\right\}\end{aligned} \tag{20}$$

と計算できる．さらに計算することにより，最終的に

$$\dot{H}(x^\tau)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+1}\left(\Delta a(s;\Delta x^\tau)\right)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g_u(a(s;x^*)+t_0)\mathrm{d}s \tag{21}$$

を得る．式(21)の積分のうち，Δa の二乗の部分は，$x^\tau=x^*$ でない限り正である（逆に，$x^\tau=x^*$ であれば 0 である）．$g_u(a(s;x^*)+t_0)$ の微分の部分は，g が狭義凸関数であることと，$a(s;x^*)$ が s に対して常に単調増加関数であることより，こちらも常に正の値となる．以上により，

$$\begin{cases}\dot{H}(x^\tau)>0 & \text{if } x^\tau\neq x^*\\ \dot{H}(x^\tau)=0 & \text{if } x^\tau=x^*\end{cases} \tag{22}$$

を導出することができる．

式(22)は，$|\Delta x^\tau(t)|<<1$ の条件が守られている限りは，ドライバーの行動が均衡解に収束することはないことを示している．このことは，均衡解が少なくとも漸近安定ではないことを示唆する．なお，数学的に厳密に安定性を証明するには上記の解析では十分ではない，特に，解が何らかの距離空間上で均衡解の近傍にあるとすることが，$|\Delta x^\tau(t)|<<1$ を必ず満たすことを意味するかどうかについては十分な検討を要する．

一方で，ドライバーの一般化交通費用に何らかの形で介入することができれば，$\dot{H}(x^\tau)$ を負にすることができ，均衡をより安定化させることができることも期待できよう．仮に式(22)の第 1 式の不等号を逆転できれば，$\dot{H}(x^\tau)$ はリャプノフ関数そのものとなり，均衡解の漸近安定性が保証される．そこまでできなくとも，$\dot{H}(x^\tau)$ をできるだけ小さい値にすることにより，均衡解からの乖離を小さくできることが期待できよう．

3. 出発時刻選択問題の安定性を高める施策

第 2 章の分析をもとに，出発時刻選択問題の安定性を高める施策の提案とその評価を行う．出発時刻選択問題の安定性が損なわれるのは，式(18)で計算される $\dot{H}(x^\tau)$ が正の値をとることが原因と考えられる．少なくとも，この値を常に負にすることができれば漸近安定性を確保することができる．また，できるだけ小さくするだけでも安定性の向上に寄与することが期待できるだろう．

$\dot{H}(x^\tau)$ の値を小さくする方策として，式(11)で示される一般化交通費用に新しい費用の項を追加することを考える．具体的には，

$$\begin{aligned} &p_{\mathrm{m}}(t;x^\tau) \\ &= a(t;x^\tau) - t + g(a(t;x^\tau)+t_0) + \pi(x^\tau(t)) \end{aligned} \tag{23}$$

で示される p_{m} を新しい一般化交通費用とする．ここで，$\pi(x)$ は非負の関数である．一般化交通費用を式(23)で置き換えて計算すると

$$\begin{aligned} &\Delta p_{\mathrm{m}}(t;\Delta x^\tau) \\ &= \Delta a(t;\Delta x^\tau)\left\{1+g_u(a(t;x^*)+t_0)\right\} + \pi_x(x^*)\Delta x^\tau(t) \end{aligned} \tag{24}$$

となる．結果として

$$\begin{aligned} &\dot{H}_{\mathrm{m}}(x^\tau) \\ &= -\int_{t_0}^{t_0+1} \Delta x^\tau(s)\left[\Delta a(s;\Delta x^\tau)\left\{1+g_u(a(s;x^*)+t_0)\right\}\right]\mathrm{d}s \\ &-\int_{t_0}^{t_0+1} \pi_x(x^*)\left\{\Delta x^\tau(s)\right\}^2 \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{25}$$

を $\dot{H}(x^\tau)$ に代わる関数として得る．ただし，

$$\pi_x(x) = \frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}x} \tag{26}$$

である．

式(25)を式(21)と比較すると，g_{uu} が大きくなる時間帯で $\pi_x(x^*)$ が大きくなり，なおかつ $|\Delta x^\tau| << |\Delta a|$ が成立しないのであれば，$\dot{H}_{\mathrm{m}}(x^\tau)$ が負になることが期待できる．$\pi(x^*)$ は外生的に設定できるので，そのように設定すればよい．ただし，この際には，単に $\pi(x^*)$ を大きくすると，一般化交通費用に施策として付加する費用を大きくする必要が生じ，施策の受容性などの実務的問題が避けがたくなることに注意したい．可能であれば，できるだけ $\pi_x(x^*)$ を大きくしつつ，$\pi(x^*)$ の値を小さくすることが望ましい．仮に均衡解 x^* を正確に知っていれば，$\pi(x)$ として，x^* 付近でのみ傾きが大きい関数（シグモイドなど）を用いることが最も望ましい．事前に x^* を正確に知っていることは通常は考えられない．しかし，大体の値がわかれば，その付近だけで傾きが大きく，それ以外では傾きが小さい関数を $\pi(x)$ に設定すればよい．また，x^* が 0 に近い値になることはあまり考えられないので，0 付近で傾きが小さく，一定の大きさで傾きが大きくなるような関数を $\pi(x)$ として用いることも考えられる．

$|\Delta x^\tau| << |\Delta a|$ であるか否かは内性的に決定するので，これがどうなるかの保証は現時点では特にない．本稿では $|\Delta x^\tau| << |\Delta a|$ の関係式に関する数学的解析は行わずに，追加費用 $\pi(x)$ が安定性を高めるのに有効かどうかを数値計算で確かめることとする．

数値計算におけるスケジュールコスト関数として

$$g(u) = 0.2\left\{\ln(1+\mathrm{e}^{10x}) - x\right\} \tag{27}$$

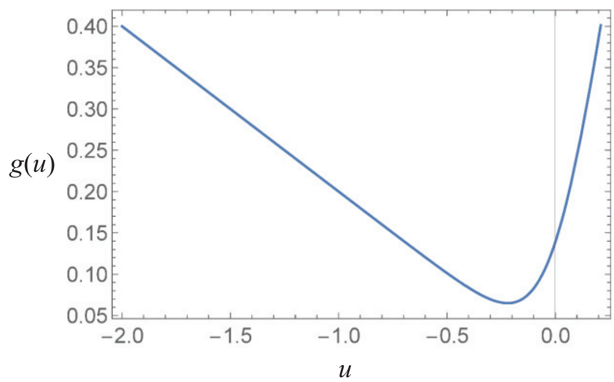
を用いる．この関数の形状を**図−2** に示す．追加費用 $\pi(x)$ としては,

$$\pi(x) = 0.02x^2 \tag{28}$$

を用いる．数値計算においては，-1.5 から 0.5 のあいだの時刻を刻み幅 0.001 で離散化した．レプリケータダイナミクスの微分方程式は刻み幅 0.001 の Euler 法により計算した．初期値としては，-1.5 から 0.5 のあいだの時刻に均一に合計 1 の需要を分散させたものを用いた．

数値計算によるボトルネック流入交通量の計算結果を**図-3** と**図-4** に，遅れ時間を**図-5** と**図-6** に，一般化交通費用を**図-7** と**図-8** に示す．明らかに，追加費用がある場合のほうが安定性が高い結果が得られている．一般化交通費用を見れば，追加費用がある場合においては，おおむね一定の値をとる時間が長く続いていることがわかる．このことは，追加費用を与えることにより，均衡状態に近い状態が安定的に実現できていることを意味する．

一般化交通費用の各日付における平均値の変動を**図-9** に示す．この一般化交通費用には追加費用そのものも含まれていることに注意したい．追加費用の付加は，一般化交通費用の平均値も安定させる一方で，それ自身をほとんど増加させないことがわかる．



図−2 数値計算において用いたスケジュールコスト関数

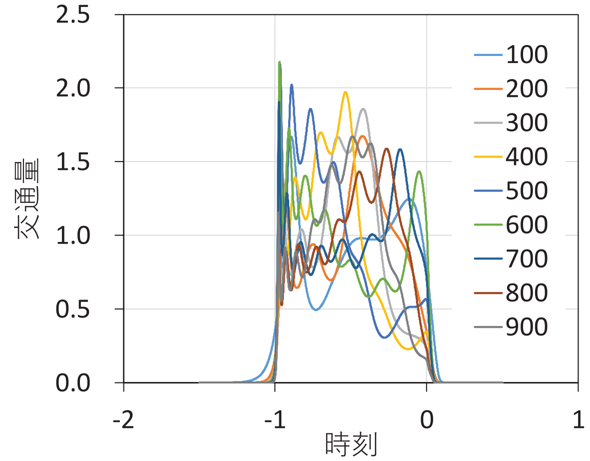


図-3 ボトルネック流入交通量（追加費用なし）
凡例の数字は τ （日付）を示す.

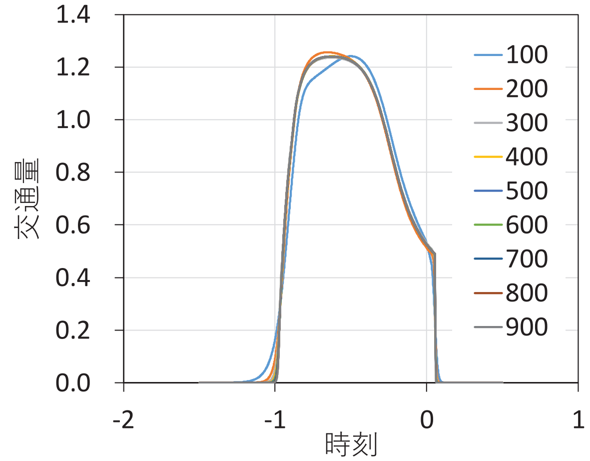


図-4 ボトルネック流入交通量（追加費用あり）
凡例の数字は τ （日付）を示す.

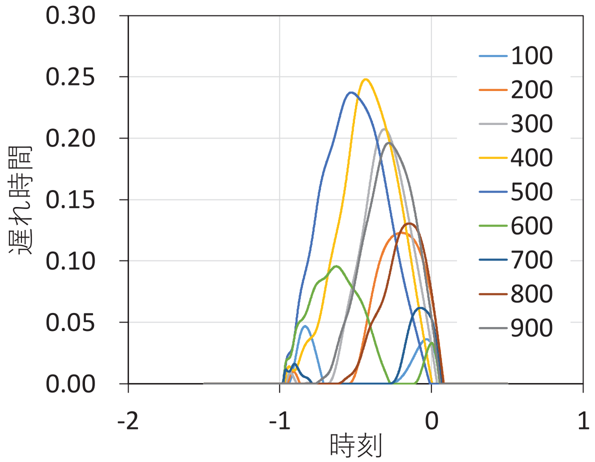


図-5 遅れ時間（追加費用なし）
凡例の数字は τ （日付）を示す.

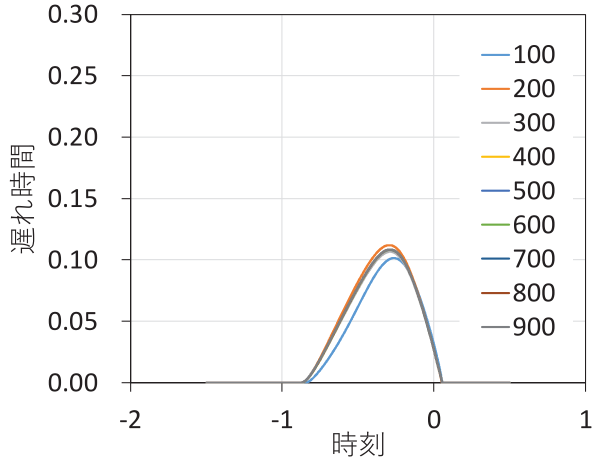


図-6 遅れ時間（追加費用あり）
凡例の数字は τ （日付）を示す.

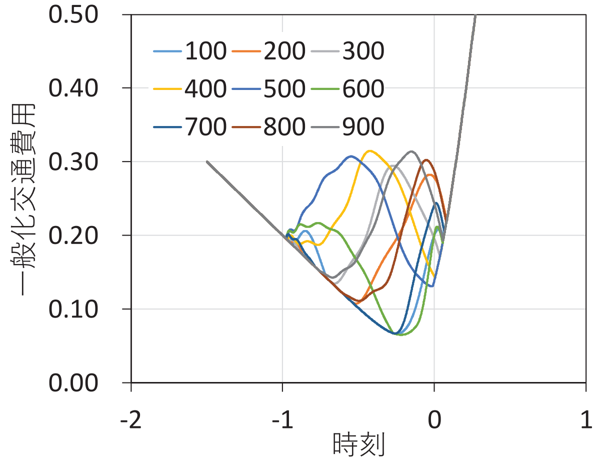


図-7 一般化交通費用（追加費用なし）
凡例の数字は τ （日付）を示す.

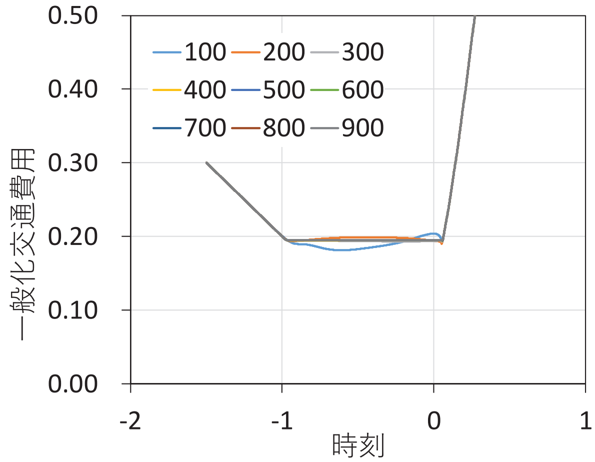


図-8 一般化交通費用（追加費用あり）
凡例の数字は τ （日付）を示す.

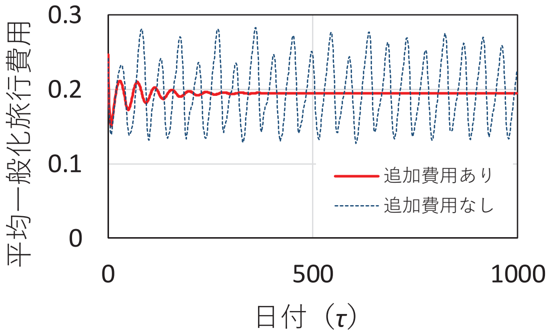


図-9 平均一般化交通費用の日変動

4. まとめと今後の課題

本研究では，出発時刻選択問題のうち，もっとも簡単な設定である，単一リンクで個人特性がない問題について，均衡解の安定性を数理的に解析した．その結果，この種の出発時刻選択問題では漸近安定性が担保されないことを示した（ただし，この証明には，$|\Delta x^{\tau}(t)| << 1$ という，数学的にややきつい仮定を置いていることに注意）．また，その結果を用いて，安定性を向上させるために追加費用を与える施策を提案し，その効果を数値計算によって確認した．

追加費用施策は一般化交通費用をほとんど上げることなく安定性を向上させる効果を持ち，受容性が比較的高い施策であることが期待できる．ただし，提案した追加費用は，交通量に応じて（Day-to-day の意味で）動的に変化させる必要がある．仮に追加費用を通行料金として実装するのであれば，これは通行料金が日々変わることを意味する．この点は，施策の受容性という観点からは課題である．

追加費用を与えるには混雑料金だけでなく，単に道路のサービスレベルを低下させる手法もある．ただし，その手法が旅行時間によるものである場合，旅行時間の操作そのものが，追加費用以外の一般化交通費用の値も変化させてしまうことに注意しなくてはならない．この効果を分析するには，数学的にはやや煩雑な解析を要する．

今後の課題を述べる．追加費用の効果を数値的にでなく解析的手法によって証明することが，施策の汎用性を確認するためには欠かせない．個人特性がある場合やネットワークがある場合の効果については，少なくとも数値的には確認することが必要である．レプリケータダイナミクス以外の動学の検証ももちろん必要だろう．

謝辞：本研究は科学研究費補助金（基盤研究(A)「ポスト・ビッグデータ時代に向けた次世代交通システムの動学的マネジメント手法の構築（課題番号 16H02368）」，代表：井料隆雅）の助成によりなされた．この場を借りて感謝の意を表する．

参考文献

1) Vickrey, W. S.: Congestion theory and transport investment, The American Economic Review, Vol. 59, No. 2, pp. 251–260, 1969.
2) Smith, M. J.: The existence of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single vottleneck, Transportation Science, Vol. 18, No. 4, pp. 385–394, 1984.
3) Daganzo, C. F.: The uniqueness of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck. Transportation Science, Vol. 19, No. 1, pp. 29–37, 1985.
4) Lindsey, R.: Existence, uniqueness, and trip cost function properties of user equilibrium in the bottleneck model with multiple user classes. Transportation Science, Vol. 38, No. 3, pp. 293–314, 2004.
5) Iryo, T.: Properties of dynamic user equilibrium solution: existence, uniqueness, stability, and robust solution methodology, Transportmetrica B: Transport Dynamics, Vol. 1, No. 1, pp. 52–67, 2013.
6) Beckmann, M., McGuire, C. B., and Winsten, C. B.: Studies in the Economics of Transportation. New Haven: Yale University Press, 1956.
7) Smith, M. J.: The stability of a dynamic model of traffic assignment - an application of a method of Lyapunov. Transportation Science, Vol. 18, No. 3, pp.245–252, 1984.
8) Mounce, R.: Convergence in a continuous dynamic queueing model for traffic networksm, Transportation Research Part B, Vol. 40, No. 9, pp. 779–791, 2006.
9) Iryo, T.: Day-to-day dynamical model incorporating an explicit description of individuals' information collection behaviour, Transportation Research Part B, Vol. 92A, pp. 88-103, 2016.
10) Iryo, T.: An analysis of instability in a departure time choice problem, Journal of Advanced Transportation, Vol. 42, No. 3, pp. 333-356, 2008.
11) Iryo, T.: Instability of departure time choice problem: a case with replicator dynamics, The Sixth International Symposium on Dynamic Traffic Assignment, Sydney, Australia, 2016.
12) Schuster, P., and Sigmund, K.:Replicator dynamics, Journal of Theoretical Biology,Vol. 100, pp.533–538, 1983.
13) Sandholm, W. H.: Population Games and Evolutionary Dynamics. Cambridge: MIT Press, 2010.

(2017. 4. 28 受付)

STABILIZATION CONTROL FOR UNSTABLE DYNAMIC USER EQUILIBRIA

Takamasa IRYO