

# Spectral Partitioningを用いた 道路ネットワークの接続性評価

明光 就平<sup>1</sup>・倉内 文孝<sup>2</sup>・安藤 宏恵<sup>3</sup>

<sup>1</sup>非会員 岐阜大学 工学部社会基盤工学科 (〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸1-1)  
E-mail:t3030061@edu.gifu-u.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 岐阜大学教授 工学部社会基盤工学科 (〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸1-1)  
E-mail:kurauchi@gifu-u.ac.jp

<sup>3</sup>学生会員 岐阜大学大学院 工学研究科生産開発システム工学専攻 (〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸1-1)  
E-mail:hiroe@gifu-u.ac.jp

災害が発生したとしても深刻な機能低下に陥らない道路ネットワークを構築することは常に災害にさらされ続けている我が国において重要な課題である。そのため、道路ネットワークの接続性評価方法が様々提案されているが、配分計算や複数経路の探索が必要となるなどデータの収集や計算に手間がかかるものも多く、安定的な方法論は未だ確立されているとはいえない。この問題に対し、本研究では新たな視点として、グラフ分割手法のひとつであるSpectral Partitioning法を適用することを提案する。この手法によりグラフラプラシアン<sup>1</sup>の第2最小固有値に着目することで、ネットワークをほぼ等分割しなおかつそのリンクウェイトの和が最小の切断面を知ることができる。本稿では、岐阜県道路ネットワークに適用した結果により提案した手法の妥当性を検証した結果を報告する。

**Key Words** Spectral Partitioning, Normalised Laplacian Matrix, Connectivity Evaluation

## 1. はじめに

阪神淡路大震災や東日本大震災等の過去の大きな災害時には、道路沿線にある建物の倒壊による通行止めや道路の損傷・崩壊が発生しており、災害時には交通機能の低下が発生している。そのため、災害が発生したとしても重要な区間が途絶しない、あるいは代替経路が存在する等の深刻な機能低下に陥らない道路ネットワークを構築することは常に災害にさらされ続けている我が国において重要である。また、交通には災害の影響以外にも交通事故や日々の交通需要の変動など多くの不確実性をふくむ事象が関係しており、それらを考慮したうえで、より確実なサービスの提供をするための交通ネットワークの信頼性分析が必要である。交通容量や交通需要に着目した信頼性分析手法として、Chenら<sup>1)</sup>は道路ネットワーク上を流れる交通需要を交通容量内で捌くことができるのかという視点にたち容量信頼性 (Capacity Reliability) の概念を提案している。この方法は、所与の需要を受容できる確率を算定しており、その評価はインプットデータに大きく依存する。そのため、ODデータなどのインプットデータに関する正確な情報の収集が難しい場合、十分な評価が保証できない可能性が生じるとい

る。また、災害発生時における評価において交通需要に依存しない方法として、ノードもしくはリンクを対象に、2つの地点間が繋がっているか、全ODペアが移動可能であるか、全リンクが同時に走行可能であるか等の指標を用いて、ネットワークの信頼度を評価する連結信頼性が提案されている<sup>2)</sup>。ただし、連結信頼性の評価においては、リンクの途絶確率の推定方法が課題と指摘される。さらに、リンクの被災確率に依存しない脆弱性 (Vulnerability) は、その事象の生起確率を正確に予測することは困難であるという立場に立ち、正規確率に依存せずその影響の大きさに関して評価することを提案している。Taylorら<sup>3)</sup>は、脆弱性は“ネットワークの弱さ”を測る指標としており、少数のリンク途絶によりアクセシビリティが大きく低下するノードや、途絶した際に深刻なアクセシビリティの低下を引き起こすリンクをそれぞれ脆弱なノード、重要なリンクとして定義している。同様の視点にたち、Kurauchi et al.<sup>4)</sup>は、二地点間のリンクを共有しない独立な経路 (非重複経路) を数え上げることで、確率を問わず被災時の到達の可能性を評価する方法を提案している。この方法は、Chenら<sup>1)</sup>やTaylorら<sup>3)</sup>のような配分計算は必要ないものの、非重複経路を数え上げる線形計画問題をODペアごとに解く必要があり、

計算量は少なくないため、大規模なネットワークに対する適用性は高くないといえる。以上のような背景を踏まえ、本研究では確率に依存せず、かつ交通需要に関わらず交通ネットワークを簡便に評価する指標であり、なおかつ計算効率性が高いものとして、スペクトラルグラフ理論<sup>5)</sup>に基づくグラフ分割手法のひとつである Spectral Partitioning 法を活用することを提案する。Spectral Partitioning 法では、ネットワーク形状を考慮したうえで最も脆弱な切断面を求めることが可能であり、交通ネットワーク信頼性分析をおこなう際の基礎的なネットワーク特性把握にも活用できると考える。また、交通需要等の詳細なデータを必要とせず、計算過程も非常に簡便であるため、本来信頼性分析が困難であった大規模ネットワークにおいても適用することができる。本稿では、まず Spectral Partitioning 法を説明し、Sioux Falls Network における試算を通じた多様な指標による評価に関して考察をおこなった。各ケースの結果から、Spectral Partitioning 法が道路ネットワークの接続性の評価指標としての妥当性を検証した。さらに、Spectral Partitioning 法を岐阜県ネットワークに適用することで、実際の大規模ネットワークにおける本モデルの挙動確認、さらなる活用のための検討をおこなう。

ノードとする。

## 2. Spectral Partitioning 法によるネットワーク分割

### (1) グラフ特性を説明する行列

スペクトラルグラフ理論とは、グラフの持つ特性を隣接行列、ラプラシアン行列などを活用して考察するものである。ここで取り扱うのは無向リンクとする。

#### a) 隣接行列

隣接行列 (Adjacency matrix) とは、ネットワーク上の接続関係を表現するものである。いま、ネットワークが  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E}, \mathbf{w})$  で表現されるものとする。ただし、 $\mathbf{V}$  はノード (vertex) の集合、 $\mathbf{E}$  はリンクの集合、そして  $\mathbf{w}$  は各リンクに紐付けられた重み ( $> 0$ ) である。このとき、隣接行列  $\mathbf{A}_G$  は、大きさ  $|\mathbf{V}| \times |\mathbf{V}|$  であり、以下を要素に持つ行列である。

$$a_{uv} = \begin{cases} w_e & \text{if } e = (u, v) \in \mathbf{E}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

つまり、ネットワーク上のノード  $u$  から  $v$  に向けてリンクがある場合、そのリンクに対応する重み  $w_e$  を要素に持つ。もし、重みを考慮しない場合、 $w_e = 1$  とする。無向リンクの場合隣接行列  $\mathbf{A}_G$  は対称行列となる。

#### b) 次数行列

次数行列とは、重みがない場合には各ノードに流入、

あるいは流出するリンクの数になる。また、重み付きの場合には、その重みの和である。

$$d_{uu} = \sum_{v \in \mathbf{V}} a_{uv}, u \in \mathbf{V}. \quad (2)$$

なお、無向リンクの場合にはこの値は列和をとっても行和をとっても一致する。また、上記の  $d_{uu}$  を対角行列にもち、それ以外の要素を 0 とする行列を次数行列  $\mathbf{D}_G$  と定義する。

#### c) ラプラシアン行列

ラプラシアン行列とは、隣接行列および次数行列を用いて以下のように定義できるものである。

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{D}_G - \mathbf{A}_G \quad (3)$$

定義より、ラプラシアン行列の列和あるいは行和は 0 になる。

#### d) 正規化ラプラシアン行列

正規化ラプラシアン行列とは、ラプラシアン行列の対角要素を 1 に正規化したものであり、以下の通り定義される。

$$\mathbf{N}_G = \mathbf{D}_G^{-0.5} \mathbf{L}_G \mathbf{D}_G^{-0.5} \quad (4)$$

## (2) 固有値

$n \times n$  行列が対称行列である場合、実数の固有値が存在する。隣接行列  $\mathbf{A}_G$  の  $n$  個の実数の固有値を  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n (\mu_1 \geq \mu_2, \dots, \geq \mu_n)$  とし、またそれに対応した  $n$  個の互いに直交する固有ベクトル  $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_n$  と置くことにする。このとき、最大固有値  $\lambda_1$  およびこれに対応する固有ベクトル  $\boldsymbol{\psi}_1$  は以下のレイリー商を最大化する問題の解として定式化できる。

$$\mu_1 = \max_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A}_G \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \arg \max_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A}_G \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (6)$$

さらに 2 番目以降の  $i$  番目固有値については、それまでに見つかった  $i-1$  の固有ベクトルと直交しつつ、レイリー商を最大化するものとして、以下のようにかける。

$$\mu_i = \max_{\mathbf{x} \perp \boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_{i-1}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A}_G \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\psi}_i = \arg \max_{\mathbf{x} \perp \boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_{i-1}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A}_G \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (8)$$

続いて、ラプラシアン行列の二次形式について考えてみる。以下のように書くことができる。

$$\mathbf{x}^T \mathbf{L}_G \mathbf{x} = \sum_{(u,v) \in \mathbf{E}} (x(u) - x(v))^2 \quad (9)$$

この値はいかなる  $\mathbf{x}$  であっても正の値となるため、ラプラシアン行列の固有値は負になることはない。また、ラプラシアン行列の定義より、ベクトル  $\mathbf{x}$  をすべての要素が 1 のベクトルとすると、レイリー商の値は 0 になる。つまり、ラプラシアン行列の固有値を小さなものから順

に $\lambda_1 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_n$ とおくと、 $\lambda_1 = 0$ となる。なお、 $\lambda_i$ の計算方法であるが、 $\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}$ すべてに直交しつつ、レイリー商を最小化するものとして $\lambda_i$ がえられる。ラプラシアン行列と同様に、正規化ラプラシアン行列の固有値も非負となり、さらに少なくとも1つは0をとる。この固有値を $v_1 \leq v_2 \dots \leq v_n$ とおく。

### (3) コンダクタンス (conductance) とCheeger定数

グラフ特性を表す隣接行列、ラプラシアン行列および正規化ラプラシアン行列の固有値は、様々な接続に関連する指標の上界・下界値を与えることが示されており、それ自身が接続性の指標になりうる。その中でもSpectral Partitioning法では、正規化ラプラシアン行列の固有ベクトルによる分割をおこなう。ここでは、正規化ラプラシアン行列の第2固有値の規定するコンダクタンス<sup>9)</sup>について説明する。ここでは暗黙にグラフ $G$ は連結しているものとする。

グラフ $G$ のノードのサブセットを $S$ と定義しよう。今、全体のノード集合 $V$ からあるサブセット $S$ を分離することを考える。このとき、 $S$ とそれ以外とをつなぐリンクに着目するため、以下を定義する。

$$\partial(S) \equiv \{(u, v) \in E: u \in S, v \in V - S\} \quad (10)$$

サブセット $S$ の次数の総和を $d(S)$ とすると、コンダクタンスは次のように定義される。

$$h(S) = \frac{1}{\min[d(S), d(V-S)]} \sum_{e \in \partial(S)} W_e \quad (11)$$

(11)式で表されるコンダクタンスが最小となるようにサブセット $S$ を選んだ場合の値はCheeger定数<sup>9)</sup>と呼ばれる。

$$h_G = \min_{S \subset V} h(S) \quad (12)$$

Cheeger定数は、Cheegerの不等式より以下の通り正規化ラプラシアン行列の第2最小固有値により上下界が規定されている。

$$0.5v_2 \leq h_G \leq \sqrt{2v_2} \quad (13)$$

### (4) 分割問題の定式化

今、以下のような分割問題を考えよう。

$$\min_y \mathbf{y}^T \mathbf{L}_G \mathbf{y} \quad (14)$$

subject to

$$\mathbf{y} \in \{a, b\}^n \quad (15)$$

$$\mathbf{y}^T \mathbf{1} = 0 \quad (16)$$

$$\mathbf{y}^T \mathbf{D}_G \mathbf{y} = 1 \quad (17)$$

最適性条件より、最適解から得られる係数 $a, b$ は次のようにかける。

$$a = \left( \frac{(n-m)^2}{(n-m)^2 d(S) + m^2 d(V-S)} \right)^{0.5} \quad (18)$$

$$b = - \left( \frac{m^2}{(n-m)^2 d(S) + m^2 d(V-S)} \right)^{0.5} \quad (19)$$

この結果と、正規化ラプラシアン行列のレイリー商の定義との関係を見ると、レイリー商は制約条件である式(15)を緩和した問題となっているため、その値は必ず式(14)の最適値より小さいはずである。そのため、次のように記述することができる。

$$v_2 \leq \frac{\mathbf{y}_S^T \mathbf{L}_G \mathbf{y}_S}{\mathbf{y}_S^T \mathbf{D}_G \mathbf{y}_S} = \frac{n^2}{(n-m)^2 d(S) + m^2 d(V-S)} \sum_{e \in \partial(S)} W_e \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{y}_S$ の要素は次のように定義できる。

$$\mathbf{y}_S(u) = \begin{cases} a & \text{if } u \in S \\ -b & \text{if } u \in V - S \end{cases} \quad (21)$$

これより、正規化ラプラシアン行列の第2最小固有値はサブセット $S$ と残りのネットワーク $V - S$ の境界の重みの和に関する下界値をあたるものであり、Bandeira<sup>7)</sup>によれば、正規化カット (Normalised Cut) と呼ばれるものになる。次に、以下の問題について考えてみよう。

$$\max_{\theta} \frac{1}{(1-\theta)^2 d(S) + \theta^2 d(V-S)} \quad (22)$$

subject to

$$0 \leq \theta \leq 1 \quad (23)$$

式(22)は、 $\theta = d(S)/d(V)$ のとき最大値をとるため、以下が成立する。

$$\frac{n^2}{(n-m)^2 d(S) + m^2 d(V-S)} \leq \frac{d(V)}{d(S)d(V-S)} \quad (24)$$

式(20)と式(24)より、次のように記述できる。

$$v_2 \leq \frac{d(V)}{d(S)d(V-S)} \sum_{e \in \partial(S)} W_e \quad (25)$$

式(25)右辺の値を最小にする意味を考える。まず分数部分についてみると、サブセット $S$ に属するノードの次数と残りのネットワーク $V - S$ に属するノードの次数がほぼ同じ値となるとき最小の値をとる。また、シグマの中は境界に属するリンクの重みの和である。つまり、「境界リンクの重みの和が最小になりつつネットワークを各サブセットの次数の和がほぼ2等分になるような事象の起きやすさ」を $v_2$ が表しているといえる。

### (5) Spectral Partitioning 法

以上のように、正規化ラプラシアン行列の第2最小固有値により、ネットワークの次数和を等分しつつその境界の重みの和が最小となるような切断面を求められることが示された。問題は、そのときに境界 $\partial(S)$ がどこに与えられるか、という点である。これについて、von Luxburg<sup>8)</sup>は、 $v_2$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\varphi}_2$ の各要素の符号によって分割することを示しており、本研究においても同様

のアプローチを採用する。

以上より、Spectral Partitioning 法の手順は以下のように要約できる。

1. 分析目的に応じた重みを各リンクに設定する。
2. 正規化ラプラシアン行列を作成する。
3. 正規化ラプラシアン行列の第2最小固有値を求める。  
もし第2最小固有値が0である場合には、0でない最小の固有値を求める。
4. 3.で得られた固有値に対応する固有ベクトルの要素についての符号からノードを分類し、異なるセットに属するノードを接続するリンクを境界リンクセットとする。

得られた境界リンクセットは、たとえば、すべてのリンクの重みを1とした場合には、「境界リンクの数が最小になりつつネットワークを各サブセットの次数の和がほぼ2等分される断面」を得ることになるため、ネットワークの密度を次数の和が表しているとする、それをほぼ等分しつつより少ないリンク数でネットワークを分断する境界を示す。したがって、境界に位置するリンクをネットワークの分断を防ぐためには重要なリンク、ととらえることができる。

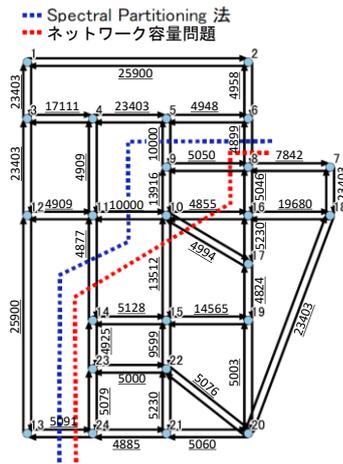


図-1 Sioux Falls Network

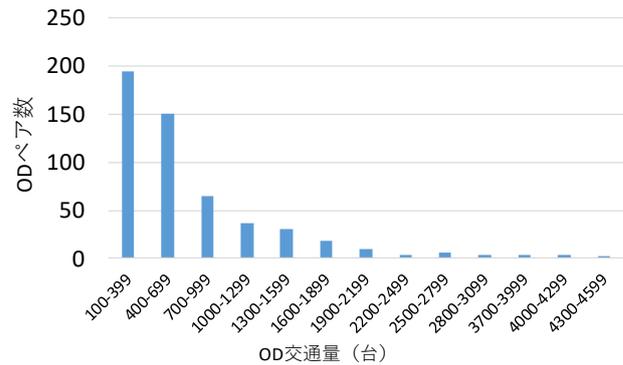


図-2 OD交通量分布

### 3. Sioux Falls Networkによる試算

#### (1) Sioux Falls Network の概要

2.で示した Spectral Partitioning 法の有用性を検証するために、図-1に示すノード数 24、リンク数 76の Sioux Falls Network<sup>9)</sup>に本モデルを適用する。各リンクに示す値はリンク容量であり双方向リンクとも同値である。また、OD 交通量についても 9)に掲載されていたものを利用した。参考までに、OD 交通量の分布は図-2の通りであり、最大値、最小値はそれぞれ 4,400 (台)、100 (台)であった。分析にあたり、リンクの重みをどのように設定するかが重要となる。ここでは、(a)リンク容量を用いたケース、(b)リンクの残存容量を用いたケース、(c)途絶確率を用いたケース、の3ケースについて計算を実施し、関連が高いと思われるネットワーク指標との比較を試みる。

#### (2) リンク容量を重みとした場合

リンク容量を重みとして設定した場合には、「境界に位置するリンクの容量和が最も小さい」断面を求めると解釈することができる。このような断面は、2つのサブセット間の移動交通需要が大きい場合、ボトルネックとなり得るリンク群と解釈することができ、ネットワーク全体の容量を規定するものと考えられる。

ネットワーク容量<sup>10)</sup>を算定するにあたり、一般的には

利用者均衡配分を下位問題とすることが多いが、この場合1本のリンクが容量を超過した時点で計算が終了してしまうため、ネットワーク容量が規定される断面を得ることができない。そのため、ここでは容量制約つき直角関数利用者均衡配分 (Capacitated User Equilibrium Assignment with Right-angle Function)<sup>11)</sup>を用いた。この手法は、配分問題としては総走行時間最小化問題を解くことで最適リンク交通量を求めるが、容量を超えるリンクに対してはシャドウプライスとして遅れ時間を加味し、各ODペア間の等時間原則を表現する方法である。リンク容量制約のシャドウプライスを参照し、この値が正となっているリンクをみることでネットワーク上で容量以上の需要があるリンクを導くことが可能である。ネットワーク容量問題によって得られる断面と Spectral Partitioning 法によって得られる断面を比較することにより Spectral Partitioning 法を用いた本モデルの妥当性を検証する。

2つの方法で得られた断面を図-3に示す。2つの断面は類似しているものの完全に等しい結果とはならなかった。この理由として、ネットワーク容量問題による断面はOD交通量の比率に依存しているものであるのに対し、Spectral Partitioning 法はネットワーク全体の形態とリンク容量のみから導かれるものであるという違いが考えられ

る。そのため、OD交通量を固定し、リンク容量を変動させたケースでネットワーク容量問題を繰り返し解く、感度分析をおこなった。ここでは、0から1の一様な乱数  $\gamma$  を各リンクに与え、リンク容量を  $(0.5 + \gamma) \times$  (リンク容量) とする。つまり、それぞれのリンク容量は乱数によって50%から150%の変動が引き起こされる。これを異なる乱数で99回繰り返し、ベースケースの1回と併せて100回のネットワーク分割結果から、各リンクが断面に含まれる回数を得た。この結果を用い、断面に含まれる回数の多いリンクを結ぶことにより、リンク容量の変動に関わらず最も発生しやすい断面を示すことが可能である。それぞれの方法について、断面に含まれる回数が多いリンクを色付けし、生じやすい断面を1本の線として結んだものを図-4(a), (b)に示す。図-4より、ネットワーク容量モデルにおいても、OD交通需要が変動する場合に最も起こりやすい断面は、Spectral Partitioning法のそれと一致することが確認できる。また、興味深いのは、両手法によって得られたより境界になりやすいリンクは同一であるものの、Spectral Partitioning法の方が切断面に選ばれる回数が多いリンクが多く、切断面の安定性が高いことがわかる。これより、OD情報を用いる必要がないSpectral Partitioning法でも十分にネットワーク分割の議論ができるといえる。

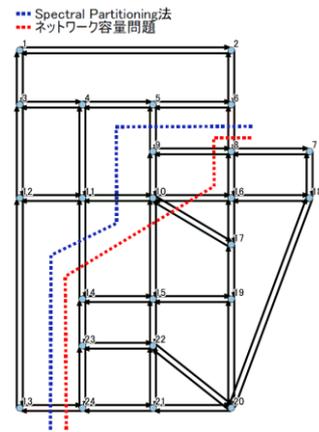


図-3 リンク容量を重みとした場合の断面

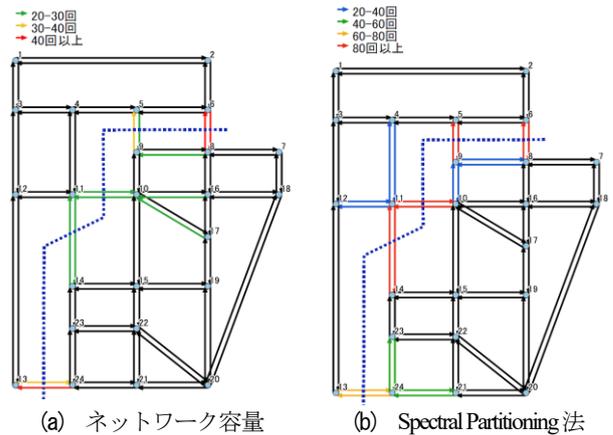


図-4 断面の感度分析 (リンク容量)

### (3) ネットワーク残存容量を重みとした場合

前節ではリンク容量を重みに設定したが、それぞれのリンクがどの程度利用されているのかに関する情報は考慮しなかった。ここでは、残存リンク容量を重みとした方法について検討する。残存リンク容量とは、リンク容量とリンク交通量の差で表され、交通需要に対してそれぞれのリンクがどの程度余裕があるかを示す<sup>12)</sup>。この指標は、「供給予備力 (reserve capacity)」と呼ばれ、ネットワークの余裕量を示す。ネットワーク上において現在走行している状況を考え、より余裕が少ないリンクによって構成される断面を知ることによって、たとえばより大きな交通需要が生じた際に潜在的にボトルネックとなり得る断面を見つけることができるといえる。なお、OD交通量に関して、ネットワーク条件で記したOD交通量 (図-3) をネットワークに配分すると、半分以上のリンクで交通量がリンク容量を超過してしまうため、ここでは、全体需要を50%に減少させて検証をおこなった。(a)の検討と同様断面の安定性を検証するため、図-3に示したOD交通量の50%値について、乱数により異なるODペアに割り振ったパターンを100個用意した。それぞれのパターンについて利用者均衡配分をおこないリンク交通量を求め、リンク容量との差により残存リンク容量を求めた。ところで、リンク交通量が容量を超えている場合に

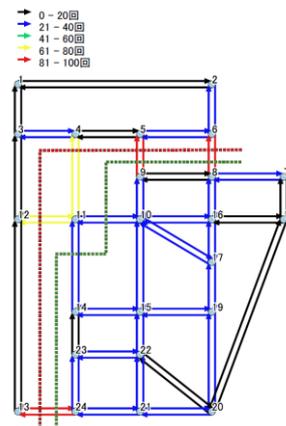


図-5 残存リンク容量による分割 (Spectral Partitioning法)

は、重みが負値をとる。これを避けるために、残存リンク容量がない場合には、他のリンクと比較して十分小さな値として重み=1とした。残存リンク容量を重みに用いてSpectral Partitioning法を適用した結果から、各リンクが断面に含まれる回数によってリンクを色分けしたものを図-5に示す。図中の赤破線は70回を占める最頻出断面であり、緑破線は2番目に多く、約15回ほどあらわれた。この計算においては、OD交通量を乱数によって入れ替えているため、多様なODパターンが生まれているはず

である．にもかかわらず，断面に含まれる回数が80回以上のリンクが複数存在することから，ネットワーク上の全体需要が変わらない場合，ODパターンに依存せず，残存リンク容量が小さいリンクが安定的に存在するといえる．

ここまで，ネットワーク容量，ネットワーク残存容量を重みの因子として与え，どのような断面が生じるか検証した．それらの考察における重みの値の影響を明らかにするため，ここではリンクの重みをすべて1に統一し，本モデルを適用した．その結果を図-6に示す．形状依存のみに着目したときはネットワークをほぼ均等に上下に分断される結果となった．このように，ネットワーク容量，ネットワーク残存容量を考慮したときの結果と形状依存のみを考慮した結果に違いが生じることから，Spectral Partitioning 法は，着目したい目的に応じ適切に重みを設定することで，その重みに関して脆弱なリンクの抽出が可能といえる．

(4) リンク途絶確率を重みとした場合

ネットワークの災害時の信頼性を考える場合，各リンクの途絶のしやすさを考慮することも有用である．そのため，ここではリンク途絶確率を重みに与えることを考える．各リンク $e$ に設定された途絶確率 $p_e$ は独立であると仮定するとき，対象のリンクすべてが同時に途絶する確率が最大となる断面を求めようとしよう．リンクの同時途絶確率を最大化する断面を求める問題は以下のようにかける．

$$\max_{\partial(S)} \prod_{e \in \partial(S)} p_e \tag{26}$$

式(26)の対数をとると次のように記述できる．

$$\max_{\partial(S)} \log \prod_{e \in \partial(S)} p_e = \max_{\partial(S)} \sum_{e \in \partial(S)} \log p_e \tag{27}$$

途絶確率 $p_e$ は1を超えないため， $\log p_e$ は常に負の値をとり， $0 < p_e \leq 1$ の範囲内において， $\log p_e$ の絶対値は単調減少である．そのため，式(27)は以下のように書き換えることができる．

$$\max_{\partial(S)} \sum_{e \in \partial(S)} \log p_e = \min_{\partial(S)} -(\sum_{e \in \partial(S)} \log p_e) \tag{28}$$

これより， $-\sum_e \log p_e$ を最小化することで，リンクの同時途絶確率の最大化を表現することが可能となる．断面の正の重みの総和最小化によって，リンク同時途絶確率の最大化をおこないたいとき，断面の重みの総和最小化は以下のように記述できる．

$$\min_{\partial(S)} \sum_{e \in \partial(S)} w_e = \min_{\partial(S)} -(\sum_{e \in \partial(S)} \log p_e) \tag{29}$$

以上より，リンク途絶確率を以下のように対数をとることで，正の重みとして定義する．

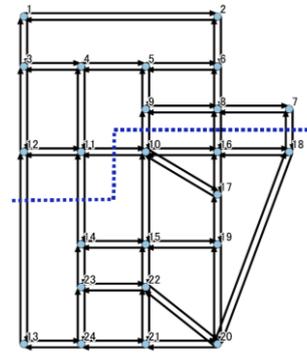


図-6 重みを1とした場合の断面 (Spectral Partitioning 法)

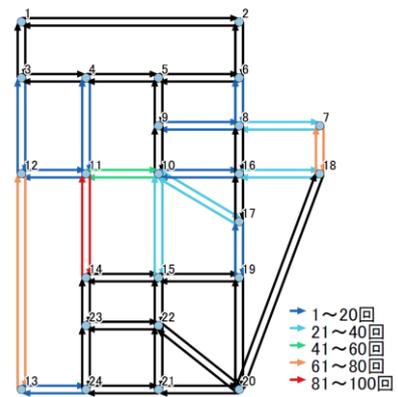


図-7 被災確率を用いた断面

$$w_e = -\log p_e \tag{30}$$

このように重みを設定することで，「構成リンクの途絶確率が最も大きな断面」を抽出することが可能である．この考え方の妥当性を検証するために，0から0.1の様な乱数を作成し，それを重みとして各リンクに与える．それぞれのリンクの重みとして確率値が与えられ，これを100回繰り返した際に各リンクが断面に含まれる回数を図-7に示す．これより，80回以上断面に含まれるリンクは1カ所の双方向リンクしか存在せず，様な乱数で割り振られる確率値によって得られる断面にばらつきがみられる．断面の決定において，ネットワーク形状による影響のみならず，確率値による重みが影響を与えることは明らかである．実際のネットワーク接続性評価において，災害時のリンク破損確率を用いることで，Spectral Partitioning 法による接続性評価が可能といえる．

4. 岐阜県ネットワークへの適用

ここでは，岐阜県内全域を対象とする実際の交通ネットワークにSpectral Partitioning 法を適用し，高速道路，国道，県道等を含む大規模な実ネットワークにおける接続

性の評価を試みる。リンク数2,348, ノード数1,468の岐阜県道路ネットワークを使用して試算した。

### (1)リンク容量による検証

Sioux Falls Networkにおける試算と同様に、道路ネットワークの需要によらない潜在的に容量の低い断面を求めため、リンクの重みとしてリンク容量を適用しSpectral Partitioning 法によるネットワーク分割をおこなった。その結果を図-8に示す。赤く示されているリンクが断面に含まれる道路を示している。これよりネットワークが密である岐阜市を含む都市部（岐阜県西部）と比較的ネットワークが疎である岐阜県東部を接続する断面が最も接続性が弱い断面といえることがわかった。また、3.で述べたように、第2最小固有値に対応する固有ベクトルの符号によって、ネットワーク分割が可能である。ここではノード1,468個の固有ベクトルのうち、正の値が767個（52%）、負の値が701個（48%）であり、県北東部側（図-8の右側）のサブセットに含まれるノード数が約2%多いという結果となった。このように、大規模なネットワークにおいても、脆弱なリンクの集合や接続性の弱い部分を容易に判断することが可能であり、ネットワーク整備や交通政策を考えるうえで、基礎的なネットワーク特性を把握するための材料になり得る。

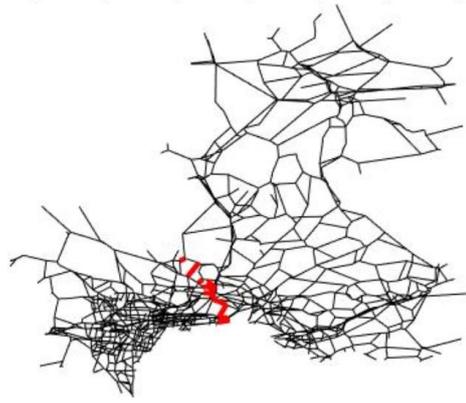


図-8 リンク容量による断面



図-9 残存リンク容量による断面

### (2)リンク残存容量による検証

リンク残存容量を重みとして用いた場合の結果を図-9に示す。その結果、中央下部に位置する各務原市の一部にあたる末端のわずかな部分が断面により分断された。これは、リンク交通量が交通容量を超過しているリンクの存在から、ネットワーク形状に対して重みによる影響が非常に大きくなったため、“リンク交通量が交通容量を超過するリンクのみで断面を形成する”という項目が重要視された結果と考えられる。断面部分の拡大図を見ると、断面に含まれるリンクの重みは全て1、すなわち容量超過しているリンクであり、断面によって分断されるサブネットワーク内のノードは22個のみであった。これは、岐阜県ネットワークにおいて、式(25)の値が最も小さくなるケースであると考えられる。このような結果から、リンク残存容量を重みとするSpectral Partitioning 法では、容量を超過したリンクにより切断することが重視される可能性があるといえる。また、ネットワークの性質による影響を考え、岐阜県のみではなく、中部圏全域を対象とする図-10に示すネットワーク（ノード数：12,009、リンク数：18,050）において試算をおこなったものの、岐阜県ネットワークと同様、志摩市の非常に小さな一部分のみ分断される結果となった。全12,009ノードのうち、サブセットに含まれるノード（緑色）は127個のみであ

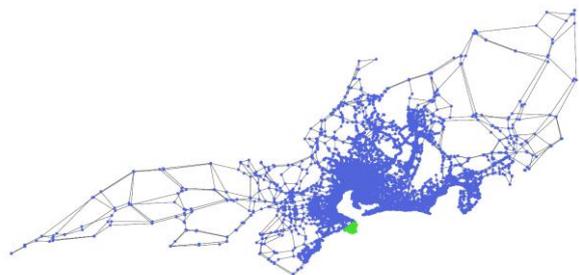


図-10 中部圏ネットワークにおけるネットワーク分割

り、約1%と非常に少ない。ここでの方法においては、「リンク交通量の容量超過の程度」を考慮しておらず、容量超過の「程度」について考慮できていないわけではない。そのため、実ネットワークでのリンク残存容量による切断については課題が残っており、さらなる検討が必要と考えている。

### (3)リンク途絶確率による検証

3. (3)では、Sioux Falls Networkにおいてリンク途絶確率の対数をとることでSpectral Partitioning法の適用が可能であることを示した。本節では災害時を想定し、土砂災害や大雨等による斜面崩壊によってリンクが途絶されるリンク途絶確率を重みとして適用することで、防災の観点からSpectral Partitioning法を用いてネットワーク評価することの可能性について検証する。岐阜県は多くの中山間地域を有しており、豪雨発生時に土砂災害の危険性が高い斜面が数多く存在する。そのため、斜面崩壊によるリンクの途絶が道路ネットワーク全体に及ぼす影響を、式(25)、(30)を用いて同時にすべてのリンクが途絶される確率が高い断面を求めることで検証する。ここではノード数1,779、リンク数2,384の図-11に示す岐阜県道路ネットワークを用いた。リンクの重みは、本城<sup>13)</sup>らおよび小板<sup>14)</sup>により推定された斜面途絶確率を用いて設定している。これらの研究で推定したのは飛騨圏域における斜面の崩壊確率であるため、それ以外の西濃・岐阜・中濃・東濃圏域に位置するリンクの途絶確率は0となっている。飛騨圏域内の103本のリンクがリンク途絶確率を持っており、その確率値は図-11のように分布している。Spectral Partitioning法を適用した結果得られた断面を赤いラインで図-11に示した。断面に含まれるリンクは全て途絶確率が0のリンクであり、飛騨圏域のリンク途絶確率を用い、岐阜県全域の道路ネットワークを評価した場合、リンク途絶確率の影響を重みとして考慮したとしても、ネットワーク形状による影響が大きい結果となることがわかった。今回のケースでは、リンク途絶の危険性の高い飛騨圏域のリンク途絶確率を対象とし、岐阜県全域のネットワーク評価をおこなったが、ネットワーク全体において確率値を重みとして適用する場合には、重みに依存し、結果が大きく異なることも十分に考えられる。今回の試算結果から、大規模ネットワークにおいて、重みに確率値を与えたSpectral Partitioning法を適用した場合、重みの影響を考慮した切断面を得られることを確認した。

## 5. おわりに

本研究ではネットワーク上の重要な断面について、ス

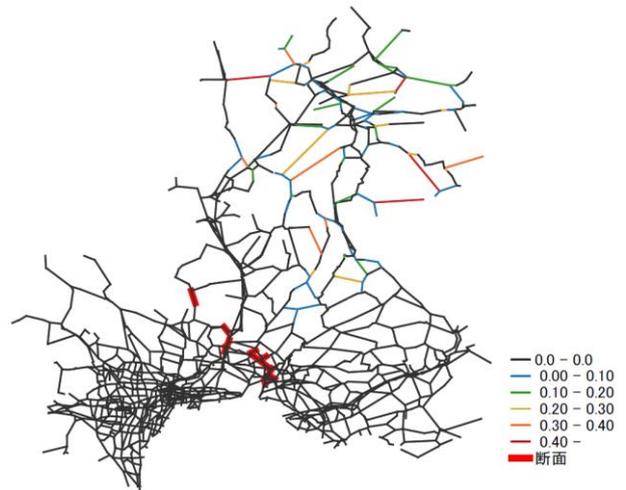


図-11 リンク途絶確率とそれを重みとした際の断面

ペクトラルグラフ理論を活用し分割問題を定式化することで、Spectral Partitioning法を導いた。それらをSioux Falls Networkに適用しリンクの重みや設定条件の変動に対する感度分析をおこなうことで、Spectral Partitioning法の挙動確認、ネットワーク特性の把握について検証した。具体的には、重みの設定による変化をみるため、(a)リンク容量を用いたケース、(b)リンクの残存容量を用いたケース、(c)リンクの途絶確率を用いたケース、の3ケースについて計算を実施した。(a)では、OD交通量やリンク容量の変動に依存しない断面を安定的に見つけることが可能であることを示した。また、(b)のケースにおいても、ODパターンに依存しない断面の存在が確認されたため、OD情報や経路探索を必要としない本モデルでも十分にネットワークの接続性の議論ができることを確認した。(c)のケースでは、確率値の変動により得られる断面に変化がみられらることから、それらの値がネットワーク分割結果に影響を与えることが示された。さらに、これらのケースを岐阜県全域を対象とする大規模な実ネットワークに適用し試算をおこなった結果、(a)と(c)のケースでは、どちらも岐阜市を含む都市部（岐阜県西部）と岐阜県東部を接続する断面によってネットワークが分断された。これより、この断面は重みの値に関わらず、比較的形状が脆弱な部分を本モデルで抽出可能であるといえる。ただし、(b)の場合にはネットワーク分割に大きな偏りがみられ、交通量がリンク容量を超過するリンクの扱いに課題が残っており、さらなる検討が必要であるといえる。

最後に、今後の課題を述べる。まず、リンク残存容量を重みとして適用する際、混雑度に比例する適当な重みを与えるなど交通量が超過しているリンクの扱いに工夫が必要である。また、Spectral Partitioning法を用いることで、最も脆弱な断面を求めたとして、その結果の交通ネ

ネットワーク信頼性分析における活用方法や従来の信頼性評価との関係性について、未だ明確にはできていない。そのため、ネットワーク整備や交通政策を考えるうえで、ここで提案した手法の活用方法について、検討を加える必要があるといえる。

#### 参考文献

- 1) Chen, A, Yang, H., Lo, H. K. and Tang, W. H., Capacity reliability of a road network : an assessment methodology and numerical results, *Transportation Research, Part B : Methodological*, 36(3), 225-52, 2002
- 2) Wakabayashi, H. and Iida, Y., Upper and lower bounds of terminal reliability of road networks: an efficient method with Boolean algebra. *Journal of Natural Disaster Science*, 14, 29-44, 1992.
- 3) Taylor, M., Sekhar, S. and D'Este, G., Application of access-ibility based methods for vulnerability analysis of strategic road networks, *Network and Spatial Economics*, Vol.6, No.3-4, pp.267-291, 2006
- 4) Kurauchi, F., Uno, N., Sumalee, A. and Seto, Y., Network evaluation based on connectivity vulnerability, *Transportation and Traffic Theory 2009: Golden Jubilee*, pp.637-649, 2009.
- 5) Spielman, D.A., *Spectral Graph Theory*, Lecture Note, accessed on 22nd, Apr, 17, <http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/561/> (2017/4/26 アクセス)
- 6) Cheeger, J., A Lower Bound for Smallest Eigenvalue of the Laplacian, *In Problems in Analysis*, 195-199, Princeton University Press, 1970.
- 7) Bandeira, A S, *Spectral Clustering and Cheeger's Inequality*, <http://cims.nyu.edu/~bandeira> (2017/4/26 アクセス)
- 8) von Luxburg, U, *A tutorial on Spectral Clustering*, <https://arxiv.org/abs/0711.0189>, 2007.
- 9) Bar-Gera, H., *Transportation Network Test Problems*, <http://www.bgu.ac.il/~bargera/tntp/> (2017/4/26 アクセス)
- 10) Yang, H., Bell, MGH, and Meng, Q., Modeling the capacity and level of service of urban transportation networks, *Transportation Research, Part B*, 34, 255-275, 2000.
- 11) Bell M G H and Iida, Y., *Transportation Network Analysis*, Pergamon, 1997.
- 12) Wong, S C, Yang, H, Reserve capacity of a signal-controlled road network, *Transportation Research, Part B*, 31(5), 397-402, 1997.
- 13) 本城勇介, 町田裕樹, 森口周二, 原隆史, 沢田和秀, 八嶋厚: 岐阜県飛騨圏域を対象とした道路斜面危険度評価, *土木学会論文集 C (地圏工学)*, Vol. 67, No. 3, 299-309, 2011.
- 14) 小坂宏彰, 高木朗義, 倉内文孝, 北浦康嗣: 道路途絶による社会経済損失を考慮した斜面災害リスク評価モデル, *土木計画学研究・講演集*, Vol.41, CD-ROM, 2010.

(2017. 4. 28 受付)

## Road Network Connectivity Evaluation based on Spectral Partitioning

Shuhei MYOKO, Fumitaka KURAUCHI and Hiroe ANDO