多様な災害シナリオを考慮した企業の復旧設備投資に関する動的計画問題の数値解析

横松　宗太[1]・秋山　祐樹[2]・小川　芳樹[3]・柴崎　亮介[4]

[1]正会員　京都大学准教授　防災研究所　巨大災害研究センター（〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄）
E-mail: yoko@drs.dpri.kyoto-u.ac.jp
[2]正会員　東京大学助教　空間情報科学研究センター（〒 277-8568　千葉県柏市柏の葉 5-1-5）
[3]正会員　東京大学特任研究員　空間情報科学研究センター（〒 153-8505 東京都目黒区駒場 4-6-1）
[4]正会員　東京大学教授　空間情報科学研究センター（〒 277-8568　千葉県柏市柏の葉 5-1-5）

本研究では，巨大災害後の企業の設備復旧投資と生産回復の過程の数値シミュレーションを行う．企業は，毎期変化するインフラストラクチャの復旧状況や従業員の職場復帰等の環境を考慮しながら，復旧投資を通じて生産施設ストックをコントロールする．本研究では多数の状態変数をもつ最適値関数によって表現された Bellman 方程式を定式化する．そして多次元ストックの動的計画問題を，スーパーコンピューターを用いて数値的に解くことを目的とする．そして，関東で起こり得る 96 通りの地震シナリオを対象に，東京都 25 業種の生産復興過程を計算する．

Key Words : *Disaster recovery, investment problem, dynamic programming, parallel computing*

1.　はじめに

巨大災害の現象や社会へのインパクトを把握するための大規模数値計算の取り組みが盛んになりつつある．土木計画の分野でも，避難や交通など，災害によって混乱を受けるさまざまな動的現象の解明にとって，HPC(High-Performance Computing) の役割の重要性が高まっている．

災害復興計画の問題も HPC に適した性格を有している．なぜならば復興計画は，家屋やインフラストラクチャ，企業の生産施設や在庫など，多数のストックを同時にコントロールする動的計画問題であるからである．そして多数のストック変数をもつ動的計画法の問題は，「次元の呪い (Curse of Dimensionality)」に直面することが知られている．すなわち変数空間の次元を増やすと，計算量が指数関数的に増加し，とたんに計算が困難になる．平均的な性能のパーソナルコンピュータを用いて解を得ることはできず，スーパーコンピュータと効率的な並列計算アルゴリズムが必要になる．

本研究では，大規模災害後の企業の設備復旧投資と生産回復の過程の数値シミュレーションを行うことを目的とする．企業は自身の復旧投資を通じて生産施設ストックをコントロールする．その制御は，インフラの復旧や従業員の職場復帰など，外部の環境が時々刻々と変化していく中で行われる．本研究では，多数の状態変数をもつ最適値関数によって表現されたベルマン方程式を定式化する．そして，これまで「次元の呪い」と呼ばれて，計算することが困難と考えられてきた多次元ストックの動的計画問題を，スーパーコンピュータを用いて数値的に解くことを目的とする．そして，関東で起こり得る 96 通りの地震シナリオを対象に，東京都 25 業種の生産復興過程をシミュレートする．

2.　生産設備復旧問題

災害発生時点を $t=0$ とした離散的な時間軸を考える．1 期間はひと月とする．農業以外の産業部門 $h, h'(=1, \cdots, H)$ を対象とする．同一産業内では企業の技術は同一と仮定する．産業 h に属する企業 i の t 期の資本（生産設備）ストックを $k_i(t)$ とする．一方，経済全体の生産資本ストックの総和を $K(t)$，インフラストラクチャの水準を $B(t)$，家計の資産水準を $a(t)$，労働供給源となる人的資源ストックの水準を $\xi(t)$ とし，企業にとっては与件とする．なお部門インデックス h は企業 i が属する部門を表す．一方，h' は企業 i が属さない部門も含めた任意の部門を表すこととする．

企業がコントロールする状態変数ベクトルを $\boldsymbol{s}_i(t)$ により表現する．今回の数値計算では，$\boldsymbol{s}_i(t)=\{k_i(t)\}$ のみのケースを対象とするが，今後は施設の分類や在庫ストックの導入によって多次元の $\boldsymbol{s}_i(t)$ を扱う予定である．一方，経済全体の状態を状態変数ベクトル $\boldsymbol{s}_A(t):=(K(t), B(t), a(t), \xi(t))$ により表現する．市場における財の価格や利子率，賃金率は $\boldsymbol{s}_A(t)$ に依存する．企業 i の問題における状態変数ベクトルは $(\boldsymbol{s}_i(t), \boldsymbol{s}_A(t))$ によ

り与えられる．

災害後の時点 t における資本（生産設備）ストック $k_i(t)$ の変化過程は以下のように表される．

$$k_i(t+1) = (1-\delta)k_i(t) + \eta_i(t) \tag{1}$$

ただし δ は資本の減耗率，$\eta_i(t)$ は投資（生産施設整備）を表す．災害復旧投資も $\eta_i(t)$ に含まれる．

生産技術は以下のように表される．付加価値 $F^i(\cdot)$ と中間投入財 $m_{h'i}(t)$ の間は完全非代替型を，付加価値関数に関しては CES(constant elasticity of substitution) 型を仮定する．

$$\begin{aligned} y_i(t) = \min\Big[&F^i(l_i(t), k_i(t), B(t)),\\ &\frac{m_{1i}(t)}{\kappa_{1h}}, \cdots, \frac{m_{h'i}(t)}{\kappa_{h'h}}, \cdots, \frac{m_{Hi}(t)}{\kappa_{Hh}}\Big], \end{aligned} \tag{2a}$$

$$\begin{aligned} &F^i(l_i(t), k_i(t), B(t))\\ &:= \beta_i^0 \Big\{\beta_i^l l_i(t)^{\alpha_i} + \beta_i^k k_i(t)^{\alpha_i} + \beta_i^B B^{\alpha_i}\Big\}^{\frac{1}{\alpha_i}} \end{aligned} \tag{2b}$$

$l_i(t)$ は労働需要を表す．$F^i(\cdot)$ は付加価値関数であり，労働 $l_i(t)$ と資本 $k_i(t)$，インフラ $B(t)$ に関して 1 次同次と仮定する．また，$m_{h'i}(t)$ は産業 h' の財に関する中間投入を表す．$\kappa_{h'h}$ は中間投入係数，$\beta_i^0, \beta_i^l, \beta_i^k, \beta_i^B$ はスケールパラメータであり，時間を通じて一定とする．代替弾力性は $1/(1-\alpha_i)$ により与えられる．

企業 i の t 期の利潤は以下のように構成される．

$$\begin{aligned} \Pi_i(\boldsymbol{d}_i(t), \boldsymbol{s}_i(t), \boldsymbol{s}_A(t)) &:= p_h(t)y_i(t)\\ &- \sum_{h'} p_{h'}(t)m_{h'i}(t) - w(t)l_i(t) - p_\eta(t)\eta_i(t) \end{aligned} \tag{3}$$

ただし $\boldsymbol{d}_i(t) := (l_i(t), \eta_i(t), \{m_{h'i}(t)\}_{h'})$ は企業 i の制御変数ベクトルである．$p_h(t)$ は t 期における部門 h の財の価格，$w(t)$ は賃金率，$p_\eta(t)$ は単位当たり資本の調達費用であり，各企業にとっては与件である．右辺第 1 項は産出物の供給によって得られる収入を表す．第 2 項は中間投入財の購入費用を，第 3 項は賃金支払いを，第 4 項は設備投資費用を表す．

各企業は企業の市場価値を最大化することを目的とする．t 期の企業 i の価値を $\Lambda_i(\boldsymbol{s}_i(t), \boldsymbol{s}_A(t))$ により表すと，企業の問題は以下の Bellman 方程式によって与えられる．

$$\begin{aligned} \Lambda_i(\boldsymbol{s}_i(t), \boldsymbol{s}_A(t)) = \max_{\boldsymbol{d}_i(t)} \Big[&\Pi_i(\boldsymbol{d}_i(t), \boldsymbol{s}_i(t), \boldsymbol{s}_A(t))\\ &+\psi(\boldsymbol{s}_A(t))\Lambda_i(\boldsymbol{s}_i(t+1), \boldsymbol{s}_A(t+1))\Big] \end{aligned} \tag{4}$$

subject to Eq.(1), (2a)

$\psi(\boldsymbol{s}_A(t))$ は，t の市場で評価した，$t+1$ 期の資本価格を表す．$\Lambda_i(\boldsymbol{s}_i(t), \boldsymbol{s}_A(t))$ は株価総額と等価である．式 (4) の右辺第 1 項はインカムゲイン，第 2 項はキャピタルゲインに相当する．

3. 数値シミュレーション

(1) データと業種・要素別災害被害率行列

関東地方で起こり得る地震シナリオの下での，東京都の各業種の生産復興過程のシミュレーションを行う．産業分類は平成 17 年東京都産業連関表の 26 業種から農業と本社部門を除いた 25 業種を対象とする．本研究では各業種において業種全体を代表的 1 企業として扱う．その一方で帝国データバンクの企業データを利用して，500m メッシュ単位で生産施設の空間的な立地分布を考慮する．それによって業種間で空間的な立地が不均一となり，災害被害も不均一となる．インフラのデータは「日本の社会資本 2012」(内閣府）のデータを用いる．

災害については，防災科学技術研究所が提供する合計 96 通りのシナリオを用いる．すなわち，1) カテゴリー 1（海溝型地震のうち，震源断層を特定できる地震）で 50 年超過確率 2%の地震，2) カテゴリー 1 で 50 年超過確率 39%の地震，3) カテゴリー 2（海溝型地震のうち，震源断層を特定しにくい地震）で 50 年超過確率 2%の地震，4) カテゴリー 2 で 50 年超過確率 39%の地震の 4 種類のそれぞれの発生時刻が 1 時から 24 時までの 24 通りを考える．発生時刻による被害の違いは火災の大きさに起因する．

災害は生産資本とインフラを破壊し，従業員に人的被害を与える．災害シナリオのインデックスを $\psi(=1, \cdots, \Psi)$ により表し ($\Psi = 96$)，シナリオ ψ 毎に各業種にどれだけの被害がもたらされるかを以下の手順で導出する．

Step 1　業種（本事例では企業に一致）のインデックスを $i = 1, \cdots, I$ により表す．また，生産要素 z の種類を Z 個とする．本事例では z ＝生産施設，人的資源，インフラの 3 種類 ($Z = 3$) のみを計算に導入するが，今後はより多様な生産要素を扱う．はじめに，全業種の全生産要素を I 行 Z 列の行列 M_{IE} により表す．各 (i, z) 要素は，業種 i の生産要素 z の水準を表す．

Step 2　地点（メッシュ）のインデックスを $x = 1, \cdots, X$ として，I 行 X 列の立地分布行列 (Exposure matrix)Ω_{IX} を作成する．行列 Ω_{IX} の各 (i, x) 要素は，業種 i がもつ総生産要素のうちの，地点 x に立地した生産要素の割合を示す．よって各行の和は 1 になる．今回は企業の資本金の分布を生産要素の分布の代理指標として扱う．

Step 3　災害シナリオ ψ 毎に X 行 Z 列の空間被害率行列 (Damage rate matrix)$\Omega_{XZ\psi}$ を作成する．行列 $\Omega_{XZ\psi}$ の各 (x, z) 要素は，地点 x に立地した生産要素 z が地震 ψ によって損壊する割合を表す．

Step 4　災害シナリオ ψ 毎の，業種・生産要素別災害

被害率行列 $\Omega_{IZ\psi}$ を $\Omega_{IZ\psi} := \Omega_{IX}\Omega_{XZ\psi}$ によって導く．I 行 Z 列の行列 $\Omega_{IZ\psi}$ の各 (i,z) 要素は，業種 i の生産要素 z の平均被害率を表す．

Step 5 災害シナリオ ψ 毎の，各生産要素の被害水準 $D_{IZ\psi}$ を $D_{IZ\psi} := \Omega_{IZ\psi} \circ M_{IE}$ により導出する．ただし "$\circ$" はアダマール積（行列の要素同士の積）を表す．

(2) 数値計算の結果

a) ある災害シナリオの下での，ある業種の復興過程

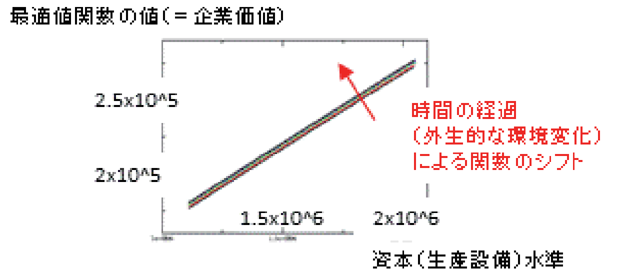
被災地域の人的資源水準やインフラの回復率を外生的に仮定して，災害シナリオ別・業種別の数値シミュレーションを行った．今回は災害シナリオ別・業種別の各問題は完全に切り離されている．市場を通じた業種間の相互作用の考慮に関しては今後の課題とする．Bellman 方程式 (4) で表された問題の最適値関数の値を Non-Parametric Value Function Iteration によって数値的に求めた．アルゴリズムにおいては，状態毎に式 (4) の右辺を最大にする制御変数を求め，新しい最適値に更新するステップに対して，MPI を用いた並列化を行った．理論的には状態ベクトルの組み合わせの数だけ並列化を行うことができる．

本数値事例では，基本ケースとして，全企業が復興資金の借入をできない場合を仮定する．すなわち企業は毎期の利潤の中からしか設備投資ができないものとする．また，いくつかのパラメータの値を仮定により与えるが，以下の **(2)c)** で示すように，復興過程は資本の調達費用 p_η に対する感度が大きいものとなる．

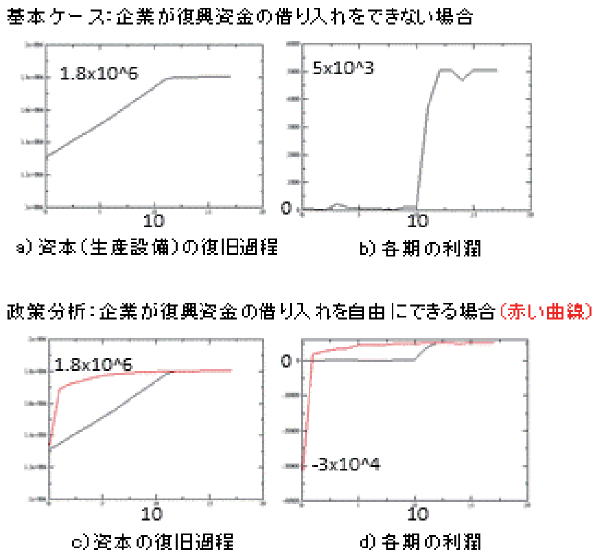
図–1 は「業種：精密機械／災害シナリオ：カテゴリー1・50 年超過確率 2%・17 時地震発生」の問題の最適値関数を示す．最適値関数は多次元の関数であるが，2 次元平面に表現する都合上，関数のシフトとして描かれている．また**図–2** は同問題の最適値関数より導かれる最適復興過程を示している．**図–2**a)b) は，全企業が復興資金の借入をできない場合において，資本（生産設備）の復旧にはほぼ 10 か月がかかり，復旧期間は株主への配当に回す利潤がほとんどないことを示している．一方，同図 c)d) の赤色の曲線は災害復興融資政策が適用されて，企業が復興資金を自由に借り入れることができる場合を示している．それによって災害後に一時的に利潤は負になるが，資本は早期に復旧することがわかる．

b) 96 災害シナリオの下での，ある業種の復興過程

業種「電気機械，情報・通信機器，電子部品」に関する，96 災害シナリオ下の復興過程のバラつきについて分析する．**図–3** は，災害後の各期の平均値や最大値，最小値等を示している．今回の計算では，各地震の発生時刻の違いによる被害の違いが小さいため，復興過程にもそれほど大きなバラつきが生じない．復旧が最



図–1 最適値関数（Bellman 方程式の解）



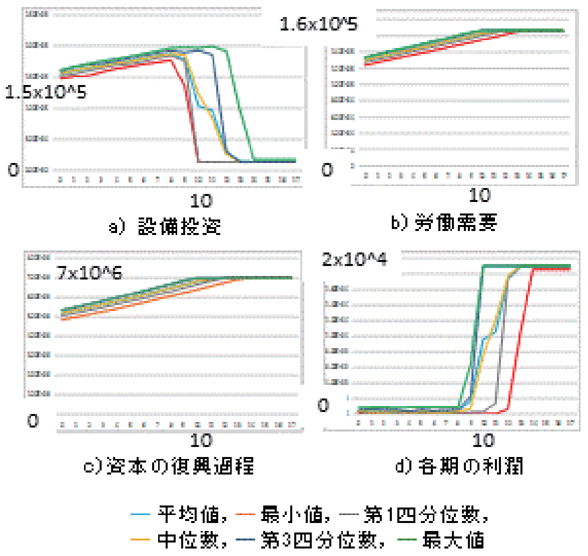
図–2 ある災害シナリオの下での，ある業種の復興過程
（いずれの図も横軸は期（月），縦軸は金額（百万円））

も早いケースと最も遅いケースの間で 4ヵ月ほどの違いが生じるのみである．今後はより多様な災害を対象に分析する必要がある．

c) ある災害シナリオの下での，25 業種の復興過程

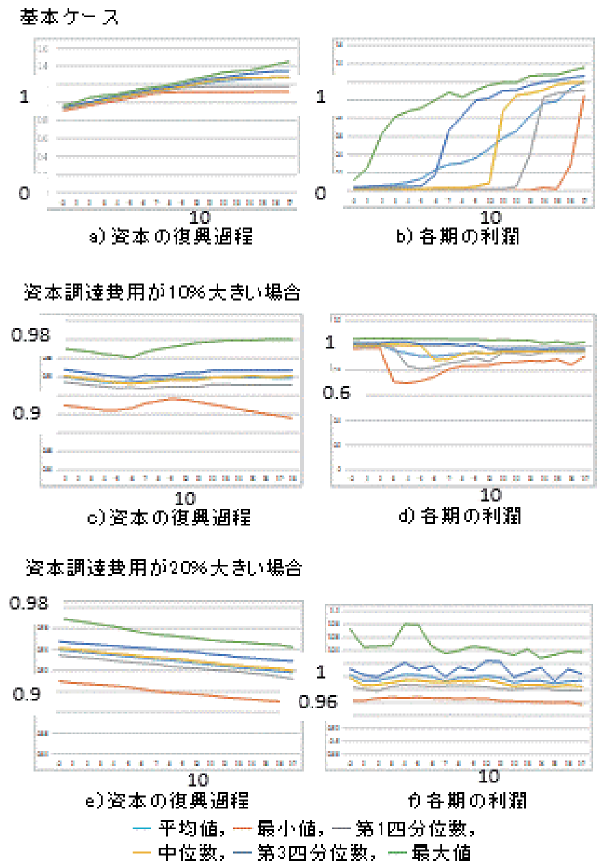
災害シナリオを「カテゴリー 1・50 年超過確率 2%・17 時地震発生」に特定し，25 業種間の復興過程のバラつきを調べる．業種間で取引や資本の規模が異なるため,「復興指数」:＝「各月の値」／「災害直前の月の値」を定義し,「復興指数」を用いた比較を行う．**図–4**a)b) より，基本ケースでは各期の利潤の回復過程に大きな差が生じることがわかる．なお，復興指数が 1 を越えて上昇することの理由は，災害前の状態が定常状態に至らない状態であったことによるものである．

資本調達費用による比較動学分析を行う．**図–4**c)d) は資本調達費用 p_η が 10%大きい場合，同図 e)f) は 20%大きい場合の復興過程を示す．資本調達費用が 10%大きくなると，資本が災害前の水準に復旧しなくなる．そして 20%大きくなると，資本は災害後にも緩やかに減



図–3 96 災害シナリオの下での，ある業種の復興過程（いずれの図も横軸は期（月），縦軸は金額（百万円））

少する．設備の劣化に対して，補修や更新等の維持管理投資がなされなくなるからである．一方，投資がなされない，あるいは設備が売却される理由で，災害直後の利潤は基本ケースと較べると大きく落ち込まない．しかし資本ストックが小さい水準に止まるため，その後も利潤は成長しないことがわかる．



図–4 ある災害シナリオの下での，25 業種の復興過程（いずれの図も横軸は期（月），縦軸は復興指数）

4. おわりに

本研究では，企業の災害復興問題を多数のストックの変化過程を伴う動的計画問題として表現した．そして Bellman 方程式を数値的に解く手法によって，96 通りの災害シナリオと東京都 25 業種を対象とした数値シミュレーションを行った．各業種ごとの企業立地や災害被害の空間的不均一性を考慮して，多数災害シナリオに関する capacity computing を行った．得られた計算結果から，復興過程の業種間や災害シナリオ間の差異について考察した．

本研究では，動的計画法を用いた数値計算プログラムの基礎を作ることができたが，今後に多くの課題と目標を残している．第一に，本研究の数値事例ではいくつかの重要なパラメータを仮定により与えている．データ整備を拡張することにより，それらを特定する必要がある．第二に，本事例では一つの業種を一つの企業として扱ったが，今後は業種内の企業の規模の分布を考慮する必要がある．大企業と中小企業の間の資金調達能力の差異をモデルに導入する必要がある．第三に，今後は企業間の相互作用を考慮した市場均衡解を導出することを目標とする．第四に，インフラ復旧の空間的な順序などの復興政策や，事前の防災対策の効果を評価する方法を開発する必要がある．最後に，今後はストック変数の次元を増やしていく予定である．インフラに関しても，種類や地点ごとに異なった変数を定義する．そうすると，いよいよ本格的な「次元の呪い」が始まる．Value Function Iteration で計算の対象とする状態を，最適経路の導出にとって意味のある範囲に絞り込む必要が生じてくる．そのためのアルゴリズムの開発が大きな課題である．

参考文献

1) Bellman, R., and S. Dreyfus: Functional approximations and dynamic programming, Mathematical Tables and Other Aids to Computation, pp.247-251, 1959.
2) Chambers, R.G: Applied production analysis -A dual approach, Cambridge University Press, 1998.
3) Judd, K.L.: Numerical methods in economics. MIT press, 1998.
4) Stokey, N., R. Lucas, with E. Prescott: Recursive methods in economic dynamics, Harvard University Press, 1989.