

Network Scienceを援用した 交通ネットワーク信頼性分析の可能性

倉内 文孝¹

¹正会員 岐阜大学教授 工学部社会基盤工学科 (〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸1-1)

E-mail: kurauchi@gifu-u.ac.jp

ネットワークに関する研究は古くは18世紀にさかのぼることができるが、Network ScienceあるいはComplex Networkと呼ばれる研究分野は、近年ネットワーク形状を数学的に記述することが提案され、かつネットワークに関する膨大な情報が入手可能となったことにより精力的に研究が進められているものである。本研究では、交通ネットワーク信頼性解析にNetwork Scienceを援用することを考える。Network Scienceの世界で示されている頑健性指標と交通工学の分野の中での様々な指標との関係性を考察することで新たな交通ネットワーク信頼性解析手法に向けた検討を加えたい。

Key Words : Network Science, Distinct Paths, Network Capacity, Network Entropy

1. はじめに

災害発生後の状況下では、重傷患者の搬送や物資輸送、復旧復興支援のための輸送などに使われるなど、平常時より増して道路の役割は重要になる。一方、地震・豪雨などの自然災害によって道路閉塞が生じる可能性があり、道路は必ずしも頑健とはいえない。道路網の一部区間の不通によって、集落の孤立や長大な迂回を余儀なくされるなどの悪影響が生じる可能性がある。このため、道路網が深刻な機能不全に陥らないよう、道路不通時の影響を最小限にとどめる対策が重要である。

災害時の影響を把握するための一般的な手法には、事象の発生確率とその事象が生じた際の損失との積の和（損失の期待値）を用いたリスク評価があり、リスクマネジメントを対象とした研究や河川事業・斜面防災の事業評価等で広く用いられている。例えば、Nicholson and Dalziel¹⁾は、ニュージーランドの道路網を対象にリスク評価を行い、高頻度で影響度の小さな事象（冰雪による道路閉塞）は、低頻度で影響度の大きな事象（地震による道路閉塞）よりも経済への影響が大きく優先順位が高いことを示している。一方で、小林²⁾は、リスク評価の主要な対象が高確率で影響度の大きな事象であり、低確率の事象は、損失が大きかったとしても、リスクの小さいものと扱われてしまう可能性がある」と指摘している。

交通ネットワークの研究分野では、災害時の影響を緩和することを目指して多くの研究が蓄積されてきた。そ

れらの研究経緯と課題は、初期から90年代前半の研究について整理した岡田³⁾、最近までの研究を整理した中山⁴⁾、研究課題のフレームを整理した倉内⁵⁾のレビューが詳しい。現在、低頻度で影響度の大きな事象をどのように考慮するかという研究課題があり、一つの方向性として事象の生起確率には重きをおかず事象の影響度のみに着目するネットワーク脆弱性の考え方が提案されている。Taylor et al.⁶⁾はリンクの被災によって、アクセシビリティが大幅に減少するノードを脆弱性の高いノードと定義している。Bell⁷⁾は総走行時間を最大化しようとする邪悪な存在とそれを避けようとするドライバーとの間のゲームの帰結として、ネットワークの総走行時間の増加に影響の大きなリンクを抽出する方法を提案している。また、Kurauchi et al.⁸⁾はリンク途絶によってネットワーク容量の減少が大きなものを重要なリンクとする容量脆弱性の考え方を提案している。ただし、容量を考慮する場合、交通需要のインプットは不可欠であり、需要の大きさによって異なる結果となる可能性がある。また、非常時の交通需要は平常時のそれとは大きく異なり、平常時のデータを用いて議論することは適切ではないといえる。

このような背景のもと、Kurauchi et al.⁸⁾は、交通需要を扱わず、到達の可能性を評価する接続脆弱性の概念を提案している。接続脆弱性とは、「二点間の接続性について、途絶確率を考慮せず途絶発生時の影響のみによるネットワークの弱さ」と定義することができ、この値によりネットワーク全体の接続性に影響を及ぼす重要なリン

クや接続性が失われやすい脆弱なノードを見つけ出すことが可能である。Kurauchi et al.⁹⁾では、二地点間のリンクを共有しない独立な経路（非重複経路）を数え上げることで、確率を扱わず被災時の到達の可能性を評価している。また、倉内ら¹⁰⁾は、この考え方を台湾道路ネットワークに適用し、ある接続性を確保する場合における全ての出発地と複数の災害対策センターとの走行時間の最小化問題を解き、施設配置問題に応用している。さらに、原田ら¹¹⁾は、先行研究の方法を拡張し、Taylor et al.⁹⁾の提案する脆弱性の考え方と合致する評価方法を構築した。

また、ネットワークの接続性、連結性の研究は従来から行われており、例えば若林・亀田¹²⁾、若林¹³⁾は、ロマ・プリエタ地震や阪神淡路大震災を対象とし、連結信頼度指標を用いた連結信頼性評価を行っている。さらに、南ら¹⁴⁾は、拠点医療施設への2系統アクセスを保証するためのネットワーク構造を検討している。

上記の筆者らの接続性に関する一連の研究や、連結信頼性指標を活用した研究においては、ネットワーク容量計算や混雑度計算のように配分計算を必要としないものの、最短経路探索アルゴリズムを援用することや、途絶可能性の数え上げなど特に大規模ネットワークにおいては計算が困難であるものが多い。さらに、Kurauchi et al.⁹⁾でも指摘されているとおり、接続性評価においては、取り扱うネットワークの詳細度や範囲により結果が変化する危険性がある。そのため、大規模ネットワークにおいても容易に計算できる方法論の構築が求められている。

本研究では、このような大規模ネットワークにおける信頼性評価のために、Network Science の知見を援用することを考えた。Network Science とは、複雑なネットワーク（Complex Network）やシステムを研究するプラットフォームである。たとえば、2013 年に創刊された Network Science の Editorial¹⁵⁾には、以下のように表現されている。

“we view network science as the study of the collection, management, analysis, interpretation, and presentation of relational data.”

この文言を見る限り、関連するデータ間の分析や解釈全般を含むことになる。高度に複雑化した現在では、「どこにでもネットワークは存在」し、それらを分析するための科学（Science）は重要な意味を持つだろう。また、当然ながらNetwork Scienceの文脈において、ネットワークやシステムが有効に機能することは重要な評価指標であり、それゆえNetworkの脆弱性（Vulnerability）、頑健性（Robustness）、そして強靱性（Resilience）に関連する分析論も多く提案されている。本稿においては、Network Scienceの考え方を交通ネットワーク信頼性解析に適用するための第一歩として、ネットワークの性質を表す指標と交通工学的知見からの指標との関係性を考察した結果を示す。

本論文の構成は以下の通りである。1.では、本研究の背景と目的を述べた。2.では、ここで活用する、交通工学的観点からのネットワーク評価指標について説明する。続いて、3.ではNetwork Scienceの分野で活用される基本的な指標についてその定義と性質について述べる。さらに、4.ではこれらの指標間の関係性について簡単なネットワークで考察を行う。5.において、本研究で得られた知見をまとめ、今後の展開の可能性を論じる。

2. 交通工学的な信頼性評価指標

(1) 非重複経路本数

交通ネットワークの評価にあたり、脆弱性の観点を重視し、事象の発生確率ではなく、生起した後の事態の深刻さを計測する指標として、Kurauchi et al.⁹⁾は、非重複経路本数を数え上げる方法を提案している。これは、ODペア間について、「リンクを共有することなく接続可能な経路の本数」を意味しており、もしODペア間に n 個の非重複経路が存在する場合、最悪 $n - 1$ 個のリンクが途絶したとしても接続性を保つことが保証される。重複性の低いネットワーク形状であれば、最悪ケースにおいても十分な接続性を確保することが可能といえるだろう。

今、道路ネットワークを $G(\mathbf{V}, \mathbf{E})$ の有向グラフとして表す。ただし、 $\mathbf{V}$ はノード集合、 $\mathbf{E}$ はリンク集合である。また、 x_a を二値の決定変数とし、あるリンクが非重複経路を構成していれば1そうでなければ0とする。ODペア ij 間に存在する非重複経路の数を n_{ij} とすると、次の3つの条件が満たされている必要がある；1)非重複経路を構成するリンク集合のうち、出発ノード i に接続している流出方向のリンク数と到着ノード j に接続している流入方向のリンク数はどちらも非重複経路数 n_{ij} に等しい。2)非重複経路を構成するリンク集合のうち、途中のノード $e(e \in \mathbf{V}, e \neq i, j)$ に接続する流入方向のリンク数と流出方向のリンク数は等しい（フローの保存）。3)出発ノード i へ流入するリンクと到着ノード j から流出するリンクは経路を構成するリンク集合には含まれない。これより、ODペア ij 間において、所与の非重複経路 N 本を保証しつつ、経路の所要時間の総和が最小となる最適化問題は、次のように記述することができる。

$$\max_{N_{ij}} N_{ij} \quad (1)$$

subject to

$$\sum_{a \in \text{out}(i)} x_a = N_{ij}, \sum_{a \in \text{in}(i)} x_a = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{a \in \text{out}(j)} x_a = 0, \sum_{a \in \text{in}(j)} x_a = N_{ij} \quad (3)$$

$$\sum_{a \in \text{out}(e)} x_a = 0 - \sum_{a \in \text{in}(e)} x_a = 0 \quad (4)$$

$$\forall e \in \{e \in \mathbf{V}, e \neq i, j\} \quad (4)$$

$$x_a = \{0, 1\}, e \in \mathbf{V}, e \neq i, j \quad (5)$$

ここで、 N_{ij} はODペア ij 間の非重複経路数（未知変数かつ目的関数）， $out(e)$ はノード e からの流入リンク集合， $in(e)$ はノード e への流入リンク集合である．この問題は制御変数 x_a が0-1変数である線形計画問題であり，与えたネットワークの任意のODペア ij について存在する非重複経路数 N_{ij} が求まる．ここでは，非重複経路の最大本数を求めることができるが，どのような経路を選択するかは決められておらず，一意には決まらない．Kurauchi et al.⁹⁾においては，この問題を解いて得られた最大非重複経路数を制約条件として，それらの経路の所要時間の総和が最小となる，「最短 n 番目非重複経路」を求めることも行っているが，ここでは純粋な接続本数に分析をとどめておく．

非重複経路本数はODペアごとに求まるものである．そのため，ODペア数が多ければその分上記の最適化問題を繰り返す必要がある．一方で，災害時の機能評価を考える場合，ある地域の防災機能の評価する際に特定の地域への接続ではなく，「他の地域への接続」を評価すれば十分であるともいえる．これについては，仮想の到着セントロイドを設定し，自身以外のセントロイドからそこまでの仮想リンクを設定することで評価が可能である¹¹⁾．

(2) ネットワーク容量

非重複経路数は，ODごとあるいはある地域を評価するための指標であった．一方で，ネットワーク全体の性能評価のための指標として，ここではネットワーク容量（Network Capacity）を取り上げる．ネットワーク容量とは，「所与のODパターンの元，ネットワークに渋滞が起こることなく受け入れ可能な交通量」と定義することができる．これを求めるためには，所与の需要をリンクに割り当てる必要があり，一般的には利用者均衡配分を仮定して交通量を割り当て，交通量が容量を超えない需要レベルを求める2レベル最適化問題として定式化される¹⁰⁾．ネットワーク容量は，現時点の交通需要に対してネットワークが十分な機能を有しているのかを判断するために有用な指標といえる．さらに，現在の需要に対してそれぞれのリンクがどの程度余裕があるかについても，様々なサービス変動に対する有用な情報を与える．この指標は，「供給予備力（reserved capacity）」と呼ばれ，ネットワークの余裕量を示す指標である¹⁷⁾．

ネットワーク容量を算定するにあたり，利用者均衡配分を下位問題として取り扱う場合，上位問題が生成交通量の1変数の最適化問題ではあるものの候補解ごとに利用者均衡状態を求める非線形最適化問題を解く必要があり，計算効率性は高くない．そのため，ここでは，容量制約つき直角関数利用者均衡配分（Capacitated User Equilibrium Assignment with right-angle function）¹⁰⁾を用いることと

した．この手法は，配分問題としては総走行時間最小化問題を解くことで最適リンク交通量を求めるが，一方で容量を超えるリンクに対してはシャドウプライスとして遅れ時間を加味し，各ODペア間の等時間原則を表現する方法論である．一般的なBRT関数などをベースにした利用者均衡配分とは得られるフローは異なるが，線形計画問題として利用者均衡配分問題を解くことができるため，計算負荷が大きく軽減されることが特徴的である．この問題は次のように定式化できる．

$$\max_x Z \quad (6)$$

subject to

$$\begin{aligned} \sum_{a \in in(i)} x_{ad} - \sum_{a \in out(i)} x_{ad} = & \\ \begin{cases} -Zg_{id} & \text{if } i \in \mathbf{O} \\ \sum_{j \in R-d} Zg_{ji} & \text{if } i = d, \forall d \in \mathbf{D} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\sum_{d \in \mathbf{D}} x_{ad} \leq s_a \quad \forall a \in \mathbf{E} \quad (8)$$

$$x_{ad} \geq 0 \quad \forall a \in \mathbf{E}, d \in \mathbf{D} \quad (9)$$

ただし， Z ：総生成交通量（未知変数，ネットワーク容量）， x_{ad} ：目的地 d に向かう交通のうち，リンク a を通る交通量（未知変数）， g_{od} ：OD確率（ $\sum_{od} g_{od} = 1$ ）， s_a ：リンク a の容量， $\mathbf{O}$ ：出発地集合， $\mathbf{D}$ ：目的地集合， $\mathbf{E}$ ：リンク集合．

なお，ネットワーク容量は，所与のODパターンを前提をしているため，災害時に生じうるODパターンとは異なる可能性がある．一方で，災害時にはODパターン自身が変化するため，災害時のネットワーク機能を表現しているとは限らない．しかしながら，平常時の交通需要を処理可能であるネットワークであれば，少なくとも平常時に向けて回復する交通需要を対処できるといえるため，災害に対する耐性は高いといえるだろう．さらに，Kurauchi et al.¹⁰⁾はネットワーク容量を評価指標とし，混雑が発生しない条件にてこれを最大化する，つまりネットワークの効率性を最大化する災害発生後のエリア交通規制方法を提案している．

3. Network Scienceに基づく評価指標

本章では，Network Scienceに関連した評価指標について説明する．また，それらの指標を計算するための基礎指標についても言及する．

(1) 基礎的な指標

ここでは，特にスペクトラルグラフ理論²⁰⁾を活用することを考える．スペクトラルグラフ理論とは，グラフの持つ特性を隣接行列，ラプラシアン行列などを活用して考察するものである．なお，ここで取り扱うのは無向リ

リンクとする。

a) 隣接行列

隣接行列 (Adjacency matrix) とは、ネットワーク上の接続関係を表現するものである。今、ネットワークが $G = (V, E, w)$ で表現されるものとする。ただし、 V はノード (vertex) の集合、 E はリンクの集合、そして w は各リンクに紐付けられた重み (> 0) であるとする。このとき、隣接行列 A_G は、大きさ $|V| \times |V|$ であり、以下を要素に持つ行列である。

$$a_{uv} = \begin{cases} w_e & \text{if } e = (u, v) \in E, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

つまり、ネットワーク上のノード u から v に向けてリンクがある場合、そのリンクに対応する重み w_e を要素に持つ。もし、重みを考慮しない場合、 $w_e = 1$ とする。無向リンクの場合隣接行列 A_G は対称行列となる。

b) 次数行列

次数行列とは、重みがない場合には各ノードに流入、あるいは流出するリンクの数になる。また、重み付きの場合には、その重みの和である。

$$d_{uu} = \sum_{v \in V} a_{uv}, u \in V. \quad (11)$$

なお、無向リンクの場合にはこの値は列和をとっても行和をとっても一致する。なお、上記の d_{uu} を対角行列にもち、それ以外の要素をゼロとする行列を次数行列 D_G と定義する。

c) ラプラシアン行列

ラプラシアン行列とは、隣接行列および次数行列を用いて以下のように定義できるものである。

$$L_G = D_G - A_G \quad (12)$$

定義より、ラプラシアン行列の列和あるいは行和はゼロになる。

d) 正規化ラプラシアン行列

正規化ラプラシアン行列とは、ラプラシアン行列の対角要素を 1 に正規化したものであり、以下の通り定義できる。

$$N_G = D_G^{-0.5} L_G D_G^{-0.5} \quad (13)$$

(2) 固有値

$n \times n$ 行列 M が対称行列である場合、実数の固有値が存在する。隣接行列 A_G の n 個の実数の固有値を $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n (\mu_1 \geq \mu_2, \dots, \mu_n)$ とし、またそれに対応した n 個の互いに直交する固有ベクトル $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ と置くことにする。このとき、最大固有値 λ_1 およびこれに対応する固有ベクトル ψ_1 は以下のレイリー商を最大化する問題の解として定式化できる。

$$\mu_1 = \max_x \frac{x^T A_G x}{x^T x} \quad (14)$$

$$\psi_1 = \arg \max_x \frac{x^T A_G x}{x^T x} \quad (15)$$

さらに 2 番目以降の i 番目固有値については、それまでに見つかった $i-1$ の固有ベクトルと直交しつつ、レイリー商を最大化するものとして、以下のようにかける。

$$\mu_i = \max_{x \perp \psi_1, \dots, \psi_{i-1}} \frac{x^T A_G x}{x^T x} \quad (16)$$

$$\psi_i = \arg \max_{x \perp \psi_1, \dots, \psi_{i-1}} \frac{x^T A_G x}{x^T x} \quad (17)$$

続いて、ラプラシアン行列の二次形式について考えてみる。以下のように書くことができる。

$$x^T L_G x = \sum_{(u,v) \in E} (x(u) - x(v))^2 \quad (18)$$

この値はいかなる x であっても正の値となるため、ラプラシアン行列の固有値は負になることはない。また、ラプラシアン行列の定義より、ベクトル x をすべての要素が 1 のベクトルとすると、レイリー商の値はゼロになる。つまり、ラプラシアン行列の固有値を小さなものから順に $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ とおくと、 $\lambda_1 = 0$ となる。ラプラシアン行列の 2 番目最小固有値は、「グラフの幾何学的接続度 (Algebraic Connectivity of Graphs)」と呼ばれている²⁰⁾。ラプラシアン行列と同様に、正規化ラプラシアン行列の固有値も非負となり、さらに少なくとも 1 つはゼロをとる。この固有値を $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$ とおくことにする。

(3) 接続性指標とその上下界値

グラフ特性を表す隣接行列、ラプラシアン行列および正規化ラプラシアン行列の固有値は、様々な接続に関連する指標の上界・下界値を与えることが示されており、それ自身が接続性の指標になり得る。

a) ネットワークエントロピー (Network Entropy)

Demetrius and Manke²²⁾ は、ネットワークの頑健性を表す指標として、Network Entropy を提案している。ここでは、ネットワーク上の情報の移動を Markov 行列 $P = (p_{ij})$ による確率過程と仮定する。 p_{ij} は、状態 i から j への繊維を意味しており、 $\sum_j p_{ij} = 1$ 、その定常分布は、 $\pi = \pi P$ である。このプロセスの動的エントロピー $H(P)$ をネットワークエントロピーと定義し、次のように記述できる²²⁾。

$$H(P) = \sum_{i=1}^N \pi_i H_i, \text{ where } H_i = -\sum_j p_{ij} \log p_{ij} \quad (19)$$

また、ネットワークエントロピーは、ある特定の Markov 行列 P を用いることで、以下のように記述できる。

$$\log \mu_1 = -\sum_{ij} \pi_i p_{ij} \log p_{ij} + \sum_{ij} \pi_i p_{ij} \log a_{ij} \quad (20)$$

さらに、隣接行列の要素の値が 0-1 の時、すなわちリンクの重みを考慮しない場合には、(20) 式の右辺第 2 項はなくなり、 $H = \log \mu_1$ となる。したがって、ネットワークエントロピーの値は、重みのない隣接行列であれば第 1 最大固有値の対数 (この場合の底は 2) をとったものになる。さらに、Demetrius and Manke²²⁾ は、ネットワ

ークエントロピーの値がシステムの頑健性と比例関係であることをしめしている。

なお、 H は、ネットワークの平均次数 $\bar{d}$ および最大次数 $d_{\max}$ の対数値により上下界値が与えられることが示されている²³⁾。

$$\max\{\log \bar{d}, 0.5 \log d_{\max}\} \leq H \leq \log d_{\max} \quad (19)$$

b) ネットワーク接続性

グラフのサブセットを $\mathbf{S}$ と定義しよう。今、全体のグラフ $\mathbf{V}$ からあるサブセット $\mathbf{S}$ を分離することを考える。このとき、 $\mathbf{S}$ とそれ以外とをつなぐリンクの数を数えることとする。以下を定義する。

$$\partial(\mathbf{S}) \equiv \{(u, v) \in \mathbf{E}: u \in \mathbf{S}, v \in \mathbf{V} - \mathbf{S}\} \quad (20)$$

このとき、以下のようなベクトル $\mathbf{x}_S$ を考える。

$$x_S(u) = \begin{cases} 1/m & \text{if } u \in \mathbf{S} \\ 1/(m-n) & \text{if } u \in \mathbf{V} - \mathbf{S} \end{cases} \quad (21)$$

ここで、 m はサブセット $\mathbf{S}$ に含まれるノードの個数である。このとき、 $\mathbf{x}_S \perp \mathbf{1}$ であることは明らかである。以上より、

$$\lambda_2 \leq \frac{\mathbf{x}_S^T \mathbf{L}_G \mathbf{x}_S}{\mathbf{x}_S^T \mathbf{x}_S} = \frac{n}{m(n-m)} \sum_{e \in \partial(\mathbf{S})} w_e \quad (22)$$

と書くことができる。つまり、ラプラシアン行列の第 2 最小固有値は、式(22)で表される指標の最小値をとる。ここで、右辺の値を最小にすることを考えよう。まず分数部分について、 n が所与であることを鑑みると、 m と $n-m$ がほぼ同数、つまりサブセット $\mathbf{S}$ と残余セット $\mathbf{V} - \mathbf{S}$ のノード数がほぼ等分されることにより最小になる。また、シグマの中は境界に属するリンクの重みの和である。つまり、「境界リンクの重みの和が最小になりつつネットワークをほぼ 2 等分になるような事象の起きやすさ」を λ_2 が表しているといえる。ちなみに、元々ネットワークが非連結である場合には、部分グラフの数の分の λ_i の値がゼロになる。

c) コンダクタンス (conductance) と Cheeger 定数

コンダクタンスとは、以下のように定義される²⁰⁾。

$$h(\mathbf{S}) = \frac{1}{\min[d(\mathbf{S}), d(\mathbf{V}-\mathbf{S})]} \sum_{e \in \partial(\mathbf{S})} w_e \quad (23)$$

ただし、 $d(\mathbf{S})$ はサブセット $\mathbf{S}$ の次数の和を表す。コンダクタンスも接続性を示すひとつの指標であり、この値が最小のものを Cheeger 定数 h_G と呼ぶ。

$$h_G = \min_{\mathbf{S} \subset \mathbf{V}} h(\mathbf{S}) \quad (24)$$

また、Cheeger 定数の上下界値は Cheeger 不等式により、

$$0.5v_2 \leq h_G \leq \sqrt{2v_2} \quad (25)$$

と示されており、正規化ラプラシアン行列の第 2 最小固有値 v_2 により規定される。

(4) まとめ

以上 Network Science に関連し、信頼性や頑健性を表す指標を示した。それらは隣接行列、ラプラシアン行列、および正規化ラプラシアン行列の固有値により上下界値が与えられるものであり、逆にいえば、それらの行列の固有値を代理指標としてネットワークの信頼性、頑健性評価が可能となると期待できる。次章では、それぞれの特性や指標の意味を踏まえ、それらと関連性の高い交通工学的視点からの指標との関係性を探る。

4. 指標間の関係性

(1) 非重複経路数

式(19)に示されたとおり、Network Entropy 指標 H は平均次数あるいは最大次数により範囲が規定される。そのため、「 μ_1 は平均的な次数を表すものであるため、あまり意味がない」といった記述が Network Science の文献の中で散見される。一方で、この値は次数の平均と最大値により規定されることから、これらの値の差に影響をうけると考えることができるだろう。さらに、regular ネットワーク、すなわちすべてのノードの次数が等しいネットワークにおいては、 $\bar{d} = d_{\max}$ となるため、 $H = \log \bar{d}$ となる。

ここで、regular ネットワークの性質を考えると、すべてのノードから $\bar{d}$ の次数分リンクが存在するため、あらゆるノード i からその他のノード j までには、 $\bar{d}$ の非重複経路があるといえる。そのため、ここでは非重複経路数と H との関係をみてみることにする。関連し、 λ_2 、 v_2 と H 値との関係も併せて考察する。

当然ながら、ネットワークの形状により指標値が変化すると考えられる。ここでは、ノード数 50、平均次数 4 とし、regular ネットワーク、Scale Free ネットワーク、および確率 β で再結線をする Small World ネットワークをそれぞれ 100 個ずつ作成し、すべてのノード間の非重複経路を求めその平均値を得るとともに、 H を計算した。この計算ケースにおいては重みはすべてのリンクで 1 としている。なお、 β について、0~1 まで 0.25 刻みで計算しており、 $\beta = 0$ は regular ネットワークを、 $\beta = 1$ は random ネットワークを表す。図 1 に結果を示す。

図を見ると、全体のプロットは直線上に存在しており、 H 値と平均非重複経路数には強い相関関係があるといえる。詳しくみると、Regular ネットワークでは想定通り非重複経路数は 4、 H 値は、2 ($= \log_2 4$) であった。それに対し、random ネットワーク、Small World ネットワークは H 値が 2.1~2.3 であり、平均非重複経路数が 3~3.7、Scale Free ネットワークでは H 値が 2.6~2.9、平均非重複経路数が 2.2~2.6 となった。つまり、Scale Free ネットワ

ークでは、巨大なハブが形成される可能性が高まるため、ある特定のリンクの利用が集中し、平均非重複経路数が減少したと考えられる。なお、計算時間について、非重複経路数を数え上げるためには、2,450 回線形計画問題を解く必要があり、それを求めるのにかなりの時間を費やした。一方で、この程度の大きなネットワークであれば、固有値は瞬時に求めることが可能であり、計算時間としては、 H 値を活用する方が圧倒的に有利である。

参考までに、 μ_1 から求められる H 値と λ_2 、 v_2 との関係を考察する。図 2、3 にそれぞれ H 値と λ_2 、 H 値と v_2 の関係式を示す。 λ_2 、 v_2 ともに、接続性の指標ととらえることができ、その値が小さければ小さいほどより少ない本数のリンクでネットワークを非連結にすることができることになる。図 2、図 3 の外観をみると、ほとんど計算結果に違いはなくほぼ同様の関係性を有しているようである。そのため、図 2 についてのみ細かく確認すると、まずネットワークの形状によってその性質が大きく異なるようである。Small World ネットワークに着目すると、Regular ネットワークが最小の値をとりそこから β が大きくなるにつれて λ_2 の値が大きくなる傾向にある。また、同じネットワークの設定であれば、 H 値と λ_2 は正の相関性をもつともいえるだろう。また、Scale Free ネットワークも概して λ_2 の値は大きく、Random ネットワークとはほぼ同等の接続性を有していると考えられる。

(2) ネットワーク容量

ネットワーク容量が決定づけられる要因は、ある特定の断面においてリンク容量が一杯になり、それ以上代替経路を見つけ出すことができないためであると考えられる。そのため、ネットワーク容量は、リンク容量が比較的小さい断面を求めれば類似した結果を得ることができると期待できる。今、式(22)や(23)をみると、 λ_2 や v_2 が規定するネットワーク接続性やコンダクタンスは、その断面における重みが最小のものを探し出すことになる。したがって、リンクの重みをリンク容量として λ_2 や v_2 を求め、それとネットワーク容量の値との関連性を見ることとする。Sioux Falls ネットワーク²⁹を用いた。元々設定されていたリンク交通量について、一様乱数を用い、各リンクの容量を元の設定値の 50%~150%まで変化した 100 の計算セットを用い、ネットワーク容量を計算する。併せて λ_2 や v_2 を求め、その関係性を分析した。図 4 に計算結果を示す。図 4 には、それぞれの指標値とネットワーク容量の関連性を示す散布図と、各指標間の相関係数を示している。この結果をみると、ネットワーク容量は、ラプラシアン行列の第 2 最小固有値との関連性が比較的高い。つまり、 λ_2 の値を用いることで、おおよそネットワーク容量の性能評価と同等のことが実施できる可能性が高い。

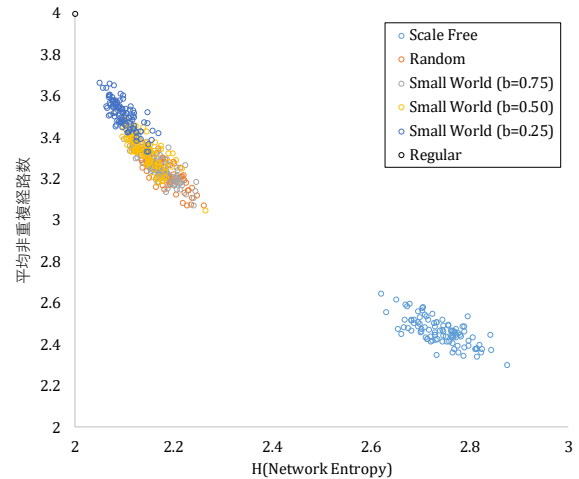


図 1 非重複経路数と Network Entropy の関係

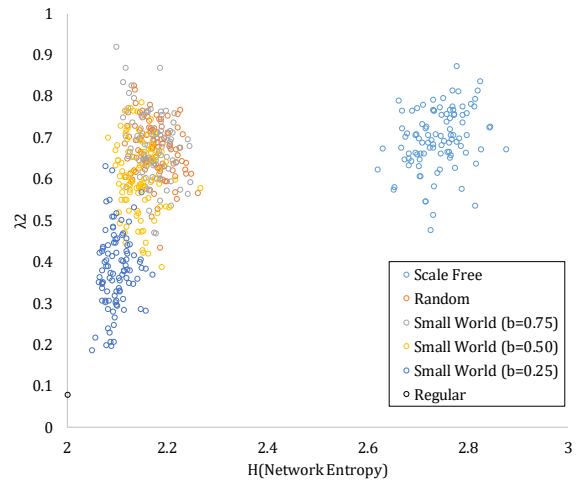


図 2 λ_2 と Network Entropy の関係

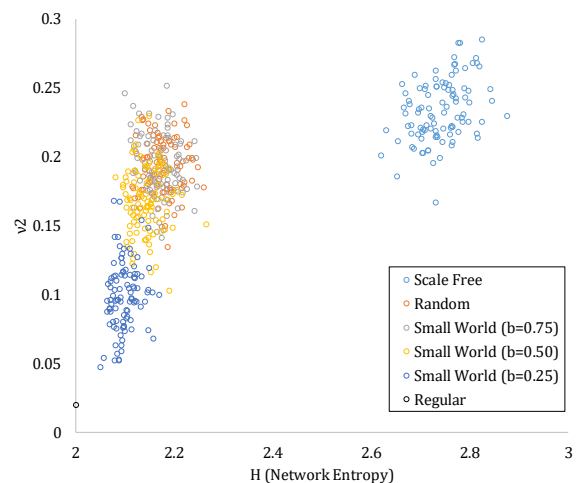


図 3 v_2 と Network Entropy の関係

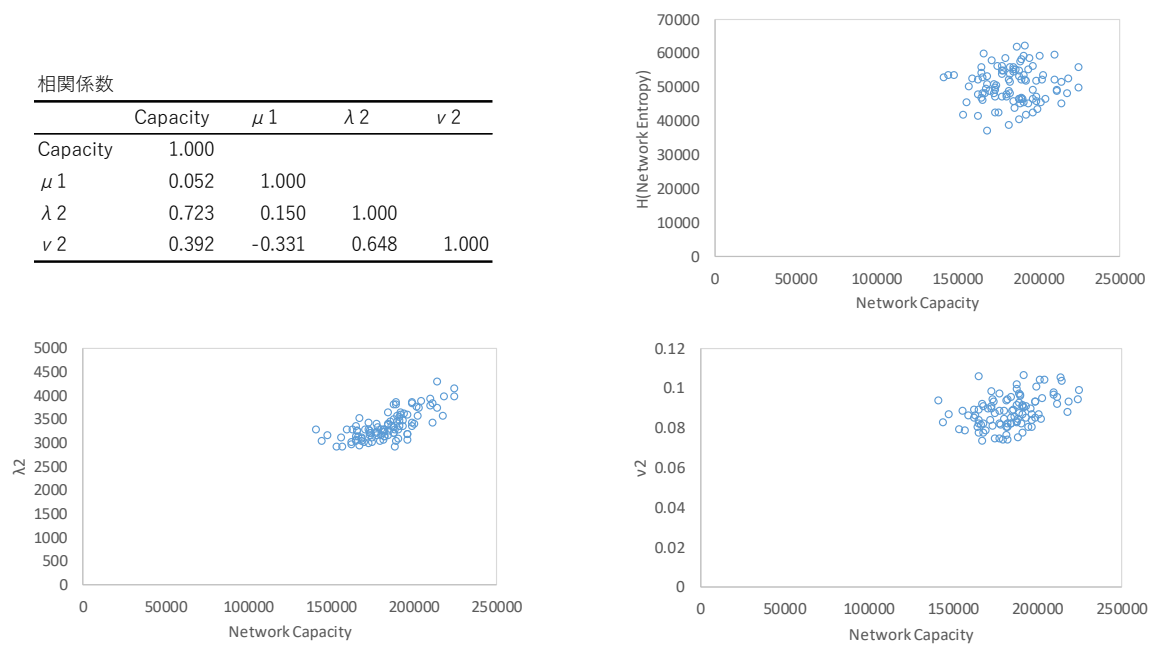


図4 ネットワーク容量と Network Science 指標との関係

5. おわりに

以上本研究では、交通ネットワーク信頼性解析への Network Science の考え方を適用することをめざし、交通工学的な指標と Network 指標との関係性を考察した。その結果、平均非重複経路本数は Network Entropy 値と、ネットワーク容量は、接続性指標であるラプラシアン行列の第2最小固有値と関連性が高いことが確認できた。非重複経路本数の数え上げやネットワーク容量の算定においては、最適化問題を繰り返し解く必要があり、それと比較すると固有値問題を解くだけの方法は、計算時間に関して大きな優位性を持つ。特に、ここで示した方法論では、せいぜい第2番目までの最大あるいは最小の固有値をえるだけで十分であるため、Gram-Schmidt 直交化法を用いた共益勾配法²⁾を用いることで簡単に解を求めることができる。今後いくつかのネットワークで計算を実施し、その計算結果の安定性について検証を加えていく必要がある。

なお、ここで示した方法は、現在あるネットワークの性能値を調べる方法といえ、ネットワーク内の重要なリンクなどを抽出するものではない。たとえば、 H 値あるいは λ_2 、 ν_2 の値を大きく低下させるリンクの抽出などの考え方により、重要リンクの抽出などが可能かどうか、検証を加えていく必要があるだろう。一つの方法として、ラプラシアン行列の第2最小固有値に対応する固有ベクトルの符号によりネットワークを分割し、その境界リンクを重要度の高いリンクとすることも考えられる²⁾。

また、交通ネットワーク評価において、全ての交差点

間の接続性を評価することの重要性は薄い。セントロイド間の接続性や、あるいは土木構造物の重要性を測ることが重要であろう。上記のような考え方に基づいた場合、そのまま network science の理論を、我々が慣れ親しんだ道路ネットワークグラフに適用することの意味合いは大きくないかもしれない。我々がしたい視点に対応したネットワークと従来の道路ネットワークグラフが整合しないのであれば、「我々の視点に適合する抽象ネットワーク」を実際の道路ネットワークから作成することもできるかもしれない。このように、様々な発展の方向性があり、それらについて今後検討を加えていく予定である。

参考文献

- 1) Nicholson, A. and Du, Z. P.: Degradable transportation systems: Sensitivity and Reliability Analysis, Transportation Research, Part B, 31 (3),225-237,1997
- 2) 小林潔司, アセットマネジメント総論(2) Critical Infrastructure と脆弱性, Summer School 2009 建設マネジメントを考える, pp.73-85, 2009
- 3) 岡田憲夫, 若林拓史, 多々納裕一, 社会基盤整備の計画・管理のためのリスク分析的アプローチ, 土木学会論文集 No.464/IV-19, pp.33-42, 1993
- 4) 中山晶一郎, ネットワークレベルでの道路交通の信頼性研究の諸相・展望とその便益評価の一考察, 土木学会論文集 D, Vol. 67, No. 2, pp.147-166, 2011
- 5) 倉内文孝, 宇野伸宏, 嶋本寛, 山崎浩気, 交通ネットワークサービスの信頼性解析に関する研究動向, 土木計画学研究・講演集, vol.35, 234, 2007

- 6) Taylor, M., Sekhar, S. and D'Este, G., Application of accessibility based methods for vulnerability analysis of strategic road networks, *Network and Spatial Economics*, Vol.6, No.3-4, pp.267-291, 2006
- 7) Bell M.G.H., A game theory approach to measuring the performance reliability of transport networks, *Transportation Research B*, 34, pp.533-545, 2000
- 8) Kurauchi, F., Sumalee, A., Tamura, H. and Uno, N., Bilevel programming problem for analysing capacity vulnerability in a transportation network under limited damage, Proceedings of the Third International Symposium on Transportation Network Reliability, 2007
- 9) Kurauchi, F., Uno, N., Sumalee, A. and Seto, Y., Network evaluation based on connectivity vulnerability, *Transportation and Traffic Theory 2009: Golden Jubilee*, pp.637-649, 2009.
- 10) 倉内文孝, 宇野伸宏, 夏皓清, 葉光毅, 台湾道路ネットワークにおける接続脆弱性解析とその活用, 土木計画学研究・講演集, vol.42, 2010
- 11) 原田剛志, 倉内文孝, 高木朗義, リダンダンシーを考慮したアクセシビリティに基づく道路ネットワークの接続脆弱性評価, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 70, No. 1, 76-87, 2014
- 12) 若林拓史, 亀田弘行, ロマ・プリエタ地震によるサンフランシスコ湾岸地域の交通サービスへの被害分析と交通運用策の評価, 土木計画学研究・論文集, No. 10, pp.103-110, 1992.
- 13) 若林拓史, 阪神淡路大震災における道路網連結信頼性と確率重要度による重要区間の評価, 土木計画学研究・論文集, No. 13, pp.391-400, 1996.
- 14) 南正昭, 高野伸栄, 加賀屋誠一, 佐藤馨一, 拠点間医療施設へのアクセスを2系統で保証する道路ネットワーク構造, 土木計画学研究・論文集, No. 14, pp.679-686, 1997.
- 15) Brandes, U., Robins G., McCranie, A. and Wasserman, S., Editorial: What is network science?, *Network Science* 1 (1): 1-15, Cambridge University Press 2013, <http://doi.org/10.1017/nws.2013.2>
- 16) Yang, H., Bell, MGH, and Meng, Q., Modeling the capacity and level of service of urban transportation networks, *Transportation Research, Part B*, 34, 255-275, 2000.
- 17) Wong, S C, Yang, H, Reserve capacity of a signal-controlled road network, *Transpn Res B*, 31(5), 397-402, 1997.
- 18) Bell MGH and Iida, Y., *Transportation Network Analysis*, Pergamon, 1997.
- 19) Kurauchi, F., Iida, Y., and Shimada, H., Evaluation of Road Network Reliability Considering Traffic Regulation After a Disaster, *The Network Reliability of Transport* (Bell and Iida, Eds), Pergamon, 289-300, 2003
- 20) Spielman, D.A., *Spectral Graph Theory*, Lecture Note, accessed on 22nd, Apr, 17, <http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/561/>
- 21) Fiedler, M., Algebraic connectivity of graphs, *Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 23, No. 2, 298-305, 1973.
- 22) Demetrius, L., and Manke, T., Robustness and network evolution – an entropic principle, *Physica A*, 346, 682-696, 2005.
- 23) Godsil, C.D. and Royle, G., *Algebraic Graph Theory*. Springer New York, 2001, vol. 207.
- 24) Hillel Bar-Gera, *Transportation Network Test Problems*, <http://www.bgu.ac.il/~bargera/tntp/>, 2017.4.23 アクセス
- 25) Ferronato, M, Eigenvalue computation for sparse matrices, <http://dispense.dmsa.unipd.it/ferronato/MN-PhD/2008/eigen.pdf>, accessed 26/9/16, 2008.
- 26) Bell, MGH, Kurauchi, F, Perera, S and Wong, W., “Investigating transport network vulnerability by capacity weighted spectral analysis”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 99, May 251-266, 2017. (<http://doi.org/10.1016/j.trb.2017.03.002>)

(2017.4.28 受付)

Potentials of Transport Network Reliability Analysis using Network Science Technique

Fumitaka KURAUCHI