道路ネットワークのラプラシアン行列による 脆弱性解析

小林　俊一[1]・中山　晶一朗[2]・松井　千里[3]・若林　桂汰[4]

[1]正会員　金沢大学准教授　理工研究域環境デザイン学類（〒920-1192 金沢市角間町）
E-mail:koba@se.kanazawa-u.ac.jp

[2]正会員　金沢大学教授　理工研究域環境デザイン学類（〒920-1192 金沢市角間町）
E-mail: nakayama@staff.kanazawa-u.ac.jp

[3]非会員　ＷＤＢ

[4]学生会員　金沢大学大学院　自然科学研究科博士前期課程

東日本大震災や阪神淡路大震災などの経験から災害時でも機能する道路ネットワークの重要性が深く認識されるようになった．災害時にも機能できる道路ネットワークの整備のためには様々な方法があるが，道路ネットワークで脆弱な部分を特定し，その部分を補強することで道路ネットワーク強靭性を高めることが可能と考えられる．本研究では，道路ネットワークをグラフ化して得られるラプラシアン行列を基に，特定のノード固定条件を課した上で固有値解析を行う．そのうえで，得られた最小固有値の固有ベクトル成分値と固定ノードからの最短距離の関係を整理し，相対的に脆弱なノードを検出する手法を提案する．

Key Words: *Road network, Laplacian matrix, Vulnerability, Eigenvalue analysis*

1. はじめに

過去の大規模な地震災害，東日本大震災や阪神大震災などの経験を通して，災害時でも機能する道路ネットワークの重要性が深く認識されるようになった．災害時に機能する道路ネットワークを整備するためには，まず既存の道路ネットワークの脆弱な部分を特定することが必要である．いったん脆弱な部分が分かれば，その部分を重点的に補強することで，道路ネットワーク全体の強靭性を高められるはずである．そこで本研究では，道路ネットワークの脆弱性を検出するために，道路ネットワークのラプラシアン行列の固有値を利用する方法について論じる．

2. ネットワークとラプラシアン行列

最初に道路ネットワークのラプラシアン行列とその固有値解析を行うにあたって必要となる最低限の数学的背景を簡単にまとめておく[1),2)]．

(1) ラプラシアン行列の性質

道路ネットワークをノードとそれをつなぐリンクで表現し，その接続関係を隣接行列で記述する．ノード総数をnとすると，隣接行列$\mathbf{A}$は，n × nの正方行列で，その成分A_{ij}は，ノードi, jがリンクEで結ばれているときに1，結ばれていないときに0となる．

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, (i,j) \in E \\ 0, \ \ \text{otherwise} \end{cases} \qquad (1)$$

各ノードに接続するリンクの総数を次数と呼び，次数を対角成分とする行列を次数行列$\mathbf{D}$とよぶ．次数行列の対角成分D_{ii}は$D_{ii} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}$である．これらを用いラプラシアン行列を$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$と定義する．

つぎに，ラプラシアン行列の性質を見ておく．ラプラシアン行列は定義から明らかに対称行列である．またラプラシアン行列の2次形式は

$$\boldsymbol{x}^T \mathbf{L}\, \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\left(x_i - x_j\right)^2 \ \geq\ 0 \qquad (2)$$

と書けるため，ラプラシアン行列は半正定値である．ここにTは転置を表す．一般に，半正定値対称行列の固有値は必ず非負で，しかも固有ベクトルは互いに直交することが知られているので，ラプラシアン行列は以下の形でスペクトル分解できる．

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\ \mathbf{a}_i\, \mathbf{a}_i^T \right) \qquad (3)$$

ここにスカラーλ_iは固有値，ベクトル$\mathbf{a}_i$はそれに対応

する単位の固有ベクトル，演算子$\otimes$はテンソル積である．また単位固有ベクトル $\mathbf{a}_i$ は互いに直交するので，

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{4}$$

が成り立つ．ここにδ_{ij} はクロネッカーデルタである．ラプラシアン行列のスペクトル解析より，最小固有値λ_1 は必ずゼロとなり，その固有ベクトルは$\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$ である．ここにベクトル$\mathbf{1}$ は全ての成分が単位のベクトルである．またゼロ固有値の重複度はネットワーク内で独立した（互いに接続しない）部分グラフの数となる．さらにゼロ以外の最小固有値λ_2は代数的連結度（algebraic connectivity），それに対応する固有ベクトルはフィードラーベクトルと呼ばれ，ネットワーク連結性を表す指標である[3]．固有値λ_2 およびフィードラーベクトルはレイリー商

$$\boldsymbol{\lambda_2} = \min_x \frac{\boldsymbol{x^T L x}}{\boldsymbol{x^T x}},\ \mathrm{s.t.}\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = n \tag{5}$$

によって求められる．

同様の操作でリンクの重みを考慮することも可能である．この場合は，リンク長の逆数$1/l_{ij}$ を重みとした隣接行列

$$A_{ij} = \begin{cases} 1/l_{ij}, (i,j) \in E \\ 0,\ \ \text{otherwise} \end{cases} \tag{6}$$

を考えればよい．

(2) グラフカットへの応用

ラプラシアン行列のスペクトル解析をグラフのカットに応用する方法の 1 つが，比率カット（ratio cut）への応用である．比率カットとは，グラフをカットする際に部分集合に含まれるノード数を考慮したカットサイズ（＝カットされるリンク数）を意味する．グラフ V を部分集合 S でカットしたとき，カットをまたぐリンク数を

$$\partial(\mathrm{S}) = \{(u,v) \in E \mid u \in S, v \notin S\}$$

と表す．このとき，カットをまたぐリンク数を部分集合 S あるいは$\mathrm{V}-\mathrm{S}$に含まれるノード数の少ない方で除したカットパラメータ$\mathrm{h(G)}$を

$$\mathrm{h(G)} = \min_S \frac{|\partial(\mathrm{S})|}{\min(|S|,|V-S|)} \tag{7}$$

と定義する．ここで，カットパラメータ$\mathrm{h(G)}$の下限は非ゼロの最小固有値λ_2で抑えられることを示す．ベクトル$\mathrm{y}_i = \begin{cases} 1 & i \in S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ を導入すれば，カットをまたぐリンク数は$\partial(\mathrm{S}) = \boldsymbol{y^T L y}$ で表される．さらにすべての成分が 1 であるベクトル$\mathbf{1}$ およびノード数の比$\mathrm{s} = |S|/|V|$ を用いてベクトル$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathrm{s}\,\mathbf{1}$ を導入すれば，内積$\mathbf{x}\cdot\mathbf{1} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{1} - \mathrm{s}\mathbf{1}\cdot\mathbf{1} = |S| - s|V| = 0$より，ベクトル$\mathbf{x}$ はベクトル$\mathbf{1}$ と直交する．また内積$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} - 2\mathrm{s}\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{1} + \mathrm{s}^2\mathbf{1}\cdot\mathbf{1} = |S| - 2s|S| + s^2|V| = |S|(1-s)$ となる．さらに$\boldsymbol{L}\,\mathbf{1} = \mathbf{0}$ であるので$\partial(\mathrm{S}) = \boldsymbol{y^T L y} = \boldsymbol{x^T L x}$が成り立つ．これらに注意すると，

$$\lambda_2 \leq \frac{\boldsymbol{x^T L x}}{\boldsymbol{x^T x}} = \frac{\partial(\mathrm{S})}{|S|(1-s)} = \mathrm{h(G)} \tag{8}$$

となる．2 分割に対して，カットをまたぐリンク数をそれぞれの部分集合のノード数で割ったものの和が比率カットサイズである．

$$\frac{\partial(\mathrm{S})}{|S|} + \frac{\partial(\mathrm{S})}{|V-S|} = \frac{\partial(\mathrm{S})}{|V|}\left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{s}\right) = \frac{\partial(\mathrm{S})}{|S|(1-s)} = \mathrm{h(G)} \tag{9}$$

これはカットパラメータ$\mathrm{h(G)}$ に他ならない．したがって，グラフを 2 分割する最小の比率カットを求めることは，ラプラシアンの非ゼロ最小固有値を求める問題と関係づけられることが理解できる．

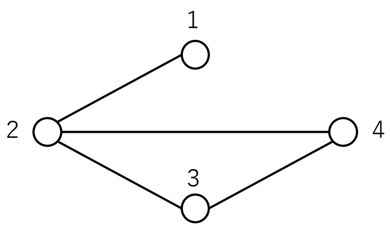

図-1 ネットワークの例

(3) 一次元バネ・質点系のアナロジー

ラプラシアン行列は一次元的に配置されたバネ・質点系の振動問題とも関係づけられる．**図-1** のネットワークを用いて説明する．

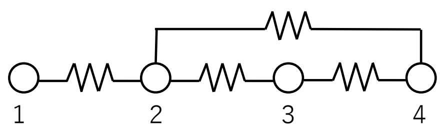

図-2 図-1 のネットワークに対応する一次元バネ・質点系

図−1 のネットワークのラプラシアン行列は

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

と書ける．これに対して**図-2** の 1 次元バネ・質点系の釣合い式を考える．

バネ定数や質量がそれぞれ一定値k, m とすれば，このバネ・質点系の運動方程式は

$$\mathrm{m}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

と書ける．ここにu_i は質点の変位である．角速度ω の

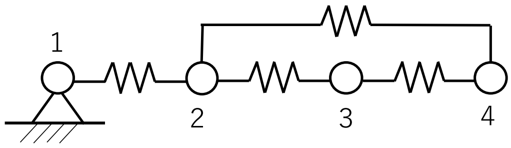

図-3 ノード固定条件付き一次元バネ・質点系

調和振動を考えれば，$\ddot{u}_i = -\omega^2 u_i$ となるので，以下の固有値問題と関連付けられる．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{m\omega^2}{k} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

この**図-2** の調和振動はノードの固定条件（ディリクレ境界条件）のない振動問題である．これに対して**図-3** に示すノード固定条件付きの振動問題を考える．

この場合，ノード 1 の変位に制約条件 $u_1 = 0$ が課される．ペナルティー法を用いれば運動方程式は以下の形で書ける．

$$\mathrm{m} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1+M & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{13}$$

ここに M はペナルティー定数で，十分に大きな正の数を与える．この振動問題の固有値解析では固定境界が与えられているため，剛体運動を表すゼロ固有値は出現せず，常に最小固有値は正の値を取る．

図-2, 3 の例題を用いて，ネットワーク構造をバネ・質点系のアナロジーとして理解してみよう．簡単のために質点の質量は全て単位量，またバネ定数も単位量としノード距離による重みは考慮しない．**図-2** の拘束フリーの自由振動問題では，第 2 最小固有値$\lambda_2 = 1.00$，第 2 最小固有値の固有ベクトル（フィードラーベクトル）$\mathrm{u}_2 = (0.82, 0.2E^{-15}, -0.41, -0.41)$ が得られ，バネ張力（絶対値）の最大値はリンク(1,2)に生じる．またフィードラーベクトルの成分に基づく符号分割を行えば，リンク (2, 3), (2, 4) で 2 分割可能であり，比率カットは$2/2 + 2/2 = 2$ となる．比率カットはその定義からも明らかなように 2 つの部分集合のノード数が均衡するグラフの分割であり，確かにそのような結果が得られている．一方，リンク張力に着目した場合，リンク (1, 2) は，リンク (2, 3) や (2, 4) のリンク張力の 2 倍，またリンク (3, 4) では無張力となっており，この情報からネットワークをカットすることは難しい．

これに対して**図-3** の固定境界を含む問題では，最小固有値 $\lambda_1 = 0.27$，固有ベクトル $\mathrm{u}_1 = (0.00, -0.46, -0.63, -0.63)$ が得られ，バネ張力（絶対値）の最大値はリンク(1,2)に生じる．固定ノード 1 からの距離に応じて一定の割合で伸びるモードが出現しており，また固定ノードに近い根元の部分に大きな張力（絶対値）が現れている．アナロジーとして，ある地点から中央集権的に物資や情報が伝達される状況がノード固定条件に相当すると理解したい．

3. 滋賀県緊急輸送道路ネットワークを対象にした検討

(1) 対象としたネットワークの概要

検討対象とした滋賀県緊急輸送道路ネットワークを**図-4** に示す．ノード数は 327，リンク数は 373，総延長 926.1 km である．滋賀県の地理的特徴として，中央部に県総面積の 1/6 を占める琵琶湖が位置する．湖南地区では東西方向に並行する形で複数の緊急輸送道路が走って

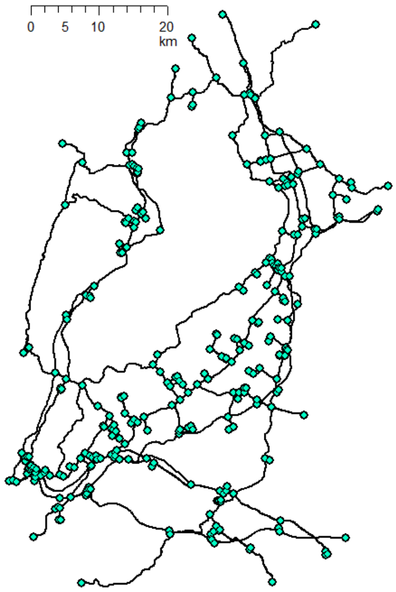

図-4 滋賀県緊急輸送道路ネットワーク

いるが，湖西や湖北地区では単一のリンクで接続している区間も多く冗長性が確保できていないことが分かる．

(2) ノード固定条件のないネットワークに対する固有値解析

これ以降の解析ではすべてのケースで，リンク距離の逆数で重みづけしたラプラシアン行列を用いる．まず，ノード固定条件のないネットワークに対して，ラプラシアン行列を作成し，固有値解析を行った．その結果，第 2 最小固有値は$\lambda_2 = 2.05\mathrm{E}^{-3}$，また**図-5** に示すフィードラーベクトルの成分分布が得られた． 図中の水色のノードでは，フィードラーベクトル成分がほぼゼロであるので，このあたり境として滋賀県緊急輸送道路ネットワークは県の北東部と南西部の 2 つに分割できることが分かる．また，フィードラーベクトルからリンク張力を計

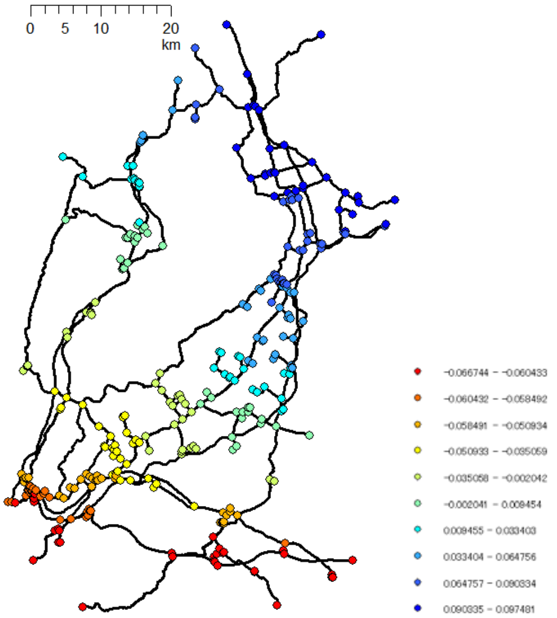

図-5　ノード固定条件のないネットワークのフィードラーベクトル成分分布

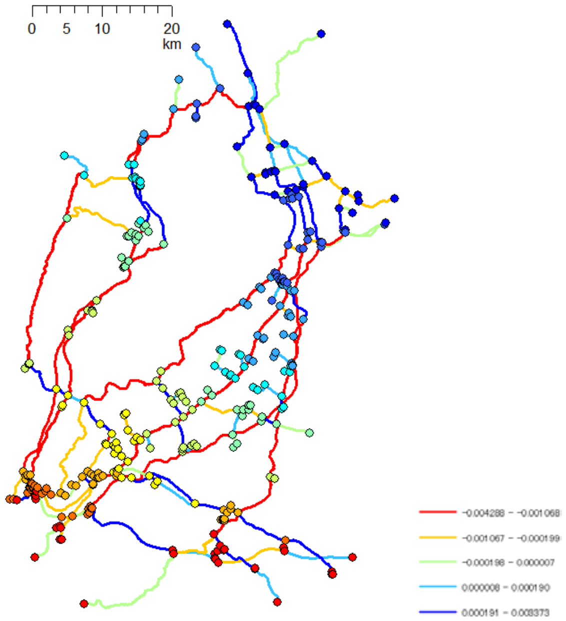

図-6　ノード固定条件のないネットワークの第 2 最小固有ベクトルに対応するリンク張力分布

算すると，図-6 に示すリンク張力分布が得られる．リンクの色は，赤色が引張力，青色が圧縮力に対応しており，北東～南西方向に走るリンクにおいて，いずれも高い引張力（赤）が生じていることが分かる．これらのリンクは比率カットによって切断されやすい方向である．一方，それとは直角方向にある，北西～南東方向に走るリンクにおいて圧縮力（青）が卓越するリンクが多いことも分かる．

これらの結果と道路ネットワークの役割を踏まえれば，比率カット最小化は，ネットワーク全体をほぼ同じノード数で合理的に分割するためには有用であるが，カット

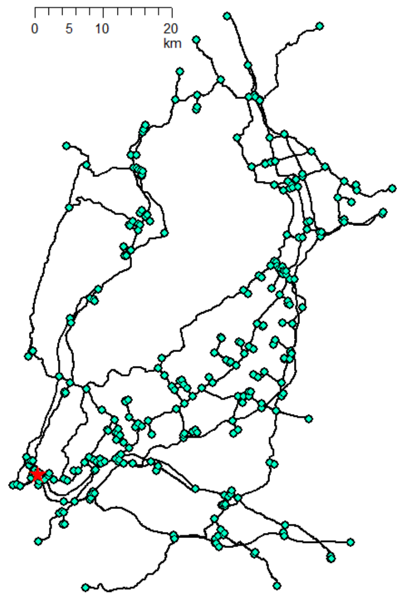

図-7　滋賀県庁（★）の位置と道路ネットワーク

されるノードの脆弱性と直接関係づけることは難しいように思われる．

(3)　ノード固定条件を考慮したネットワークに対する固有値解析

つぎに特定のノードに対して固定条件を課した場合の固有値解析の例を示す．

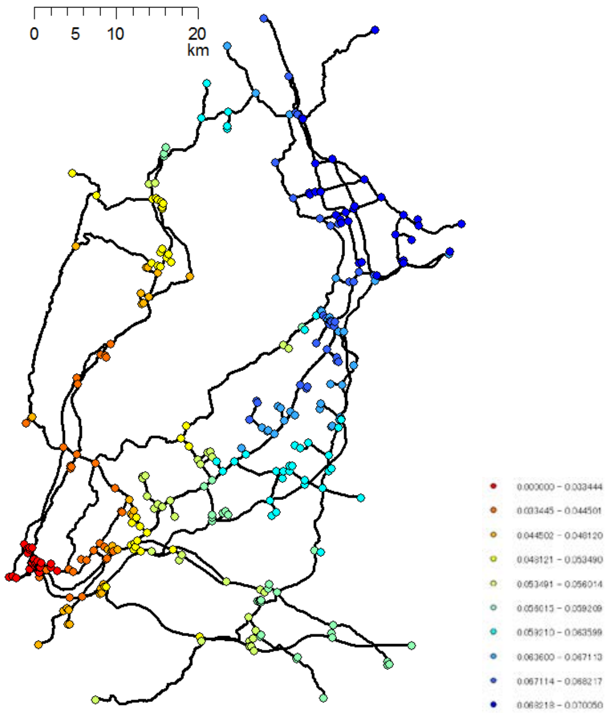

図-8　滋賀県庁ノードを固定したネットワークの固有ベクトル成分分布

a) 滋賀県庁のノードを固定した解析

滋賀県庁の位置と道路ネットワークのようすを**図-7** に示す．この問題の最小固有値は$\lambda_1 = 1.53\mathrm{E}^{-3}$で，固有ベクトルの成分分布を**図-8** に示す．固有ベクトルの成分は全て正で，値が大きくなるにつれて赤色～青色で表示されている．固有ベクトルの成分から計算したリンク張

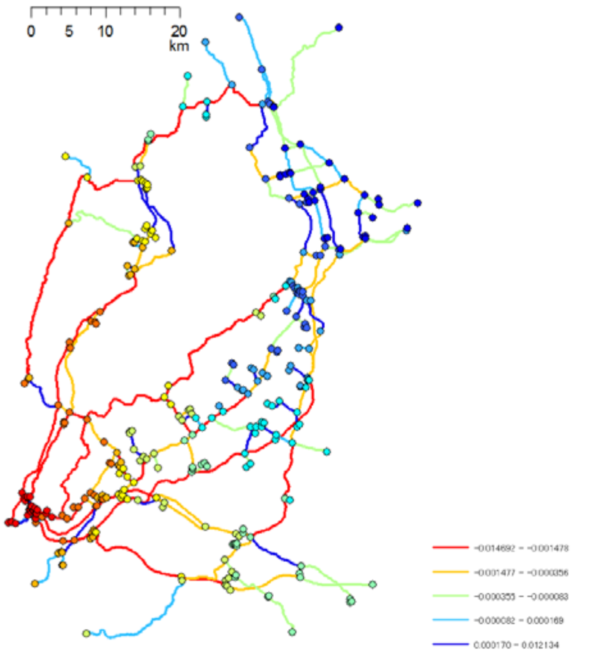

図-9 滋賀県庁ノードを固定したネットワークのリンク張力分布

力の分布を**図-9** に示す．赤色のリンクには大きな引張りが，青色のリンクには大きな圧縮が働いている．県庁を中心として遠方に延びる方向に大きなリンク張力（絶対値）が生じている．

これを Dijkstra 法[4]による最短距離と最小固有値固有ベクトル成分の関係をまとめたものが**図-10** である．滋賀県庁ノードを原点とし，原点からの距離の程度に応じて振幅が増えている様子が分かる．また全体的な傾向として，距離増加に対する固有ベクトル成分の増加の割合に着目すると，距離が短いエリアの方が増加割合が大きいことから，県庁に近いリンクの方が大きなリンク張力が作用する傾向があることも理解できる．

4. 脆弱性を検出する手法に関する検討

(1) 経路数と固有ベクトル成分の大きさの関係

滋賀県緊急輸送道路ネットワークの解析では，**図-10** に示すように，最短距離が同程度であっても，最小固有

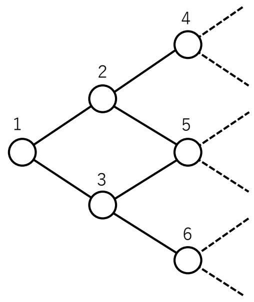

図-11 思考実験に用いるネットワーク

値固有ベクトルの成分値が異なるノードが存在することが分かった．これをもとにして，ネットワークの脆弱性を検出する手法について検討したい．思考実験として**図-11** に示すラティスモデルを用いる．このモデルでは，最短距離が等しく，最短リンク数で接続する経路数が二項分布にしたがうノード群が形成されているのが特徴である．最短距離が同じノード群であっても，固有値ベクトル成分が異なるケースが何を意味するのか，このモデルを用いて端的に示す．思考実験として，このネットワークについてラプラシアンを求め，根元のノード 1 に固定条件を付加して固有値解析を行う．最小固有値の固有ベクトル成分とノード 1 からの最短距離の関係を**図-12** に示す．等距離のノードであっても，経路数が 1 つしかないノードでは固有ベクトルの成分は大きく，経路数が増える にしたがって固有ベクトルの成分値が小さくなることが分かる．したがって，**図-10** に見られるような，最短距離が同じでも固有ベクトル成分の値が異なるノー

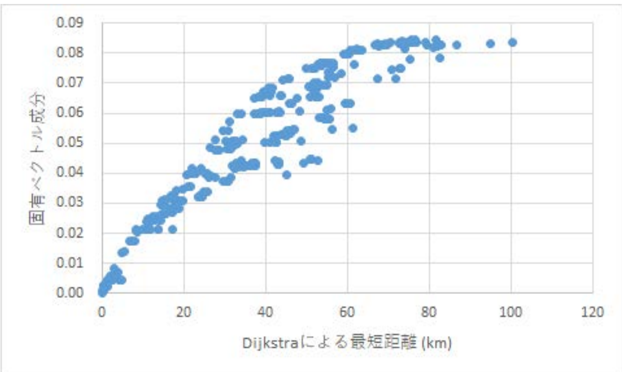

図-10 滋賀県庁からの最短距離と固有ベクトル成分の関係

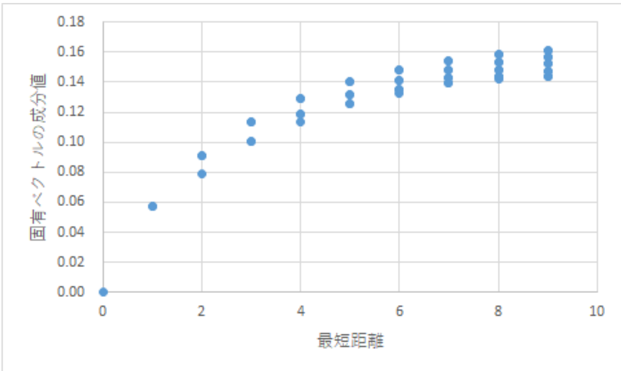

図-12 ラティスモデルの最短距離と固有ベクトル成分の関係

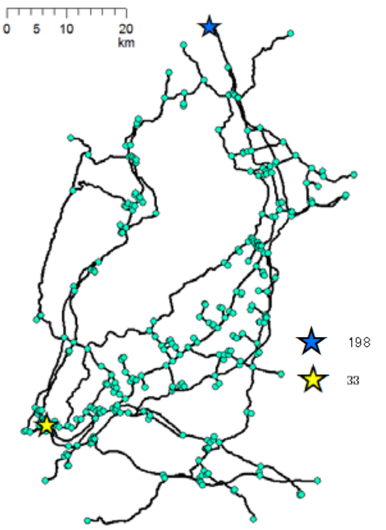

図-13　ノード198および33の位置と道路ネットワーク

ドがあることは，選択可能な経路数と関係づけられると解釈できる．

道路ネットワーク上の任意のノードが脆弱であるかどうかを判断する一つの基準として，経路数の多寡を用いる場合は，上記に示したように，ある固定ノードからの最短距離と，固定条件を付加したラプラシアン行列の最小固有値の固有ベクトル成分の関係を利用できる．すなわち，同じ最短距離であっても固有ベクトル成分の大きなノードは，経路数が相対的に少ないことを意味する．したがって，当該ノードは相対的に脆弱性が高いと判断できる．

(2) 固定するノードの選択とその意味

最後に，脆弱性を評価する際の固定ノードの選択について検討する．福井県境に接するノード198を固定したケースを検討する．**図-13**を参照すれば，ノード198は対象ネットワークの周縁部に属し，次数が1である特徴を有する．この固有値解析結果を**図-14**に示す．最短距離と固有ベクトル成分の関係において，滋賀県庁ノードを固定したケースよりも明らかにばらつきが小さいことが分かる．これは固定ノード周辺における経路選択の自由度が小さいことが影響しており，固定ノードよりも十分離れた地点での相互の接続性の影響が見えなくなっていることを表す．これは，他のノード間相互の接続性の影響が見えなくなるくらい，ノード198は脆弱性が高いともいえる．いずれにせよ，**図-14**から198以外のノードの脆弱性を検出することは難しいと言える．

上記の例からも明らかなように，固定ノード周辺に十分な経路選択性が存在することが，提案手法で脆弱性を検出するためには重要であると思われる．十分な経路選択性を表す指標として，固有ベクトル中心性という考え方がある[2]．ここでは，ノードの重要度を中心性と呼ぶ．ノードに接続するリンク数である次数が大きいほど，そのノードがネットワークに及ぼす影響は大きく，中心性が高いことは容易に想像できる．あるノードｉの中心性x_iが，隣接するノードの中心性の和で与えられるとすれば，中心性は

$$x_i \backsim \sum_j A_{ij} x_j \tag{14}$$

と書ける．

この式(14)を繰返し適用して収束計算を行い，単位の中心性ベクトル$\boldsymbol{x}$を求めることを考える．この繰返し計算過程では，固有ベクトル同士の内積を含むので，互いに異なる固有ベクトルどうしの内積が0なることに注意する．そうすれば，最終的には，中心性ベクトルは隣接行列の最大固有値固有ベクトルに収束するすることが分かる．得られた中心性ベクトルのうち，最大成分に対応するノードを固定するノードに選べば，経路選択性の高いネットワークの中心領域から脆弱性解析を行うことが可能となる．

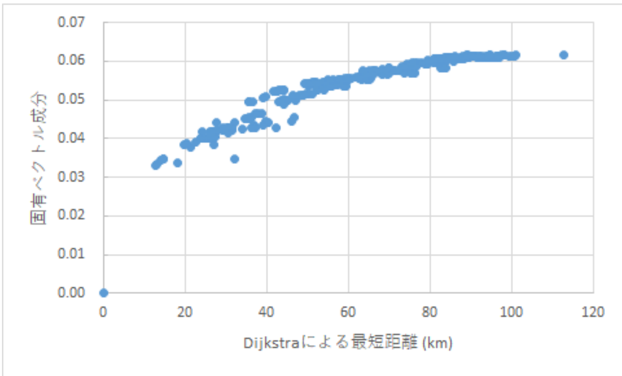

図-14　ノード198からの最短距離と固有ベクトル成分の関係

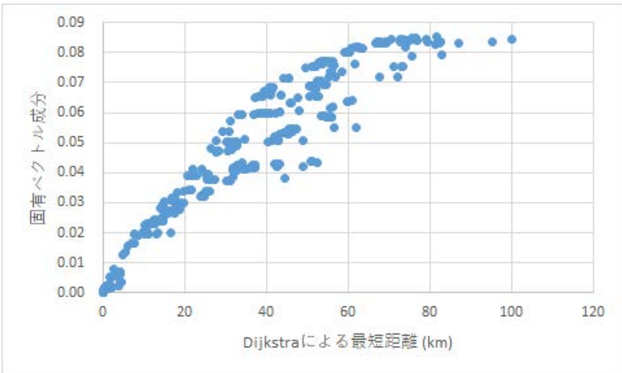

図-15　ノード33からの最短距離と固有ベクトル成分の関係

滋賀県緊急輸送道路ネットワークの場合は，中心性ベクトルの最大成分はノード33であった．このノード33を固定とした固有値解析の結果を**図-15**に示す．前出の**図-10**とほぼ同様の結果が得られていることが分かる．このノード33は滋賀県庁に隣接する地域にあり，**図-16**に示すように滋賀県庁からは0.54 kmだけしか離れてい

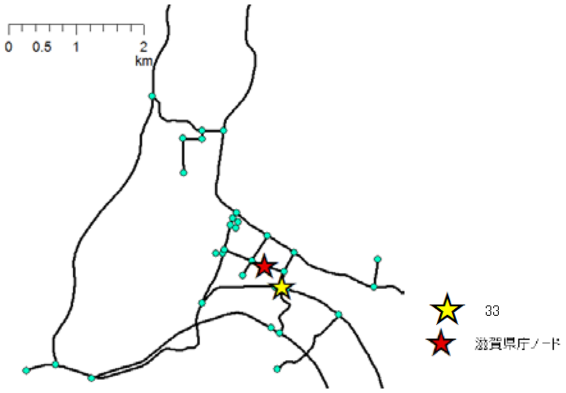

図-16 ノード33や滋賀県庁（ノード25）付近のネットワーク

ない市街地に位置する．このノードが中心性を有することは感覚的にも受け入れられる．また道路ネットワーク構造の観点から，滋賀県緊急輸送道路ネットワークでは，県庁付近がネットワーク中心性が高いことも確認できた．

5. まとめ

本論文では，道路ネットワークのラプラシアン行列を用いてネットワークの脆弱性を検出する手法について検討した．得られた結論は以下のとおりである．

道路ネットワークのラプラシアン行列に基づき，非ゼロの最小固有値固有ベクトルの成分による符号分割を行えば，ネットワークが最小比率カットによって 2 つに分割できる．つまり，ネットワークをほぼ均衡したノード数の 2 つのサブグループに分割できる．しかしながら，分割されるリンクを脆弱性の観点から説明することは容易ではない．

これに対して，一次元バネ・質点系のアナロジーを利用し，ある特定のノードの変位を許さない固定条件を課した固有値問題を取り上げた．この固有値問題は，固定ノードに対応する対角成分に十分大きなペナルティー係数を付加した（距離の重み付き）ラプラシアン行列の固有値問題として定式化可能である．この固有値問題は正定値対称行列の固有値問題に属する．最小固有値の固有ベクトルは全体としてみれば引張りモードに対応しており，ベクトルの成分は概ね固定ノードからの距離に応じて増加することが分かった．

滋賀県緊急輸送道路ネットワークについて，滋賀県庁を固定ノードとした，固定条件付き（距離の重み付き）ラプラシアン行列の固有値解析を実施し，最小固有値固有ベクトル成分と固定ノードからの最短距離の関係を整理すると，同様の最短距離であっても固有ベクトル成分が小さなノード群が存在することが分かった．ネットワーク構造の観点からそれらのノード群の意味付けを行うため，ラティスモデルによる思考実験を実施した．思考実験によれば，同じ最短距離であっても選択可能な経路数が多いほど，固有ベクトルの成分値が小さくなることが分かった．実際の道路ネットワークはラティスモデルのようには単純化できないが，同様の最短距離であっても固有ベクトル成分が小さなノード群は経路選択の面で自由度が大きいノード群であると考えられる．一方，固有ベクトル成分が大きなノード群は経路選択の自由度が乏しいことから，相対的に高い脆弱性を有すると言える．

固定するノードの選択が，固定条件付きラプラシアン行列の固有値解析に与える影響についても，滋賀県緊急湯疎道路ネットワークを取り上げて調査した．その結果，ネットワーク周縁部に位置する経路選択の面で自由度の乏しいノードに固定条件を課した場合には，固定ノード周辺の影響が強く反映され，他ノード間の接続性が有する特性があまり見えない結果となる．これは，ネットワークの接続性の観点において，中心性の高いノードを選択する必要があることを示唆する．固有ベクトル中心性の考え方を用いれば，隣接行列の最大固有値固有ベクトルの最大成分にあたるノードが中心性の高いノードである．このノードを固定条件とした固定条件付きラプラシアン行列の固有値解析を実施し，最短距離と固有ベクトル成分との関係を整理すると，経路選択の自由度を反映したデータのばらつきが明瞭に出現した．

これらの結果は，道路ネットワークの構造に起因する脆弱性を検出するための具体的な手法を示唆する．すなわち，以下の手順による手法である．

(1) 隣接行列の最大固有値固有ベクトルの最大成分に当たるノードを固定ノードに選定する．
(2) 固定条件付きラプラシアン行列の最小固有値固有ベクトルの成分と固定ノードからの最短距離の関係を整理する．
(3) 同程度の最短距離となるノードのうち，固有ベクトル成分の大きなノードを，相対的に脆弱性が高いノード群として分類する．

最後に，今後の研究の展望についてコメントする．本研究では，道路ネットワーク構造に関わるデータのうち，リンクに関するデータ，起終点ノード番号とリンク距離のみを用いて解析を行った． バネ・質点系のアナロジーからも理解できるように，（少なくとも）2 次元的に広がっていると感覚的には捉えてしまいがちな道路ネットワークを 1 次元的な世界で解析したと言える．最短距離との関係で整理することもまた，1 次元的な世界を反映している．道路ネットワークが社会的に要求される機能を勘案すれば，ノード自身の社会的重要性やリンクの強度あるいは容量を考慮した脆弱性評価が必要となる．これらの要素を今回の解析手法に導入するためには，質点質量やリンク張力の限界値などのモデル化を適切に行

う必要があると考えている．

謝辞：本研究の一部は，国土交通省国土技術政策総合研究所の委託研究により実施したものである．ここに記して謝意を表する．

参考文献

1) 仁平政一・西尾義典：グラフ理論序説改訂版，プレアデス出版，安曇野，2001.
2) 矢久保考介：複雑ネットワークとその構造，共立出版，2013.
3) Fiedler, M.: Algebraic connectivity of graphs, *Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 23, pp. 298-305, 1973.
4) Dijkstra, E.W.: A note on two problems in connexion with graphs, *Numerische Mathematik*, Vol. 1, pp. S. 269-271, 1959.

(2017. 4. 28 受付)

VULNERABILITY ANALYSIS WITH LAPLACIAN MATRICES OF ROAD NETWORKS

Shun-ichi KOBAYASHI, Shoichiro NAKAYAMA, Chisato MATSUI and Keita WAKABAYASHI

After experiencing huge disasters, such as 2011 Tohoku earthquake, 1995 Hanshin-Awaji earthquake, people have noticed the importance of road networks even functioning at the severest time. To develop disaster proof road networks, it is necessary to specify vulnerable sections in exsisting networks, and reinforce such sections to enhance the resilience of those networks. In this study, the authors propose a simple method based on only geometrical information of a road network to detect its vulnerabilities. Laplacian matrix of a network under an additional fixed node condition is firstly calculated. Then, its eigenvalue analysis is carried out to summarize a relation between the least node distances and components of the eigenvector of the least eigenvalue. The data are scattered due to the differences of a degree of path numbers and can be separated from the point of vulnerability. Its applicability is discussed with small thinking tests and some calculations about a real road network of Shiga prefecture.