Kinematic Wave理論の近年の展開：交通流の変分理論とネットワーク拡張

和田 健太郎 [1]・瀬尾亨 [2]・中西航 [3]・柳原正実 [4]・佐津川功季 [5]

[1]正会員　東京大学助教 生産技術研究所（〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1）
E-mail: wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp
[2]正会員　東京工業大学研究員 環境・社会理工学院（〒 152-8522 目黒区大岡山 2-12-1）
E-mail: t.seo@plan.cv.titech.ac.jp
[3]正会員　東京大学助教 大学院工学系研究科（〒 113-8656 文京区本郷 7-3-1）
E-mail: nakanishi@civil.t.u-tokyo.ac.jp
[4]正会員　首都大学東京大学院助教 都市環境科学研究科（〒 192-0397 八王子市南大沢 1-1）
E-mail: yanagihara@tmu.ac.jp
[5]学生会員　東京大学大学院 工学系研究科 博士後期課程（〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1）
E-mail: kouki@iis.u-tokyo.ac.jp

本稿では，道路上の交通流ダイナミクスを記述する標準的な枠組みである Kinematic Wave (KW) 理論の近年の展開に関するレビューを行う．具体的には，まず，KW 理論に関する従来の解析法を概説しその限界を述べた上で，交通流の変分理論 (VT) を解説する．また，この理論の応用として，様々な座標系（Euler 座標系，Lagrange 座標系）が VT の枠組みにより統一的に記述されることをみる．後半では，上記の単一道路（リンク）上での理論をネットワーク拡張するための理論を解説する．ここでは，ノードにおいて物理的に意味のある交通流を決める手法およびリンク・ノードの交通流を整合的に記述する手法について述べる．

Key Words: *traffic flows, kinematic wave theory, variational theory, node models, network flows*

1. はじめに

交通流理論は，道路上の様々な交通現象を記述・解析・予測するための枠組みであり，分析目的や時空間スケール，表現する走行挙動の詳細度に応じて多数のモデルが開発されている．これらは主に，車群を流体として近似して交通状態の時空間進展をモデル化する巨視的なモデルと，車両の走行挙動や車両間の相互作用を直接モデル化する微視的なモデル，に大別される．

その歴史は，1930 年代の Greenshields[1),2)] の交通状態量間の関係のモデル化（FD: Fundamental Diagram）まで遡ることができるが，1950 年代になると微視的・巨視的モデル双方で現在の標準となるいくつかの理論的枠組みが複数の研究者から独立に提案された [1]．前者が Car Following（CF）理論（追従理論）であり，後者が本稿で対象とする Kinematic Wave（KW）理論（衝撃波理論）である．

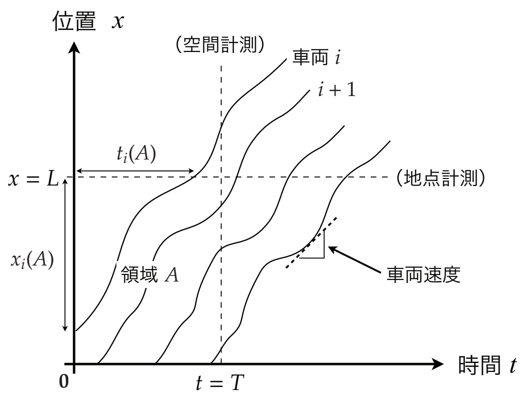
KW 理論は，モデルが簡潔であり解析的にも数値的にも取り扱いが容易でありながら，いくつもの交通現象をよく表現することができる [2] という特徴を持つ．そのため，多くの応用や交通シミュレーションとしての実装が存在する．しかし，その理論の現在に至るまでの発展は連続的なものというよりは，いくつかの重要な “ジャンプ”によってなされてきたとみることができる．

実際，Lighthill and Whitham[3),4)] と Rihards[5)] により独立に提案された KW 理論は，提案された 1950 年代から長らく大きな理論的な発展は見られなかった．しかし，1990 年代になって，その応用範囲は大きく広げる画期的な解析法・数値計算法が提案される．それが, Newell[6),7),8)] による最小包絡線原理と，Daganzo[9),10)] による Cell Transmission Model (CTM) である．さらに，2000 年代に入ると，Daganzo[11),12)] の交通流の変分理論（VT: Variational Theory）の提案により，KW 理論は完成しつつある．本稿の第一の目的は，この発展の経緯を踏まえつつ，交通流の変分理論およびその応用を解説することである．

一方，上記の理論は単一道路における交通流ダイナミクス解析のための方法論であり，ネットワーク上の交通流の記述手法という点では，先の Daganzo[10)] による

[1] こうした世界的な交通研究への関心の高まりを受け，1959 年に第 1 回の国際交通流シンポジウム（International Symposium on the Theory of Traffic Flow）が開催された．以来，より広範な交通理論を扱う国際運輸・交通流シンポジウム（International Symposium on Transportation and Traffic Theory, ISTTT）として，現在に至るまで交通分野の理論の発展に貢献している．わが国では，第 7 回京都（1977），第 11 回横浜（1990），最新の第 21 回神戸（2015）と計 3 回開催されている．

[2] 交通流の不安定性を表現できないことや衝撃波（渋滞の最後尾）上において車両が無限大の加速度で挙動を変更するなど，いくつかの限界ももっている．



図–1: 時空間図（time-space diagram）

CTM 以来，大きな注目を集めてこなかった．しかし，2000 年代になり，Lebacque and Khoshyaran[13] により，ネットワーク上のノード（分流・合流・交差点）での交通流を適切にモデリングすることの重要性が指摘され，2010 年代に入るとその理論の体系化が急速に進んでいる．本稿の第二の目的は，この体系の解説である．

なお，本稿は以上の理論に関係する文献を網羅的に列挙することが目的ではなく，その基本的な理論/アイディアを簡潔に解説することを目標としている．また，数値解法・シミュレーション法についてはあまり扱っていない．こうしたシミュレーション法に関する研究や，その他の交通流モデル（ミクロモデルや高次のマクロモデルなど）については Hoogendoorn and Bovy[14] や Mohan and Ramadurai[15] などの近年のレビューを参照にされたい．

2. KW モデルと交通流の変分理論

本章では，まず **(1)** で，交通流の表現法や交通流分析に必要な諸量の定義を与える．続いて，**(2)**, **(3)** で従来の KW モデルの解析法を簡単に解説する．最後に，**(4)** で交通流の変分理論について述べる．

(1) 時空間図・累積図・交通流の三次元表現

交通流分析の最も基本は，その流れを描くことであり，この代表的な道具となるのが，時空間図と累積図である．

a) 時空間図と交通状態量

図 1 に示す時空間図は，時間–空間の二次元平面上で車両軌跡を表したものである．横軸が時刻 t，縦軸が一次元の道路上の位置 x であり，実線で描かれた各線が各車両の走行軌跡を表している．走行軌跡の傾きは車両速度を表し，連続する車両のある位置での水平距離を車頭時間，ある時刻での垂直距離を車頭距離という．これらが個々の車両の動きを表す微視的な状態量である．

交通流の平均的な状態を表現する巨視的な状態量については，交通流率，交通密度，速度がある．いま，地点 $x = L$ における水平方向の点線（地点計測）を考える．このとき，その地点を単位時間当りに通過する車両台数を交通流率（あるいは交通量）という．一方，時刻 $t = T$ における垂直方向の点線（空間計測）を考える．このとき，その瞬間に単位距離当たりに存在する車両台数を交通密度という．平均速度は，地点断面での車両速度の算術平均である時間平均速度と，時間断面での車両速度の算術平均である空間平均速度があるが，一般に後者が利用されるため，単に「速度」といった場合には「空間平均速度」を指す．

これら三つの状態量の関係を示すために，まず，交通流率と交通密度のより一般的な定義を与えよう[16]．いま，時空間図上の任意の領域 A を考える（図 1 では長方形）．このとき，その領域の交通流率 $q(A)$，密度 $k(A)$ は以下のように定義することができる．

$$q(A) \equiv \frac{\sum_i x_i(A)}{|A|},\ k(A) \equiv \frac{\sum_i t_i(A)}{|A|} \tag{1}$$

ここで，$|A|$ は領域 A の面積（$= TL$），$t_i(A)$，$x_i(A)$ はそれぞれ，各車両 i が領域 A で費やす走行時間と走行距離である．一方，空間平均速度は次のように定義される．

$$v(A) \equiv \frac{\sum_i x_i(A)}{\sum_i t_i(A)} \tag{2}$$

この定義式 (2) より，明らかに，

$$q = kv \tag{3}$$

が成立する．これは，交通流に関する最も基本的な関係式の一つである．なお，式 (1) が，上述した各状態量の定義の一般化となっていることは，微小な幅を持つ地点断面（領域 A^*），時間断面（領域 A^+）を考えることで確認することができる：

$$q(A^*) = (n^* \cdot dx)/(T \cdot dx) = n^*/T$$
$$k(A^+) = (n^+ \cdot dt)/(L \cdot dt) = n^+/L.$$

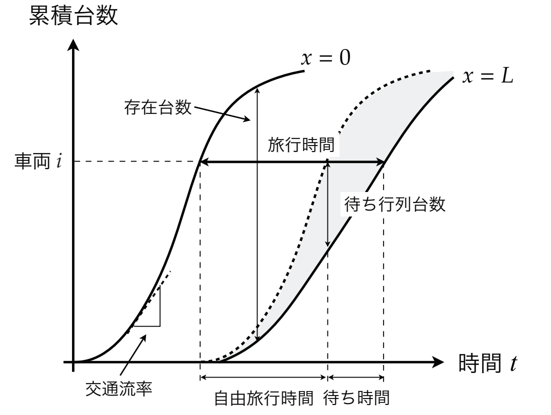
最後に，全ての車両（n 台）がある区間（距離 L）を走行するような時空間領域 A^* を考えてみよう．このとき，定義式 (2) より，

$$v(A^*) = \frac{n \cdot L}{\sum_i t_i(A^*)} \Leftrightarrow \frac{\sum_i t_i(A^*)}{n} = \frac{L}{v(A^*)}$$

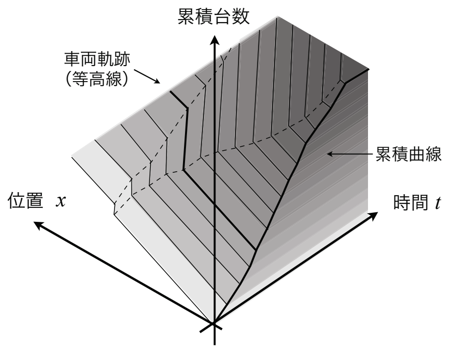
が成り立つ．ここから，区間の平均旅行時間が空間平均速度から自然に導出されることがわかる．空間平均速度が一般的に利用されるのは，式 (3) が成立することに加え，サービス指標の導出に適しているためである．

b) 累積図と交通流の三次元表現

図 2 に示す累積図とは，ある地点 x を通過する車両の累積交通量の時間推移（累積曲線）を表したものである．横軸は時刻 t，縦軸は累積交通量 $N(t, x) \equiv \int_0^t q(t, x)dt$ であり，実線で描かれた滑らかな各線が各位置の累積曲



図–2: 累積図（cumulative plots）



図–3: 交通流の三次元表現

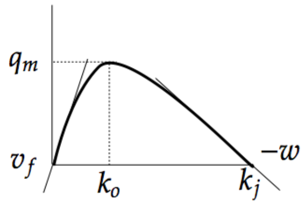
線を表している（出入りがない限り累積交通量がジャンプすることはない）．累積曲線は，本来，車両が通過する毎に 1 増加するという階段関数となるが，この図では車両を連続量（流体）として近似している．このとき，累積曲線の時々刻々の傾きは交通流率を表す．また，異なる 2 地点のある時刻での累積曲線の差は，（出入がなければ）その区間に存在する車両存在台数を表しており，交通密度を算出可能である．

累積図は，時空間図のように 1 台 1 台の詳細な車両軌跡を把握することはできないが，渋滞現象（待ち行列現象）を分析するための強力なツールである．いま，出入りおよび追い越しのない（First–In–First–Out, FIFO）道路区間を考える．このとき，道路区間の最上流 $x = 0$ と最下流 $x = L$ の車の順序は保存されるため，各累積曲線の同じ高さの点は同じ車両を表す．従って，2 本の累積曲線の水平方向の差はその高さに対応する車両の旅行時間を表している．また，最上流の累積曲線を自由旅行時間だけシフトさせた点線の累積曲線を考えると，その区間を通過するために余分に費やした待ち時間，待ち行列台数もわかる．図 2 の網掛け部分はこの待ち時間を車両について積分したものであり，その区間の総待ち時間を表している．

最後に，時空間図と累積図の関係について述べておく．Moskowitz[17], Makigami et al.[18] は，位置に関して連続的に累積曲線を描いたときに現れる曲面を用いて交通流を三次元表現する手法を提案した（図 3）．この図において，位置断面は累積曲線を表しており，累積交通量軸方向から見ると時空間図が現れる．つまり，累積交通量の等高線が車両軌跡となる．この表現は，待ち行列現象と車両挙動を同時に含んでいるため，交通流解析において極めて有効な手法である．なお，この局面 $N(t, x)$ が微分可能であるとすると，交通流率，密度は，それぞれ,

$$q(t, x) = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t}, \quad k(t, x) = -\frac{\partial N(t, x)}{\partial x} \tag{4}$$

と表すことができる．



図–4: Fundamental Diagram

(2) Lighthill-Whitham-Richards モデル

a) LWR 方程式

Lighthill and Whitham[4),3)] の有名な論文 “On kinematic waves” は，流体や交通流などに適用可能な一次元上の波動（kinematic wave）理論を記述したものである．Richards[5)] は，独立に，同様の流体力学的交通流理論を提案している．これらの理論は，次の 2 つの要素から構成されている：

1. 微分形式の車両数の保存則（連続式）
2. Fundamental Diagram（FD）

1. の保存則は，対象の道路区間に出入りがなければ，時刻 t と位置 x について滑らかな交通量 $q(t, x)$，密度 $k(t, x)$ を用いて以下のように与えられる：

$$\frac{\partial k(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

2. の FD は，交通流観測から経験的に得られている交通量と密度の関係であり，交通量 $q(t, x)$ が密度 $k(t, x)$ に関する凹関数になることを仮定する（図 4）：

$$q(t, x) = Q(k(t, x), t, x). \tag{6}$$

この FD は，$k \in [0, k_j]$ で定義され，臨界密度 k_o で最大交通量（容量）q_m をとる．FD の接線の傾きは $[-w, v_f]$ をとり，臨界密度においては $v = 0$ である．また，式 (3) から明らかなように，この図の原点からの傾きは空間平均速度となる．

以上は，式 (6) を式 (5) に代入することで，密度 k のみの方程式

$$\frac{\partial k(t,x)}{\partial t} + v(k,t,x)\frac{\partial k(t,x)}{\partial x} = -\frac{\partial Q(k,t,x)}{\partial x} \tag{7}$$

$$v(k,t,x) \equiv \frac{\partial Q(k,t,x)}{\partial k} \tag{8}$$

に帰着する．式 (7) を LWR 方程式[3] と呼び，式 (8) を “wave speed”と呼ぶ．

b) 特性曲線法

LWR 方程式 (7) の標準的な解法は特性曲線法 (method of characteristics) である．この方法の特徴は，偏微分方程式を連立一次常微分方程式に帰着させることにある．まず，wave speed（i.e., $dx/dt = v(k,x)$）で走行する移動観測者の軌跡 $x(t)$（“特性曲線” あるいは “wave path”と呼ぶ）に沿った密度変化を考える：

$$\frac{dk(t,x(t))}{dt} = \frac{\partial k(t,x)}{\partial t} + v(k,t,x)\frac{\partial k(t,x)}{\partial x} = -\frac{\partial Q(k,t,x)}{\partial x}. \tag{9}$$

この式は，密度 k に関する常微分方程式である．そして，移動観測者が従うべき常微分方程式とをあわせることで，LWR 方程式は以下の連立一次常微分方程式：

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{\partial Q(k,t,x)}{\partial k} = v(k,t,x) \\ \dfrac{dk(t,x(t))}{dt} = -\dfrac{\partial Q(k,t,x)}{\partial x} \end{cases} \tag{10}$$

に帰着する．この方程式を与えられた初期条件・境界条件の下で解くことにより，特性曲線 $x(t)$ および特性曲線上の密度 $k(t,x(t))$ が求まる．なお，交通量 q は密度 k から FD を用いて定まる．

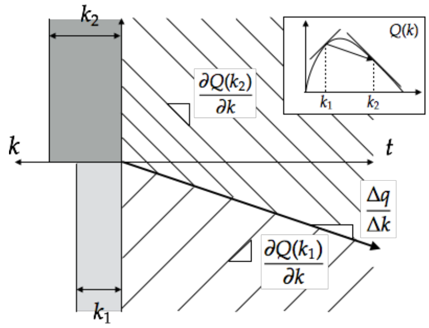
FD が地点や時刻により変化しない一様な道路区間の場合（i.e., $Q(k,x,t) = Q(k)$）は，特性曲線に沿った密度変化は 0 となる，i.e.,

$$\frac{dk(t,x(t))}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial Q(k)}{\partial k} = \text{const.} \tag{11}$$

そして，特性曲線は直線となるため，非常に取り扱いが容易である．

c) 衝撃波と膨張波

特性曲線法で求められる各地点の密度は，特性曲線が交わらない限りにおいて LWR 方程式の “正しい”解である．しかし，特性曲線が交わる場合には，その地点において密度が複数の値をとるという問題が生じる[4]．そこで，上記までで仮定していた交通量・密度の微分可能性を緩和しよう．すなわち，交通量・密度の不連続性を認める．このとき，不連続点では微分形式の保存則 (5) は成立しないが，密度の不連続点においても車両数の保存則は満たされるべきである．



図–5: 一様道路でのリーマン問題（$k_1 < k_2$）

そこで，不連続点が速度 ω で移動するとして再び保存則を導こう．不連続点の上流の状態を (q_1,k_1)，下流の状態を (q_2,k_2) とすると，速度 ω で動く移動観測者が不連続点の両側近傍で観測する交通量は一致しなければならない（車が消滅することはないし，突然現れることもない）．ここで，速度 v で走行する移動観測者が観測する（相対）交通量 r は，近傍の交通状態が (q,k) であれば，以下のように表される：

$$r = q - kv. \tag{12}$$

$r_1 = r_2$ であるので，不連続点の移動速度 ω は以下のように求まる：

$$q_1 - k_1\omega = q_2 - k_2\omega \quad\Leftrightarrow\quad w = \frac{q_1 - q_2}{k_1 - k_2} \tag{13}$$

この速度 (13) に沿って進む曲線を “衝撃波 (shock wave)” と呼ぶ．このような不連続面で満たされるべき条件は，一般に，ランキン・ユゴニオ条件（Rankine–Hugoniot condition）と呼ばれる．

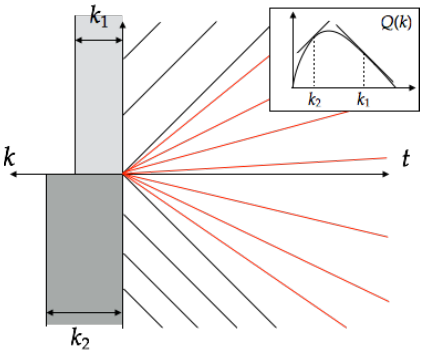
ここでは，その具体例をみるために，図 5, 6 のリーマン問題（Riemann problem）[5] を考えてみよう．ここでは，一様な道路を考えるため，特性曲線は直線である．第一の例は，$x < 0$ での密度 k_1 が $x > 0$ での密度 k_2 よりも小さい場合である．このとき，$x < 0$ 境界からの特性曲線はどこかのタイミングで必ず $x > 0$ 境界からの特性曲線に追いつく．そして，特性曲線が交わる地点で衝撃波が発生し，特性曲線は消失する．

第二の例は，$x < 0$ での密度 k_1 が $x > 0$ での密度 k_2 よりも大きい場合である．このとき，$x < 0$ 境界からの特性曲線は，$x > 0$ 境界からの特性曲線に追いつくことはできない．従って，時空間図上に，空白領域が生じることになり，この領域では特性曲線法は何の情報ももたらさない．さらに，困ったことに，この空白領域

[3] 非線形双曲型偏微分方程式 (nonlinear hyperbolic partial differential equation) である．

[4] このとき，LWR 方程式を満たすで連続かつ微分可能な（いわゆる古典的な意味での）解は存在しない．衝撃波等の不連続性を伴う解を “弱解”という．

[5] 初期条件に 1 つだけジャンプを持つような初期値問題である．リーマン問題は，対象とする偏微分方程式の解の特徴をつかむために有用なほか，LWR 方程式の解析解を得る場合や適切な数値解法を開発する際に重要な役割を果たす [19]．



図–6: 一様道路でのリーマン問題（$k_1 > k_2$）

を覆うことができるランキン・ユゴニオ条件を満たす非物理的な解（e.g., 膨張衝撃波）は唯一ではない．では，そのような物理的に不自然な解を排除する他の基準はどういうものであろうか？

ここでもう一度，図 5 の衝撃波と特性曲線の関係を思い出そう．特性曲線は時間とともに進むとき，衝撃波と交わる点で消失する．逆に時間を遡ると，この特性曲線はどの衝撃波とは交わることはない．つまり，

$$w(k_1) > \omega > w(k_2) \tag{14}$$

の条件を満たしている必要がある．これは，（Lax の）“エントロピー条件（entropy condition）”と呼ばれ，物理的に妥当な解を得るための条件である．これは，大雑把に言えば，衝撃波から特性曲線が生じないこと，つまり，時間についてのある種の不可逆性（時間の矢）を述べる条件であるため（熱力学の第二法則とのアナロジーから）エントロピー条件と名付けられた [20]．

この条件 (14) を空白領域にも適用すると，空白領域の任意の点から時間を遡るとき，特性曲線は衝撃波と交わるべきではない，ということになる．これを満たすのが図 6 の赤線で示した “膨張/希薄波 (expansion/rarefaction wave)”である．この解は，密度の不連続性が崩れながら時間が進展していくことを表している．なお，後で導入する三角形の FD を考えた場合，このような膨張波は発生せず，車群を保ったまま時間が進展する（i.e., 空白領域との境界で 2 本の衝撃波が発生する）．

(3) Newell の KW 理論

前節では，LWR 方程式の解は，特性曲線，衝撃波，膨張波から構成されることをリーマン問題を通して見た．しかし，一般の初期条件（や境界条件）を考えた場合，上記の 3 種類の波を組み合わせてその（解析）解を求めることは非常に煩雑となる．本節では，そのような手続きを全く必要としない手法 “最小包絡線原理 (minimum envelop principle)[6)]”について解説する．Newell の KW 理論では，先に紹介した三次元累積曲面の枠組みを用いて LWR モデルを拡張することにより，待ち行列現象と車両挙動を見事に統合している（Kuwahara[21)] による近年のレビューも参照されたい）．

a) Hamilton–Jacobi 方程式

LWR 方程式では密度 $k(t,x)$ が未知変数であったが，ここでは，累積交通量 $N(t,x)$ を未知変数として考える．対象とする時空間上に連続な三次元累積曲面が存在するとすると，必ず車両数の保存則は成立するため，この理論で考えるべき要素は，FD だけである．いま，累積交通量 N と密度 k，交通量 q の関係を思い出せば，FD は以下のように与えられる：

$$\frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = Q(-N_x, t, x). \tag{15}$$

ここで，$N_x \equiv \partial N(t,x)/\partial x$．この形式の偏微分方程式は，Hamilton–Jacobi（HJ）方程式と呼ばれる．

b) 特性曲線法

まず，特性曲線 $x(t)$ に沿った密度および累積交通量の変化を考える：

$$\frac{dk(t,x(t))}{dt} = -\frac{\partial Q(k,t,x)}{\partial x} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\frac{dN(t,x(t))}{dt} &= \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} - v(k,t,x)\frac{\partial N(t,x)}{\partial x} \\ &= Q(k,t,x) - k(t,x)v(k,t,x)\end{aligned} \tag{17}$$

この第二式は，累積交通量 N に関する常微分方程式であり，右辺は移動観測者が観測する相対交通量 $r(k,t,x)$ である．そして，HJ 方程式は移動観測者の速度と密度および累積交通量の変化に関する連立一次常微分方程式：

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt} = v(k,t,x) \\ \dfrac{dk(t,x(t))}{dt} = -\dfrac{\partial Q(k,t,x)}{\partial x} \\ \dfrac{dN(t,x(t))}{dt} = r(k,t,x)\end{cases} \tag{18}$$

に帰着する．この方程式を初期条件・境界条件の下で解くことにより特性曲線 $x(t)$，特性曲線上の密度 $k(t,x(t))$，累積交通量 $N(t,x(t))$ が求まる．なお前節と同様に，一様な道路区間を考えたとき特性曲線は直線となり，その直線に沿った累積交通量の変化は（密度が変化しないので）一定となる．

c) 最小包絡線原理

LWR モデル同様，特性曲線法により求められる累積交通量は，特性曲線が交わらない限りにおいて HJ 方程式の “正しい”解である．しかし，ここでも特性曲線が交わる場合に，累積交通量が複数の値を持つという問題が生じる．そこで，物理的に尤もらしい解を得るためには，複数の累積交通量値のうち唯一な値を決定するルールを特定する必要がある [6]．結論を先に述べるな

[6] LWR 方程式に対するルールは，衝撃波および膨張波（ランキン・ユゴニオ条件およびエントロピー条件）の導入である．

らば，このルールは次のように表される[7]：「ある地点で実現する累積交通量は，異なる初期・境界からその地点に到達する特性曲線上の累積交通量のうち最小のものである」．これを最小包絡線原理と呼ぶ．

なぜこのような原理が導かれるのであろうか？ これは以下のように説明される．道路上での車両の動きはより下流側の車両（累積台数の小さい車両）の動きに影響を受ける．従って，ある地点である時刻までにそこを通過することができる車の数は，より早い時刻にそこを通過する車両により生じる “制約”（累積台数の上限値）を超えるべきではない．この自然な因果関係を実現するものが，最小包絡線原理である．なお，最小包絡線原理をとるとき，求まる累積交通量は時間的に空間的にも連続的に変化するので車両数の保存則は満たされる（i.e., 累積交通量のジャンプが生じない）．

最小包絡線原理の最大の利点は，その結果として衝撃波経路が自動的に決まることである．より具体的には，複数の特性曲線上の累積交通量が同じ値になった地点を衝撃波は通過する（i.e., 累積曲面が微分不可能になる[8]）．これにより，特性曲線・衝撃波・膨張波を組み合わせて解を構成するという LWR 方程式の手続きが，大幅に簡略化される．ただしそれでもなお，一般的な状況設定に対しては面倒さが残る．というのも，特殊な場合を除いて，特性曲線（wave path）を全て求めることは簡単ではないからである．実際，最小包絡線原理が効果的に適用できるのは，特性曲線が直線となる場合だけである．そして，全ての特性曲線を求めることなく，各地点の累積交通量を求めるのが次節で示す交通流の変分理論である．

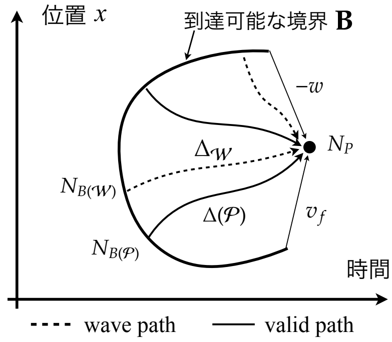
最後に，交通流の変分理論との比較をしやすくするために，最小包絡線原理を数式として表現しておこう．いま，初期・境界上 $B = (t_B, x_B) \in \mathbf{B}$ の累積交通量 N_B と密度 k_B が与えられているとする．そして，図 7 のように，それらの $\mathbf{B}$ から wave speed で到達可能な範囲内のある地点 $P = (t_P, x_P)$ の累積交通量 N_P を求めたい．累積交通量 N_P は，地点 P に到達する wave path（特性曲線）群 $\mathbf{W}_P$ の累積交通量値のうち最小のものであるので，以下のように表現される：

$$N_P = \min_{\mathcal{W}\in\mathbf{W}_P} . \left[N_{B(\mathcal{W})} + \Delta_{\mathcal{W}}\right]. \qquad (19)$$

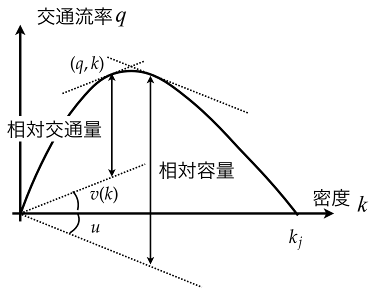
ここで，$\Delta_{\mathcal{W}}$ は境界から地点 P までの特性曲線上で予測される累積交通量の変化である：

$$\Delta_{\mathcal{W}} \equiv \int_{t_{B(\mathcal{W})}}^{t_P} r(k,t,x)dt \qquad \forall \mathcal{W} \in \mathbf{W}_P. \qquad (20)$$

[7] Luke[22) は，同様の原理を土壌侵食に関する文脈で提案している．
[8] 衝撃波上で交通量・密度が不連続になることに対応する．



図–7: Wave path と valid path



図–8: 相対交通量と相対容量

(4) 交通流の変分理論

交通流の変分理論 (Variational theory of traffic flow)[12)]（以下，この手法を VT と呼ぶ）は，時空間上の各地点の累積台数を求める問題を “変分問題（最適制御問題）” として定式化するものである．この手法の交通解析上の意義は様々であるが，大きく以下の点が挙げられよう：

1. 様々な複雑な境界条件下の KW 問題を解析する統一的な方法を与える（本節の **a)**）
2. Dynamic Programming (DP) 原理に基づく効率的な解法を与える（本節の **b)**）
3. 様々な交通流モデルの関係性に関する統一的な見方を与える（次章）

よりテクニカルな点としては，この手法により最小包絡線原理の解の安定性を証明することができる[9]．

a) 基本理論

VT でも，状態変数は累積台数 $N(t,x)$ であり，HJ 方程式 (15) によりそのダイナミクスが記述される．

いま，時間上を速度 $u(t,x) \in [-w, v_f]$ で走行する移動観測者を考える．このとき，移動観測者が実際に観測する累積交通量の変化量（相対交通量）(17) を知る

[9] このことをイメージするには（第二の意義とも関連するが），ここでの変分問題が KW モデルの “等価最適化問題” であると考えるとよいであろう．交通量配分理論の発展からもわかるように，Wardrop 均衡モデルに対する Beckmann の等価最適化問題が見つかったことで，解の性質（存在，一意性，安定性等）を調べやすくなり，また，問題を解く効率的なアルゴリズムも構築可能となったのであった．

ためには，その移動軌跡上の密度 k が必要であり，そのために特性曲線法を用いたのであった．しかし，最小包絡線原理で見たように，特性曲線法で求められた累積台数値は（一旦，特性曲線が交われば）“上限値”として用いられるのであり，実際の値を予測することは必ずしも大事ではない．そこで，移動観測者が観測可能な累積交通量の最大変化量を考える．これが，“相対容量（relative capacity）”と呼ばれるものであり，VT において中心的な役割を果たす概念である．

相対容量は，移動観測者の速度を $u(t,x)$ とすれば，

$$R(u,t,x) = \sup_{k\in[0,k_j]} .\{Q(k,t,x) - ku(t,x)\}. \tag{21}$$

で与えられる [10]．Q は凹関数であるので，(21) の最大化条件は $\partial Q/\partial k = u$ であり，移動観測者の速度 u と FD の傾きが並行となる密度 k^* で最大値をとる（図 8）．また，移動観測者の速度 u が wave speed $v(k)$ に一致するとき，相対交通量と相対容量は一致する．

相対容量を導入する最大の利点は，相対容量 $R(u,t,x)$ が密度 k（初期条件や境界条件等のインプット・データ）に依存しないことである．このことにより，任意の速度 $u \in [-w, v_f]$ で走行する移動観測者の軌跡（valid path と呼ぶ）に沿った累積交通量の変化の“上限”を，その軌跡に沿った密度変化と独立に評価することができる：

$$\frac{dN(t,x(t))}{dt} = r(k,t,x) \le R(u,t,x). \tag{22}$$

いよいよ，ある地点 P の累積交通量 N_P を求める問題を考えよう（図 7）．まず，初期・境界 $\mathbf{B}$ から速度 $u \in [-w, v_f]$ で点 P に到達する valid path 群を $\mathbf{V}_P$ とおく（当然，$\mathbf{W}_P \subset \mathbf{V}_P$ の関係が成り立つ）．ある valid path $\mathcal{P}$ を考えたとき，相対容量を用いれば，ある境界 B から地点 P の累積交通量の変化の上限 $\Delta(\mathcal{P})$ は，

$$\Delta(\mathcal{P}) = \int_{t_{B(\mathcal{P})}}^{t_P} R(u,t,x)dt \tag{23}$$

である．ここで，$\Delta(\mathcal{P})$ は経路 $\mathcal{P}$ の関数であることを表している [11]．この累積交通量の変化の上限 $\Delta(\mathcal{P})$ を用いれば，地点 P の累積交通量 N_P は以下を制約条件を満たさなければならない：

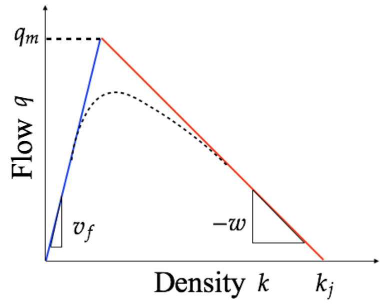
$$N_P \le N_{B(\mathcal{P})} + \Delta(\mathcal{P}) \qquad \forall \mathcal{P} \in \mathbf{V}_P \tag{24}$$

さらに，VT では，この制約条件を満たす累積交通量のうち最大のものが実現すると仮定する：

$$\sup_{\mathcal{P}\in\mathbf{V}_P} . N_P \quad \text{s.t. } N_P \le N_{B(\mathcal{P})} + \Delta(\mathcal{P})$$
$$\Leftrightarrow \quad N_P = \inf_{\mathcal{P}\in\mathbf{V}_P} . \left[N_{B(\mathcal{P})} + \Delta(\mathcal{P})\right]. \tag{25}$$

これが HJ 方程式 (15) の解を与える変分問題（最適制御問題）である．

[10] $-R$ は Q の Fenchel-Legendre 変換である．
[11] 前節で定義した $\Delta_{\mathcal{P}}$ は経路の関数ではなく，特性曲線法（連立一次常微分方程式）の結果として導かれる“値” である．



図–9: 三角形の Fundamental Diagram

この理論で求められる累積台数値は，wave path 群が valid path 群に含まれること（i.e., $\mathbf{W}_P \subset \mathbf{V}_P$），特性曲線上の相対交通量は相対容量に一致すること（従って，$\Delta(\mathcal{W}) = \Delta_{\mathcal{W}}$）を考えれば，最小包絡線原理で求めた累積台数値に一致することが容易に示すことができる [11]．また，問題 (25) の目的関数は経路 $\mathcal{P}$ の関数であり，$N_{B(\mathcal{P})}$ と $R(u,t,x)$ を “コスト”とみなせば，（連続時空間上での）最短経路問題とみなすことができる（図 7）．

さらに，この理論では複雑な境界条件や状況を相対容量という概念で統一的に扱うことができる．例えば，時間や位置により FD が変化する場合（e.g., 信号）は，その時刻・位置を移動観測者が横切る際の累積台数の最大変化量（i.e., 青現示のときは容量 q_m，赤現示のときは 0）を与えてやるだけでよく，問題 (25) の複雑さ自体は変わらない．また，プローブ車両の軌跡データのような（流体ではない）境界条件も容易に扱うことができる．例えば，この軌跡データを初期条件として考えるのであれば，その軌跡 $\mathbf{B}$ に沿った累積台数値 $N_{\mathbf{B}}$ を 1 とすればよい．そのため，多様なソース（e.g., 感知器，プローブ車両，bluetooth）からの情報を融合する手法としても応用されている（例えば，文献 [23),21)] を参照）．

最後に，一様な道路で FD が図 9 に示すような三角形で与えられる状況を考えよう（forward wave speed: v_f, backward wave speed: $-w$, 容量: q_m）．このとき，相対容量は，以下の式に帰着する：

$$R(u) = (1 - u/v_f) \cdot q_m. \tag{26}$$

つまり，相対容量は移動観測者の速度 $u\ (= dx/dt)$ の線形関数となる．従って，境界 B から valid path $\mathcal{P}$ を通って地点 P へ至るまでの累積交通量の変化量の上限は，

$$\Delta(\mathcal{P}) = \int_{t_{B(\mathcal{P})}}^{t_P} (1 - (dx/dt)/v_f)q_m dt = [(t - x(t)/v_f)q_m]_{t_{B(\mathcal{P})}}^{t_P}$$
$$= (t_P - t_B)q_m - (q_m/v_f)(x_P - x_B) \tag{27}$$

であり，経路 $\mathcal{P}$ とは無関係に決まる．そしてこのとき，

最短経路問題 (25) は, 以下の境界選択問題に帰着する [12]:

$$N_P = \inf_{B \in \mathbf{B}} \cdot \left[N_B + (t_P - t_B) q_m - (q_m / v_f)(x_P - x_B) \right]. \quad (28)$$

b) 解法

ここでは，三角形の FD が与えられている状況を考え，連続時空間上の最短経路問題 (25) を解くことを考える（より一般的な状況に対する解法は Daganzo[12] を参照）．VT では，問題 (25) を時空間上に構成した "離散的なネットワーク" における最短経路問題に帰着させ問題を解く．このネットワークが持つべき性質は,

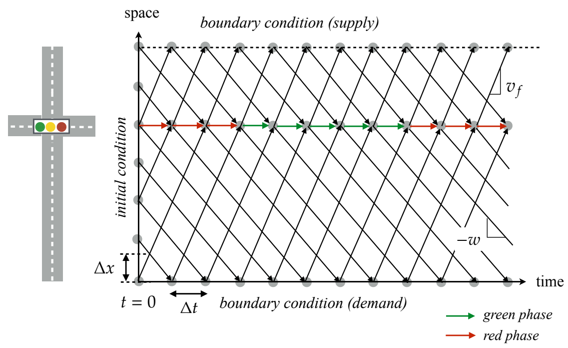
1. 各ノードからでるそれぞれのリンクの傾きは wave speed（ここでは，$-w, v_f$ のいずれか）である
2. そのリンクのコストは相対容量で与える

である．なぜ，wave speed だけを考えればよいかと言えば（VT の理論によれば $[-w, v_f]$ の任意の速度で移動観測者は走行可能である），wave path は必ず最短経路になるためである（i.e., valid path 全てをあえて考える必要はない）．そのため，このネットワークは "sufficinet network" と呼ばれる．

より具体的には，図 10 に示すようなネットワークを構築すればよい．このネットワークにおいて，ノードは一様な道路区間の境界（図 10 では信号交差点の位置）や初期・境界条件を与える時空間上の位置に配置され，それらを繋ぐリンクは $-w, v_f$ のいずれかの傾きを持つ．また，forward wave speed v_f の傾きを持つリンクのコストは 0，backward wave speed $-w$ の傾きを持つリンクに沿って移動する際の単位時間あたりのコストは $k_j \Delta x$ $(= w\Delta t)$ である．ここで，一様な道路区間の内部（ここでは例えば，信号交差点と上流端の間）にノードを配置する必要がない理由は，一様な道路内部の任意の 2 点間の相対容量の変化が経路に依存しないためである（式 (27) を参照）．

そして，ネットワーク上のノード P の累積台数値 N_P は，問題 (25) と同様に，到達可能な境界ノードからそのノードまでの多起点 1 終点の最短経路問題を解くことにより与えられる．さらに，このネットワークにダミーノードを追加し，そのダミーノードから境界ノード $B \in \mathbf{B}$ へリンク（コストは N_B）を張れば，全てのノードの累積台数値を一括で求める問題が 1 起点多終点（ダミーノードが起点，境界ノードを除く全ノードが終点）の最短経路問題に帰着する．

この解法は，LWR モデルの差分法 (Godunov 法 [19]) である Cell Transmission Model (CTM)[9] に比べていくつもの優位性を持っている [13]．まず，一つは，計算効率が高いという点である．これは，CTM のように空間を細かいセルに分割する必要がなく，また Dynamic Programming



図–10: 時空間上の sufficient network

（DP）原理に基づくアルゴリズム（e.g., Dijkstra 法 [14]）が利用可能であるためである．二つ目は，計算精度が高いという点である．CTM は forward wave speed を基準にセルを分割するため [15]，下流側から backward wave speed で伝わる波の伝播（i.e., 特性曲線）が正確に表現できない．これに対して VT に基づく解法では，それぞれ wave speed に沿ったネットワークを考えているため，より正確な計算が可能となる．なお，CTM の利点としては，ネットワークへの拡張 [10] が比較的容易であるということが挙げられる．ただし，VT タイプ（あるいは Newell の KW 理論タイプ）のネットワーク拡張の研究も近年進んでおり，これについては **4.** を参照されたい．

3. 様々な交通流モデル間の関係

交通流モデルは，複数の座標系のもとで定式化できる．また，解を求める際にも複数の離散化のあり方が考えられる．そのため，KW 理論を参考にした様々な交通流モデルが提案されてきた．しかし，これらのモデルは KW 理論と同様の考え方に基づいているとはいえ，その KW 理論との数学的な等価性は必ずしも明確ではなかった．近年，VT の枠組みにより，これらのモデルと KW 理論との等価性（双対性）が厳密な意味で明らかにされ，互いの関係が体系づけられた [25),26),27)]．

これらの交通流モデルは，同一の物理現象を記述する様々な手法を提供しており，理論上興味深い含意を見出せるほか，実用上有利な手段となりうるといえる．例えば，マクロな交通流モデルに対し，ミクロな行動原理による基礎づけを与えられる．本章では，主に Daganzo[25] と Laval and Leclercq[27] に基づき，これらのモデルについて概説する．

[12] 一様な Q を持つ HJ 方程式分に対する弱解は「Hopf–Lax formula」として知られており [20]，この問題もその特殊ケースである．

[13] CTM を変形することで VT の解法を導出することもできる [24]．

[14] このネットワークはループを含まないため (directed acyclic graph)，Dijkstra 法より高速なアルゴリズムも利用可能である（ヒープ・ソートではなくトポロジカル・ソートに基づく）．

[15] 差分法が不安定になることを防ぐためであり, 一般に CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件あるいはクーラン条件として知られている．

(1) 座標系のとり方

先述したとおり，交通流は t–n–x の三次元累積曲面で記述することができる．この曲面を，「t–x 座標系における状態量 n」とした表現が累積台数 $N(t,x)$ である．この座標系は時間・空間に対して固定されており，Euler 座標系と呼ばれ，古くから広く用いられる古典的な考え方といえる．

ところで，同じ交通流に対し，「t–n 座標系における状態量 x」とした表現 $X(t,n)$ や，「n–x 座標系における状態量 t」とした表現 $T(n,x)$ も可能である．これらは車両と共に（空間・時間に対して）移動する座標系であり，移動座標系や Lagrange 座標系 [26] と呼ばれる．以上を用いた同一交通流の表現を図 11 に示す．KW 理論に基づく交通流モデルは上記のそれぞれの表現・座標系のもと定式化できる．Laval and Leclercq[27] はそれらを以下のように分類した：

N モデル $N(t,x)$ を求める Euler 座標系のモデル

X モデル $X(t,n)$ を求める Lagrange 座標系のモデル

T モデル $T(n,x)$ を求める Lagrange 座標系のモデル

a) N モデル

N モデルは，先述したオリジナルの KW 理論と同一である．比較のため再掲すると，

$$\frac{N(t,x)}{\partial t} = Q(-N_x). \tag{29}$$

また，VT による表記は以下であった：

$$\begin{cases} N_P = \inf_{\mathcal{P}\in\mathbf{V}_P}.\left\{N_{B(\mathcal{P})} + \Delta(\mathcal{P})\right\} \\ \Delta(\mathcal{P}) = \int_{t_B(\mathcal{P})}^{t_P} R(u,t,x)dt \end{cases} \tag{30}$$

図 11(b) は解 N の例（i.e., 累積台数の等高線，つまり，車両の軌跡）である．

b) X モデル

X モデルにおいて，N モデルの状態変数（q,k）に対応する状態変数は，速度と車頭距離（v,s）である：

$$v(t,n) = \frac{\partial X(t,n)}{\partial t}, \quad s(t,n) = -\frac{\partial X(t,n)}{\partial n}. \tag{31}$$

いま，$q = v/s$，$k = 1/s$ の関係式を，式 (29) に代入して整理すると，X モデルは下式で表される：

$$\frac{\partial X(t,n)}{\partial t} - V(-X_n) = 0 \tag{32}$$

$X(t,n)$ は車両 n の時刻 t における位置 (km)，V は速度–車頭距離関係を表す FD であり，$V(s) = Q(1/s)s$ である (図 12 を参照)．

式 (32) も Hamilton–Jacobi 方程式であるので，前章で示した要領で変分問題を構成することができる．

$$\begin{cases} X_P = \inf_{\mathcal{P}\in\mathbf{V}_P^X}.\left\{X_{B(\mathcal{P})} + \Delta^X(\mathcal{P})\right\} \\ \Delta^X(\mathcal{P}) = \int_{t_B(\mathcal{P})}^{t_P} R^X(q,t,n)dt \end{cases} \tag{33}$$

図 11(c) は解 X の例（i.e., 位置の等高線，つまり，各位置の累積曲線）である．ここで，$R^X(\eta,t,n)$ は t–n 平面を速度 $dn/dt = q$ で（交通量 q を観測しながら）移動する観測者が経験できる位置 $X(t,n)$ の最大変化量（相対速度の最大値）である：

$$R^X(q,t,n) = \sup_{s\in[1/k_j,\infty)}.\{V(s,t,n) - sq(t,n)\}. \tag{34}$$

そして，$X_{B(\mathcal{P})} + \Delta^X(\mathcal{P})$ は時刻 t_P までに n_P 番目の車両が到達できる位置 X_P の “上限値”を与えることになる．N モデルが制約条件の中で最も多く交通を流すと仮定したのと同様に，各車両も制約（i.e., 先行車両の位置と自分の最大速度 v_f の制約）の中で最も移動すると仮定する．すると，式 (33) の第一式が得られる．

N モデルと X モデルは双対関係にあり，どちらも同じ物理現象を表現している [25]．そのため，両モデルに等価な境界条件と FD が与えられれば，$N(t,x)$ と $X(t,n)$ のそれぞれが n–t–x 空間内で構成する曲面が互いに一致する．つまり，

$$N(t,X(t,n)) = n \tag{35}$$

$$X(t,N(t,x)) = x \tag{36}$$

がほとんど全ての x,t で成り立つ．例外は N モデルにて $k = 0$ となる場合で，その場所では X モデルにて $s = \infty$ な特異点が生じ式 (36) が成り立たない（X が多価関数になる）が，そのような点を含んでいても両モデルから等価な解（弱解）を得られる [28),29]．

c) T モデル

T モデルにおいて，X モデルの状態変数（v,s）に対応する状態変数は，車頭時間とペース（単位距離を進むのに要する時間）（h,p）である：

$$h(n,x) = \frac{\partial T(n,x)}{\partial n}, \quad p(n,x) = \frac{\partial T(n,x)}{\partial x}. \tag{37}$$

いま，$v = 1/p$，$s = -h/p$ の関係式を，式 (32) に代入して整理すると，T モデルは下式で表される：

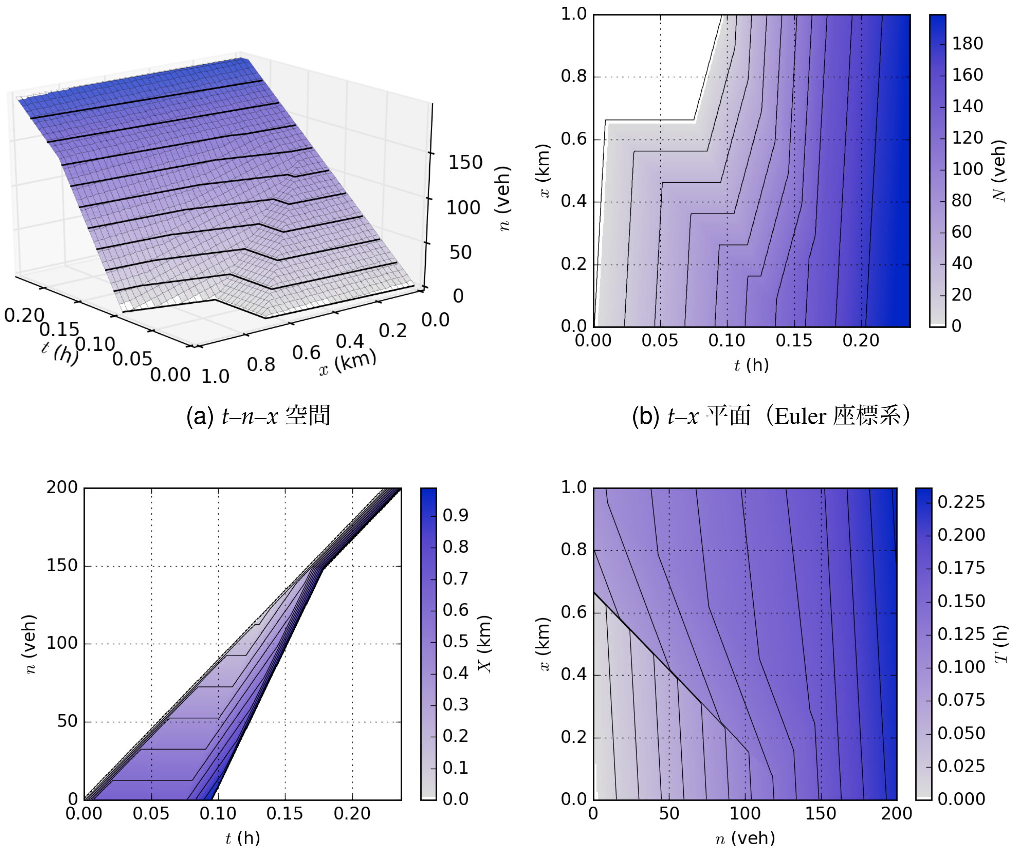
$$\frac{\partial T(n,x)}{\partial n} - H(T_x) = 0 \tag{38}$$

ここに，$T(n,x)$ は車両 n が位置 x に存在する時刻 (h)，H は車頭時間–ペース関係を表す FD であり，$H(p) = -V^{-1}(1/p)p$ である（図 13）．T モデルでは，N モデル，X モデルにおける t の役割を n が担うことになる．

式 (37) もまた Hamilton–Jacobi 方程式であるので，以下の変分問題を構成することができる．

$$\begin{cases} T_P = \sup_{\mathcal{P}\in\mathbf{V}_P^T}.\left\{T_{B(\mathcal{P})} + \Delta^T(\mathcal{P})\right\} \\ \Delta^T(\mathcal{P}) = \int_{n_B(\mathcal{P})}^{n_P} R^T(-s,n,x)dn \end{cases} \tag{39}$$

図 11(d) は解 T の例である．このモデルは直感的に分かりづらいが，これまでと同様に解釈を試みると以下のようになる．$R^T(-s,n,x)$ は n–x 平面を速度 $dx/dn = -s$ で（負の車頭距離 s を観測しながら）移動する観測者が経験しなければならない時刻 $T(t,n)$ の最小変化量（相



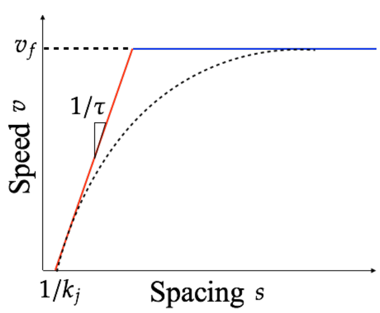
(a) t–n–x 空間

(b) t–x 平面（Euler 座標系）

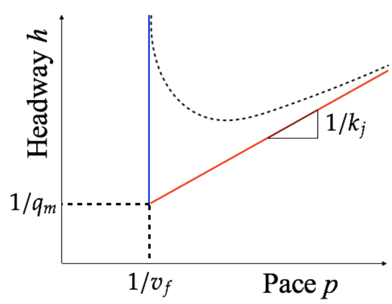
(c) t–n 平面（Lagrange 座標系）

(d) n–x 平面（Lagrange 座標系）

図–11: 様々な座標系での交通流の表現



図–12: 速度–車頭距離関係を表す FD



図–13: 車頭時間–ペース関係を表す FD

対車頭時間の最小値）である：

$$R^T(-s,t,n) = \inf_{p\in[1/v_f,\infty)} \{H(p,n,x) + ps(n,x)\}. \tag{40}$$

そして，$T_{B(\mathcal{P})} + \Delta^T(\mathcal{P})$ は n_P 番目の車両が位置 x_P に到達する時刻 T_P の “下限値”を与えることになる．最後に，各車両は制約（i.e., 先行車両の通過時刻と自分の最小ペース $1/v_f$ の制約）の中でなるべく早くそれぞれの位置 x に到達するように走行するとすると，式 (39) の第一式が得られることになる．

以上の T モデルは，N モデルとの双対性が厳密には示されておらず，等価な解（弱解）を得られる理論的な保証がない [29]．つまり，車両が停止した（特異点 $p = \infty$）場合，その位置の T は複数の値をとり，T が多価関数になる（図 11(d) 中の不連続線）．ただし，現在のところ，T モデルと N モデルの数値解の間に矛盾する結果は報告されていない．

d) 各モデルの意義

N，X モデル間の双対性の重要な含意として，交通流の流体近似に基づくマクロモデルと，追従モデルに基づくミクロモデルの等価性がある [16]．つまり，KW 理論において，マクロな交通流の挙動がミクロな各車両の行動原理によって基礎づけられるという意味であり，

物理モデルとして非常に好ましい性質である [30].

具体的には，図 12 に示した区分線形の FD を考え，X モデルの VT 表現（式 (33)）を適当に離散化すると，下式を得られる：

$$X(t,n) = \min.\left\{\begin{array}{l} X(t-\tau,n)+v_f\tau, \\ X(t-\tau,n-1)-1/k_j \end{array}\right\} \tag{41}$$

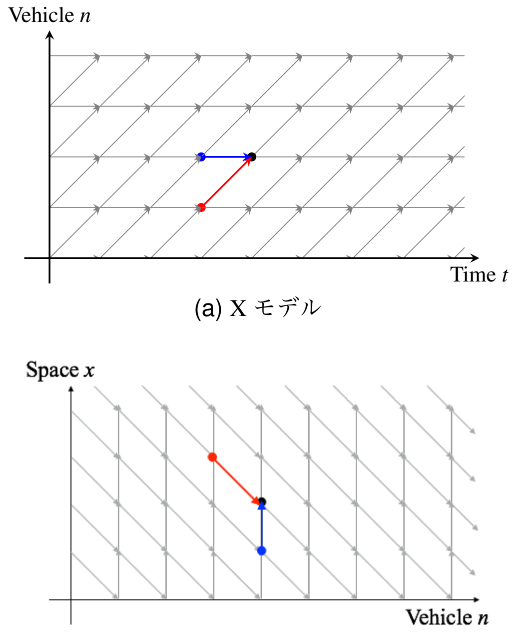
本式は追従モデルとして解釈できる．すなわち，車両 n の時刻 t における位置は，その τ 時刻前の交通状態に基づき決まる．つまり，τ は反応遅れ時間に関係する変数となる．そして，車両 n は自由流時には速度 u で走行（min 内第一項）し，渋滞時には先行車両 $n-1$ に対し安全間隔を確保するよう走行（同第二項）する．式 (41) からも明らかになようにこれは，Newell の単純追従モデル [33] そのものである．

一方，解法という意味では，それぞれのモデルで異なる特徴を持つ．例えば，先にも述べたように，LWR モデルの Godunov 法である CTM と VT に基づく解法は一般に一致しないが，X モデルでは，保存則形式 (32) を Godunov 法により離散化したモデルと，VT を離散化したモデル (41) が比較的緩い現実的な条件のもとで互いに一致する．これは，X モデルの FD が単調であるという特徴による（N，T モデルでは成立しない）．すなわち，特性曲線の傾きが非負であり，情報が時間経過により一方向（n が減少しない方向）にのみ伝わる．これを可視化したものとして，図 14(a) に X モデルの sufficient network を示す（図 (b) は T モデルのネットワークである）．

FD の単調性は，データ同化による交通状態推定 [34] への応用の際には，さらに有用となる．これは，X モデルでは Godunov 法がより簡便な風上差分法に帰着されるためである．そのため，X モデルでは，Godunov 法に基づく離散モデルが微分可能になり，計算コスト・精度の観点から推定が効率的になる [26),35]．一方，N モデルでは微分不可能であり，問題（例：Monte Carlo 法の必要性）が生じる [36]．

交通流モデリングの柔軟性という観点からもこれらのモデルには違いがある．すなわち，モデルによって，容易に考慮できる異質性が異なる．現実の交通流には，様々な要素に依存した異質性があるが，実際上重要な異質性の例として，位置固有の要素としての地点ボトルネックや，車両固有の要素としての運転挙動が挙げられよう．これらの異質性を，KW 理論においては基本的に FD の変化によって記述するため，N モデルは位置・時刻に依存した異質性を扱うことができることになる．それに対し，X モデルでは位置固有の要素の考

[16] なお，マクロとミクロの等価性はある種の高次交通流モデルの場合にも議論されており（e.g., Aw et al.[31]），より一般な流体近似モデルと追従モデルを相互に変換する手法も提案されている [32]．



(a) X モデル

(b) T モデル

図–14: VT の sufficient network．黒点の状態は，青点（自由流）と赤点（渋滞）の状態により決まる．

慮は難しいが，車両固有の要素を容易に考慮できる [37]．T モデルは位置・車両固有の要素を容易に考慮できる．なお，これらの異質性は，それぞれのモデルの sufficient network のリンクの傾きやリンク・コストを変えることになるが，そのネットワーク上の最短経路問題により状態変数が求まるということに変わりはない．

さらに，ここで述べてきた N, X, T モデルの関係を用いると，従来提案されてきた様々な交通流モデルの関係性を整理することができる [25),27]．より具体的には，様々な数値計算・シミュレーションモデルやセルオートマトンモデル（例えば，有名な Nagel–Schreckenberg モデル [38]）が，採用する座標系（あるいは状態変数 N, X，T）と離散化する変数（t，x，n のいずれかまたは全て）の数という 2 つの軸を用いて分類される．すなわち，VT は交通流モデルに対する統一的な見方を提供しているとも言えるであろう．

(2) 多車線化

通常の KW 理論は単一クラス単一車線の交通流を扱う．一方，実際の交通流は多クラス多車線であり，通常の KW 理論では説明できない現象が実際上重要になる場合がある．多車線化における大きな違いは車線変更により FIFO 則が満たされなくなることにある．したがって，車両の到着順という複雑な現象の考慮が必要となり，未だ十分に体系化されていない．

Euler 座標系では車両の区別が困難であり明示的な多クラス化が困難である反面，車両の到着順を考慮する必

要がない．多車線化された N モデルの 1 つとして，車線変更需要の割合を考慮したものが提案されている [39]．また，より現実的な車線利用率の偏りを表現するモデルへの拡張が提案されている [40]．これらのモデルでは，多クラス化の影響は車線変更需要の割合に反映されているとみなすことができる．他にも様々な手法が提案されており，さらなる整理が必要である．

一方，Lagrange 座標系では車両の性質の相違を明示的に考慮できるため，N モデルと比較し直接的に多クラス交通流を表現できる．Costeseque and Duret[41] は T モデルを多クラス多車線化することを提案している．本モデルでは，車両の追抜き現象を moving bottleneck 理論 [42] を用いて表現し，車両の到着順に対しては，特別な座標系を導入することで FIFO 則が満たされなくなる状態を適切に表現している．

(3)　今後の展開

今後の展開には以下が考えられる：

- Lagrange 座標系の確率的拡張
- Lagrange 座標系の多クラス多車線モデルの構築
- T モデルと N モデルとの間の双対性の確認

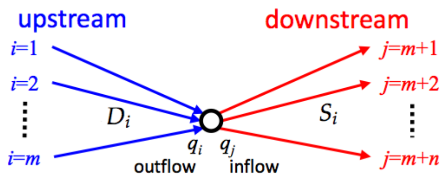
確率的交通流モデルでは，基本的に異質性や不確実性を確率的要素としてモデル化するため，N，X，T モデル毎に異なる要素を考慮できると期待される．Euler 座標系のモデルは確率的拡張がいくつか提案されている [43,44,45,46]．一方，Lagrange 座標系のモデルに関する研究は少ないが，文献 [27] によれば N モデルと比較し確率的拡張が容易とされる．

また，先述した通り，Lagrange 座標系における多クラス多車線モデルについても提案がなされてきている [41]．交通流モデルの多車線化において考慮される車線変更は，車両の異質性や車線変更事象が生起する不確実性という確率的要素を含むため T モデルにおける多クラス多車線化は（FIFO 則の特別な取り扱いを除けば）より直接的なものとなる．

T モデルは，先述した通り固有の長所を持っているため，その KW 理論との整合性を確認する意義は大きいといえる．Daganzo[29] で提案された特異点を扱う手法は T モデルには適用できないとされているため，新たな手法を構築する必要がある．

4.　KW 理論のネットワーク展開

本章では，KW 理論のネットワークに拡張するための理論について解説する．前章までの理論は，道路ネットワークのリンク上での交通流ダイナミクスを記述するものであるとみなせるが，本章の理論はノード（合流・分流・交差点）あるいはリンク・ノード間での交通流を適切に記述するものである．



図–15: ノードの構造と変数

(1)　ノードモデル

ノードモデルの役割は，ノードに接続するリンク間で実現する交通量を，リンクモデルと整合的に記述することである．一番簡単な例として，あるリンクの下流からの衝撃波が上流側のノードに到達した際に，その衝撃波がノードより上流側のどのリンクにいかなる速度で波及するかの記述が求められる．この問題を KW 理論において解くためには，リンク単体と比べてノードにおいて自由度が増していることから，ノードにおける付加的な条件が必要となるであろう．しかしながら，単純な条件を与えるのみでは，物理現象として非現実的な解（容量以上の流量や，先詰まりを起こしている状況下での正の速度の衝撃波など）が発生しうる．そこで近年，ノードにどのような（エントロピー）条件を設定すれば，交通流という物理現象として不自然でなく，かつ数学的に解が得られるかが研究されている．本節ではその発展と現状を解説する．

なお，多くのモデルにおいて，ノードは point-like に，すなわち物理的な領域を有しない点として扱われており，本節で説明するモデルの多くもこれに該当する．この場合，ノードを介して衝撃波が上流に伝播する現象は，下流リンクの容量が上流リンクの流量に対して不足していることにより発生する [17]．一方で，現実にはノードそれ自体の交通容量を考慮すべき場合もある [18]．この影響を扱うモデルは，本節の最後に紹介する．

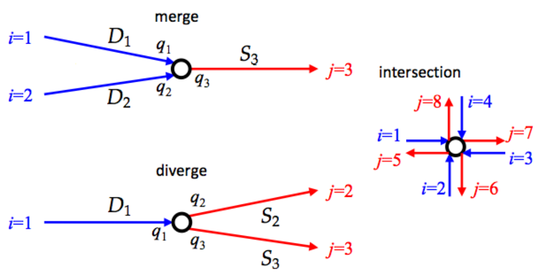
a)　ノードの構造と変数

はじめに，本章で扱うノードおよびノードに接続するリンクの一般的な構造を図 15 に示す．これは，ノードと有向リンクとにより構成されるネットワークから，あるノード周辺だけを切り出したものと考えて良い．

ノードには $m+n$ 本のリンクが接続している．$i=\{1,2,...,m\}$ の m 本のリンクからノードへ交通流が流入する．これを上流 (upstream) リンクと呼ぶ．また，ノードから $j=\{m+1,m+2,...,m+n\}$ の n 本のリンクへ交通流が流出する．これを下流 (downstream) リンクと呼ぶ．たとえば，単純な合流 (合流) は $m=2, n=1$,

[17] 高速道路における合流や分岐が該当する．

[18] 都市部の平面交差点，ラウンドアバウト，信号交差点が該当する．



図–16: ノードの例

単純な分岐 (分流) は $m=1, n=2$，一般的な十字路は $m=4, n=4$ の場合である（図 16）．

ここで，ノード周辺での流量に関する変数を設定する．上流リンク i において，ノードに向かって流出する流量のことを，リンクから見てリンク i の outflow, sending flow などと呼び，q_i と書く．まったく同じ流量をノードから見た立場で incoming flow，inbound flow，node inflow などと呼ぶこともある．下流リンク j において，ノードから流入する流量のことを，リンクから見てリンク j の inflow，recieving flow などと呼び，q_j と書く．まったく同じ流量をノードから見た立場で outgoing flow，outbound flow，node outflow などと呼ぶこともある．ノードを通ってリンク i からリンク j へ進む流量を q_{ij} と書く．

また，上流リンク i がノードへ流出させたい流量のことを，その量が実際に流出できるかとは独立に demand と呼び，D_i と書く．同様に，下流リンク j へノードから流入可能な流量のことを，その量が実際に流入するかとは独立に supply と呼び，S_j と書く．さらに，ノードを通ってリンク i からリンク j へ進みたい流量を D_{ij}，進みうる流量を S_{ij} と書く．なお，この demand-supply 表現と，前出の FD における表現とは，**図–17** に示すような関係にある．すなわち，

$$D_i = \begin{cases} q_i, & \text{if } k \leq k_{crit} \\ q_{max}, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{42}$$

および

$$S_j = \begin{cases} q_{max}, & \text{if } k \leq k_{crit} \\ q_j, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{43}$$

である．

b) 単純な合流・分流モデル

ノードにおけるモデル化の端緒は，1995 年の CTM のネットワーク拡張 [10] にある．そこでは，合流 ($m=2, n=1$) および 分流 ($m=1, n=2$) が扱われている．この際に条件として用いられている項目を順に説明する．

i) 車両台数の保存：$\Sigma_i q_i = \Sigma_j q_j$
車両台数の保存は物理現象として明らかな制約条件である．あるノードに流入する台数と流出する台数はすべての時刻で一致しなければならない．なお，ノードに大きさを考える場合は，ノード上の車両台数の増減を含めた形で保存則が記述される．

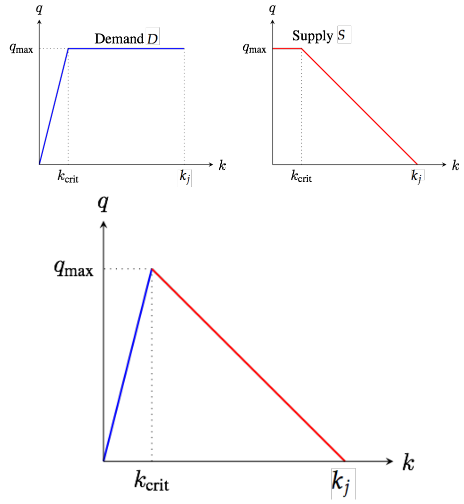
ii) 流量の最大化：$\max \Sigma_i \Sigma_j q_{ij}$
本来は，各ドライバーは前に進みうる限り進むという実現象に基づく条件である．なお，この本来の意味は必ずしも流量最大化と等価ではないことが後に示される [47]（詳細は後述）．

iii) demand と supply への整合性：$q_i \leq D_i$，$q_j \leq S_j$
物理現象として満たされるべき制約条件である．つまり，実現する流量は，demand および supply の小さい方以下である．

さらに，実際に合流と分流の問題を解くために以下の条件を考えると，それぞれに最低 1 つずつのパラメータが必要となる．

iv) 分流における分岐率一定
これは，FIFO の成立と等価であり，マクロ交通流における一般的な条件である．つまり，微小時間では，あるリンク i から各リンク j に進む流量の比率は変化しない．

v) 合流における合流比率の決定方法の存在
この条件の意味は直後で述べる．これは物理現象やマクロ交通流一般の条件とは少々異なる．



図–17: Demand-Supply 表現と FD との関係

まず，合流について述べる．物理現象として重要な点は，demand が supply を超えているとき ($D_1 + D_2 > S_3$) は，下流リンクから渋滞が波及して上流リンクの少なくとも片方は渋滞流の状態を示すことである．ゆえに，各リンクの交通状態は以下の 3 パターンしかない．

- 上流リンクがすべて自由流ならば，$q_{13} = D_1, q_{23} = D_2$ である (demand-supply 関係)．流量最大化よりこれが成立するときは $D_1 + D_2 \leq S_3$ であり，下流リンクも自由流である．

- 上流リンクがすべて渋滞流ならば，supply の制約および流量最大化より $q_{13}+q_{23}=S_3$ である．ある合流比率 p_{13} および p_{23}(ただし $p_{13}+p_{23}=1$) を考えたとき [19]，渋滞流であるためには $D_1>p_{13}S_3$ かつ $D_2>p_{23}S_3$ であり，$q_{13}=p_{13}S_3$,$q_{23}=p_{23}S_3$ のように S_j を p に従って分配する流量が実現する．
- 上流リンクが自由流と渋滞流との 1 本ずつならば，supply の制約および流量最大化より $q_{13}+q_{23}=S_3$ である．自由流のリンクを $i=1$ とするならば $D_1\le p_{13}S_3$ かつ $D_2>p_{23}S_3$ である．従って，$q_{13}=D_1$ はすべて流入し，渋滞流のリンク 2 からは残りの $q_{23}=S_3-D_1$ が流入する．

このパラメータ p が上記の条件 v) であり，例えば，それぞれのリンクからの demand の比率によって決定する．

ついで分流について述べる．流量が満たすべき条件は，$q_{12}\le S_2$ かつ $q_{13}\le S_3$ かつ $q_1=q_{12}+q_{13}\le D_1$ である．また，あるリンク i からすべてのリンク j への分岐率を f_{ij}(ただし $\Sigma_j f_{ij}=1$) と表せば，

$$\begin{cases} q_1=\min\{D_1,\frac{S_2}{f_{12}},\frac{S_3}{f_{13}}\} \\ q_{12}=f_{12}q_1,\ q_{13}=f_{13}q_1 \end{cases} \tag{44}$$

が実現する流量である．

c) Invariant Principle

しかしながら，このような単純なモデルは，境界条件次第で解が不自然な挙動を招くことが指摘されている．たとえば，流出可能な下流リンクがあるにも関わらず衝撃波が上流に向かう解や，demand および supply の制約が満たされない解である．

一例として，上記合流モデルの例で，上流リンクが $D_1=200,D_2=100$ に対して，下流リンクは $S_3=270$ としよう（状態 1）．demand の比率により p を決定すると，次の瞬間には $q_{13}=180,q_{23}=90$ の流量が成立する (状態 2)．ここで上流リンクはともに $q<D$ の渋滞流となっているため，たとえば $q_{max}=250$ とすれば一定時間の後には $D_1=D_2=250$ となる．ここで再度 demand の比率により p を決定すると，$q_{13}=q_{23}=135$ の流量が成立する（状態 3）．ここでリンク $i=2$ に着目すると，状態 1 → 状態 2 の衝撃波（上流方向）よりも状態 3 → 状態 2 の膨張波（下流方向）のほうが速い．従って状態 2 自体が存在しないことになる．ところが状態 1 → 状態 3 の波速は正，すなわちノードに向かう方向である．従って状態 3 も存在しないことになり，そもそもこの境界条件では物理的に意味のある解が求まっていない．

このような不自然な挙動を招く原因は，これまでの議論で流量の時間変化を考慮していなかったことにある．そのため，解は得られたが波速の符号が整合しないという事態が起こりえる．そこで，「得られた解を代入したときに，微小時間変化において物理現象として不自然にならない」ことを保証するための条件を考える．これが，次に述べる “Invariant Principle”[13] である．ノードが満たすべき重要な要件およびその定式化として提示されたことで，ノードモデル発展の契機となった．

- ある上流リンク i において $q_i=D_i$ ならば，微小時間におけるすべての下流リンクの supply：S_j の増加は q_i に寄与しない．
- ある下流リンク j において $q_j=S_j$ ならば，微小時間におけるすべての上流リンクの demand：D_i の増加は q_j に寄与しない．

同じことを，別の観点から説明する．下流リンクの supply が不足し，ノードがボトルネックになっているとする．このとき，上流の demand：D_i の増加は q_j に寄与しないのだから，初期状態がいかなる $D_i<q_{max}$ の範囲であっても同一の q_j が導かれなければならない．本来はこの制約があるにもかかわらず，上記の例ではあるパラメータ p によりリンク i にとってのボトルネック容量を単独で決定してしまっているのである．

d) 一般のノードにおける要件

このような成果を下敷きに，2011 年にノードモデルが満たすべき一般的な要件が整理された [48]．具体的には，以下の 7 つである．

1. 任意の m,n で成立
   一般のノードに拡張するための必須要件である．
2. 車両台数の保存：$\Sigma_i q_i=\Sigma_j q_j$
   上述 i) の通り．
3. 流量の最大化
   上述 ii) と異なり，必ずしも $\max\Sigma_i\Sigma_j q_{ij}$ を意味しない．実際の意味は直後で述べる．
4. demand と supply への整合性：$q_i\le D_i$，$q_j\le S_j$
   上述 iii) の通り．
5. 流量は非負
   物理現象として明らかな条件である．
6. diverge における分岐率一定
   上述 iv) の通り．
7. invariant principle との整合性
   物理現象として満たすべき条件である．

ただし，これらの条件だけではそもそも物理現象が一意に定まっていない．

現象を一意に指定するためには，上述の条件 v)：合流比率の決定方法に相当する部分が必要である．つまり，下流リンク j の supply：S_j が demand：$\Sigma_i D_{ij}$ に対して不足した場合に，その supply を上流リンクにどのように配分するか，である．そこで，実際には以下の supply constraint interaction rule (SCIR) という条件を付

[19] この p_{12},p_{23} を priority parameter と呼ぶ．

加する[20]．すなわち，下流リンク j の supply に制約されている (従って $q_i < D_i$ である) 上流リンク i の集合を U_j とするとき，$f_{i'j} > 0$ である $\{i, i', j\}$ に対して

$$\frac{q_i}{q_i'} \geq \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{i'j}} \quad \forall i' \in U_j \tag{45}$$

が成り立つことである．ここで，α は合流比率を定めるパラメータであり，条件 (7) より α_{ij} は D_i に対して独立であることを要請する．SCIR は，ある上流リンク i の demand：D_{ij} に対して一番厳しい制約を与える下流リンク j が存在するとき，条件 (6) により，その supply：S_j は q_{ij} だけでなく q_i 全体に影響を及ぼすことを表現している．そして，その場合であっても，q_i の q_i' に対する比率は，j における合流比率を下回らないことを定めている．

このとき，著者自身が指摘する[48]ように，SCIR を満たす解は一般には全流量の最大化：$\max \Sigma_i \Sigma_j q_{ij}$ を実現しない．あるいは，SCIR を満たさずに全流量最大化を実現すると，ドライバー同士で不自然な譲り合い行動が発生しうる．実際のところ，上述の条件 3 は，全流量の最大化ではなく，各ドライバーはその進みたい方向が空いていれば必ず進むという「各リンクにおける流量最大化」を指している．そして，この意味での流量最大化と SCIR との組み合わせは，一意な解を導くことが示されている．この流量最大化は，後に holding-free という条件として整理された[47]．すなわち，

$$\begin{cases} (D_i - q_i)\Pi_{j, f_{ij}>0}(S_j - \Sigma_i f_{ij} q_i) = 0 \\ \Sigma_i f_{ij} q_i \leq S_j \\ 0 \leq q_i \leq D_i \end{cases} \tag{46}$$

である．また，そこでは，invariant principle を満たす解のうち，全流量最大化による解は holding-free 解の十分条件に過ぎず，必要条件ではないことが示された．そのうえで，SCIR による解は，結果的に holding-free 解を導くこと（すなわち，条件 3 を満たすこと）を示している．さらに，SCIR とは異なる supply の配分方法でも holding-free 解を導く手法が存在する[49),50)]ことを示している．

従って，条件 3 を holding-free に置き換えたうえで，合流比率の決定方法を適用事象に応じて適切に設定することで一意な解を求めることが，現段階でのノードモデルの解法といえよう．

e) さらなる要件と研究動向

以上で残されている課題は，主に以下の 2 点である．第一に，ノード自体の容量を組み込んだモデル化である．第二に，リンク上の KW 理論に見られたようなミクロモデルとの整合性の検討である．

これらに対し，ノードにおける車両のミクロ挙動に基づいて，前項で述べた条件を満たす 3 種類のモデル[48),50),49)]を含む一般的な枠組み (Generic class of first-order node models：GCNM) を示す試みが行われている[51)]．そこでは，新たに 2 種類のモデルが同様に条件を満たすものとして提案された．また，ノード自体の容量を internal supply constraint として整理した包括的な研究も行われている[52)]．そこでは，現時点では特別な場合以外には一意な解を得るための境界条件が見つかっていないことが報告されている．

(2) Network kinematic wave theory

交差点における分岐・合流などのネットワーク上の交通流ダイナミクスは，先述されたリンクモデルとノードモデルを組み合わせることにより表現できる．その表現の手順は，(1) リンクモデルに基づいたリンクの上・下流端（境界端）における送り出し・受け入れ可能な最大交通量を示す demand・supply 関数の導出と，(2) 導出した交通量とノードモデルに基づいた，リンク間における実際の遷移交通量の決定，から構成される．現在ネットワークの交通流モデルで主に用いられているリンクモデルは LWR モデルと Newell モデルに基づくものであり，前者は Cell Transmission Model[10)]，後者は Link Transmission Model[53)]と呼ばれる．これらは主に数値計算法として発展してきたが，近年では連続時間における定式化が整備されネットワーク交通流の特性解析のための手法として着目されており，様々なノードモデルと組み合わせた解析が行われている．

以下では，まず代表的なネットワーク交通流モデルである CTM・LTM における，demand・supply 関数の定式化についての概説を行う．次に，これらのリンクモデルにノードモデルを組み合わせた簡単なネットワークにおける交通流パターンの解析を行う．そして，解析結果の比較から，ネットワーク交通流のモデル特性について考察を行う．

a) Continuous-time formulation of CTM and LTM

まず，CTM と LTM のそれぞれにおける，あるリンク a の demand・supply 関数の定義について概説する．ここで，リンク a 上の位置を $x \in [0, L_a]$ で表し，リンク上流は $x = 0$，リンク下流は $x = L_a$ で示すものとする．また，リンク a での流率-密度関係を表す Fundamental Diagram は三角形型であるとし，$Q_a(k)$ によって示す．この FD において，前進波速度を v_a，後進波速度を $-w_a$，最大交通流率（容量）$q_{a,m}$ を取るときの臨界密度を $k_{a,o}$，取りうる最大密度を $k_{a,j}$ と定義する．

CTM では，時空間上の点 (t, x) における demand 関数 $D_a(t, x)$，supply 関数 $S_a(t, x)$ は交通密度 $k_a(t, x)$ の関数と

[20] 元の論文ではこの段階でノード自体の容量もあわせて考慮に組み込めるが，ここでは簡単のためリンクについてのみ考える

して次のように表される[10),54)]（式 (42)，(43) の再掲）：

$$D_a(t,x) = Q_a(\min\{k(t,x), k_o\}), \tag{47}$$

$$S_a(t,x) = Q_a(\max\{k(t,x), k_o\}). \tag{48}$$

一方，LTM では Newell の理論に基づき，ある時刻においてリンクの上・下流端で取りうる累積台数をそれ以前の時刻における境界値から求める．そして，その累積台数の時間についての微分を取ることにより，demand・supply 関数を導出している．具体的には，時刻 $\tau \in [0,t]$ までにリンク a に流入した累積台数 $F_a(\tau)$，リンクから流出した累積台数 $G_a(\tau)$ が既知であるとすると，時刻 t における demand・supply 関数はそれぞれ，

$$D_a(t) = \begin{cases} \min\left\{k_a(L_a - v_a t, 0)v_a + J(\lambda_a(t)), q_{a,m}\right\}, & t \leq \frac{L_a}{v_a} \\ \min\left\{f_a(t - \frac{L_a}{v_a}) + J(\lambda_a(t)), q_{a,m}\right\} & t > \frac{L_a}{v_a} \end{cases} \tag{49}$$

$$S_a(t) = \begin{cases} \min\left\{\left(k_{a,j}w_a - k_a(w_a t, 0)w_a + J(\gamma_a(t)), q_{a,m}\right)\right\}, \\ \qquad t \leq \frac{L_a}{v_a} \\ \min\left\{g_a\left(t - \frac{L_a}{w_a}\right) + J(\gamma_a(t)), q_{a,m}\right\}, \quad t > \frac{L_a}{v_a} \end{cases} \tag{50}$$

$$\text{where} \quad J(y) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{y}{\Delta t} = \begin{cases} 0, & y = 0; \\ \infty, & y > 0, \end{cases} \tag{51}$$

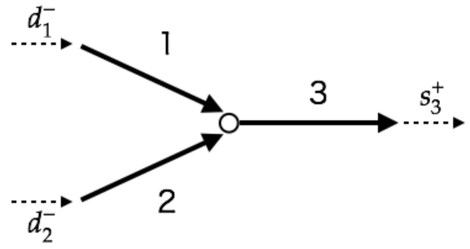
と求められる[55)]．ここで，$\lambda_a(t), \gamma_a(t)$ は，それぞれ時刻 t におけるリンクの待ち行列，空白領域の長さを表す．また，$f_a(t), g_a(t)$ は，それぞれ時刻 t における流入，流出交通流率を表しており，次のように定義される：

$$f_a(t) = \frac{d}{dt}F_a(t), \tag{52}$$

$$g_a(t) = \frac{d}{dt}G_a(t). \tag{53}$$

式 (49) と (50) は一見複雑に見えるが，その物理的な意味は CTM と同等であり，その解釈は待ち行列と空白領域の長さに基づき次のように与えられる．ある時刻 t の demand 関数 (49) は，もし待ち行列が存在しない（i.e., $\lambda_a(t) = 0$）のならば時刻 $t - L_a/v_a$ に流入した車両が自由流速度で下流端に到達するため，流入した時の交通流率と等しくなる．しかし，もし待ち行列が存在する（i.e., $\lambda_a(t) > 0$）ならば，流入した車両は待ち行列に追いつくため，demand 関数はリンクの容量値に等しくなる．同様に，ある時刻 t における supply 関数は，もし空白領域が存在しないのであれば時刻 $t - L_a/w_a$ における流出交通流率に制約されるが，空白領域が存在するのであればリンクの容量値と等しくなる．

CTM と LTM における demand・supply 関数は，その定式化がそれぞれ LWR の密度・Newell の累積台数ベースの表現に基づくという相違はあるものの，どちらも同等の物理制約を表現している．単一リンクに対して



図–18: 合流部を持つネットワーク

LWR モデルと Newell のモデルを適用した場合，等価な境界条件を仮定すればそれぞれの解は一致する．そのため，ネットワークの交通流モデルにおいても等価な境界条件を同等のノードモデルの元で与えれれば，その解である交通流パターンは一致することが期待される．しかし，実際には non-invariant なノードモデルを素朴に適用したとき，CTM と LTM は等価な解を持たない場合があることがわかっている[55)]．以下では簡単なネットワークに invariant・non-invariant なノードモデルを適用したときの定常的な交通流パターンの解析結果からこの事実を示す．

b) ネットワーク上の定常的な交通流パターン

図 18 に，合流部を持つ簡単なネットワークを示す．このネットワークでは，リンク 1,2 の上流から一定の交通需要が流入し，ノード i で合流後リンク 3 の下流端から流出する．リンク 1,2 上流への流入交通流率は $d_o^- = 1, d_{o'}^- = \frac{1}{4}$ とし，リンク 3 の下流端における流出可能交通流率は $s_3^+ = 1$ とする．また，ネットワーク上のリンク $a = \{1,2,3\}$ の長さ L_a，容量 $q_{a,m}$ は次のように与えている：$L_1 = L_2 = L_3 = 1, C_1 = C_2 = C_3 = 1$.

まず，invariant なノードモデルを適用したときの CTM・LTM における定常的な交通流パターンを導出しよう．この場合，境界条件から求められる demand・supply 関数の初期条件 D_a, S_a を用いることにより，各リンクの定常交通流率は以下のように求めることができる：

$$q_u = \min\{D_a, \theta q_{a,m}\}, \quad u = \{1,2\} \tag{54}$$

$$q_3 = q_1 + q_2, \tag{55}$$

$$\text{where} \quad \theta = \min\left\{1, \max_{I_1} \frac{s_3 - \sum_{a \in I_j \setminus I_1} D_a}{\sum_{a' \in I_1} C_{a'}}\right\}. \tag{56}$$

ここで θ は，各リンクの容量に対してどれだけの割合の交通流率が流れうるのかを定める係数であり，容量に対する demand 関数の比率 $D_a/q_{a,m}$ がこの値より大きいリンクは定常状態において渋滞流となる．

CTM では，次に示すようなリーマン問題の解として，定常状態における各リンクの交通流率を求めることが

できる [56),54)]：

$$U_1(0, x_1) = (D_1, S_1) = (1, 1), x_1 \in (-\infty, 0) \tag{57}$$

$$U_2(0, x_2) = (D_2, S_2) = \left(\frac{1}{4}, 1\right), x_2 \in (-\infty, 0) \tag{58}$$

$$U_3(0, x_3) = (D_3, S_3) = (0, 1), x_3 \in (0, \infty). \tag{59}$$

demand・supply 関数の初期条件は $D_1 = 1, D_2 = \frac{1}{4}, S_3 = 1$ と求められ，これらを用いることにより定常状態における各リンクの交通流率は次のように導出される：

$$(q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1\right). \tag{60}$$

ここで，$\theta = \frac{3}{4}$ であり，初期条件と比較することでリンク 1 は渋滞流，リンク 2 は自由流の状態にあることが分かる．

次に，LTM における定常的な交通流パターンを導出しよう．ネットワーク上の各リンクが定常状態にあるとき，リンク a の demand・supply 関数，定常状態における交通流率 q_a は次のように与えられる：

$$D_a = \min\left\{q_a + J\left(\beta_a\left(1 - \frac{q_a}{q_{a,m}}\right)k_{a,j}\right), q_{a,m}\right\}, \tag{61}$$

$$S_a = \min\left\{q_a + J\left((1 - \beta_a)\left(1 - \frac{q_a}{q_{a,m}}\right)k_{a,j}\right), q_{a,m}\right\}, \tag{62}$$

$$q_1 = \min\{d_1^-, s_1\},\ q_2 = \min\{d_2^-, s_2\},\ q_3 = \min\{d_3, s_3^+\}. \tag{63}$$

$\beta_a \in [0, 1]$ は，定常状態でのリンク長に対する混雑流領域の長さの比率である．ここで，リンク 3 において，容量と流出可能交通流率の関係から $q_3 \leq C_3 = s_3^+ = 1$ が成立する．よって定常状態では待ち行列が存在せず自由流状態となり，$s_3 = 1$ かつ $q_3 \leq 1$ が成立する．またリンク 1 についても，容量と流入可能交通流率の関係からこのリンクは渋滞流状態となり，$d_1 = 1$ かつ $q_1 \leq 1$ が成立することが分かる．さらに，リンク 2 においては β_2 が取る値に対応して，次の 3 つの定常状態が存在しうることが分かる：

$$\begin{cases} d_2 = \frac{1}{4},\ q_2 = \frac{1}{4},\ \beta_2 = 0, \\ d_2 = 1,\ q_2 = \frac{1}{4},\ \beta_2 \in (0, 1), \\ d_2 = 1,\ q_2 \leq \frac{1}{4},\ \beta_2 = 1. \end{cases} \tag{64}$$

以上の定式化に対して (54)-(56) を適用することにより，定常状態における交通流率及びリンク長に対する混雑流領域の長さは次のように求められる：

$$(q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1\right),\ (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1, 0, 0). \tag{65}$$

従って，invariant なノードモデルでは CTM と LTM は等価な解を導出することが確認できる．

では，ノード i に non-invariant なノードモデルを適用した場合の交通流パターンを導出しよう．non-invariant なノードモデルを適用したネットワークにおいては，各リンクの定常的な交通流率は次のように求められる：

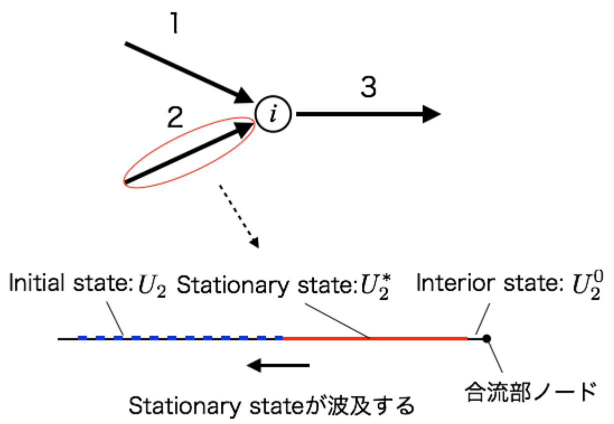
$$q_1 = \frac{D_1}{D_1 + D_2}\min\{D_1 + D_2, s_3\} = \frac{1}{1 + D_2}, \tag{66}$$

$$q_2 = \frac{D_2}{D_1 + D_2}\min\{D_1 + D_2, s_3\} = \frac{D_2}{1 + D_2}. \tag{67}$$

まず，CTM にこのノードモデルを適用してみよう．demand 関数の初期条件を用いると，

$$(q_1, q_2) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{4}}, \frac{\frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right), \tag{68}$$

となり，invariant なノードモデルを適用した結果とは異なる交通流パターンが導かれることが分かる．さらに，LTM においては (64) のどの定常状態も (67) を満たさず，定常状態における解は存在しない．すなわち，等価な境界条件を用いたにも関わらず non-invariant なノードモデルを素朴に適用した場合，CTM と LTM により導出される解は等価ではなくなることが分かる．



図–19: リーマン問題の解の構造

c) Interior State

Non-invariant なノードモデルを適用したときに解やその性質が変化する理由は，合流部ノード近傍における interior state と呼ばれる交通状態の存在にある．この interior state はリーマン問題における弱解の概念を拡張したものであり，合流部ノードの上・下流リンクにおいて交通流パターンが不連続に変化する場合の過渡部における交通状態を示している [54)]．図 19 に interior state を含めたリーマン問題の解の概念図を示す．従って，ネットワーク上の交通流をノードモデルを用いて求める際には，実際にはこの interior state における demand 関数を用いる必要があり，この概念を導入することにより物理的に意味のある解を求めることができる．このとき，invariant なノードモデルを適用した場合では interior state における交通状態とリンク内部の定常的な交通状態は一致する．しかし，non-invariant なノードモデルを適用した場合これらの交通状態は異なることがあるため，interior state を明示的に考慮して交通流パターンを求める必要がある [54)]．

この interior state の概念を用いて，CTM に non-invariant なノードモデルを適用した場合の交通流パターンを再度導出しよう．demand 関数の初期条件を用いると，interior state における demand 関数 D_a^0 は次のように求められる[54)]：

$$D_1^0 = D_1 = 1,\ D_2^0 = \frac{C_2}{S_3 - D_2} D_2 = \frac{1}{3}. \tag{69}$$

これを (67) に代入することにより，定常状態における交通流率は

$$(q_1, q_2) = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}, \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} \right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right), \tag{70}$$

となり，invariant なノードモデルを適用した場合と一致することがわかる．この解析結果から考察されるように，CTM の連続な定式化においては invariant なノードモデルと non-invariant なノードモデルは等価である．なお，LTM においては，現在 non-invariant なノードモデルを適用した際に，interior state を明示的に考慮するようなアプローチは存在しない．このために先の計算例では解が存在しなくなったと考えることができる．

5. おわりに

本稿では，道路上の交通流ダイナミクスを記述する標準的な枠組みである Kinematic Wave (KW) 理論の近年の展開に関するレビューを行った．具体的には，まず，KW 理論に関する従来の解析法を概説しその限界を述べた上で，交通流の変分理論 (VT) を解説した．また，この理論の応用として，様々な座標系（Euler 座標系，Lagrange 座標系）が VT の枠組みにより統一的に記述されることをみた．後半では，上記の単一道路（リンク）上での理論をネットワーク拡張するための理論を解説した．ここでは，ノードにおいて物理的に意味のある交通流を決める手法およびリンク・ノードの交通流を整合的に記述する手法について述べた．

ただし，本稿では，まだ様々な概念やそれらの関係を完全に整理しきれていない部分が存在する．そのため，今後はそれらの整理を進めるとともに今後の課題や将来展望についてもまとめ，発表会では議論を行う予定である．

参考文献

1) Greenshields, B. D.: The photographic method of studying traffic behavior, *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the Highway Research Board*, pp. 382–399, 1934.
2) Greenshields, B. D.: A study of traffic capacity, *Proceedings of the 14th Annual Meeting of the Highway Research Board*, pp. 448–477, 1935.
3) Lighthill, M. J. and Whitham, G. B.: On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol.229, No.1178, pp.317–345, 1955.
4) Lighthill, M. J. and Whitham, G. B.: On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol.229, No.1178, pp.281–316, 1955.
5) Richards, P. I.: Shock waves on the highway, *Operations Research*, Vol.4, No.1, pp.42–51, 1956.
6) Newell, G. F.: A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, part I: General theory, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.27, No.4, pp.281–287, 1993.
7) Newell, G. F.: A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, part III: Multi-destination flows, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.27, No.4, pp.305–313, 1993.
8) Newell, G. F.: A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, part II: Queueing at freeway bottlenecks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.27, No.4, pp.289–303, 1993.
9) Daganzo, C. F.: The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.28, No.4, pp.269–287, 1994.
10) Daganzo, C. F.: The cell transmission model, part II: Network traffic, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.29, No.2, pp.79–93, 1995.
11) Daganzo, C. F.: A variational formulation of kinematic waves: basic theory and complex boundary conditions, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.39, No.2, pp.187–196, 2005.
12) Daganzo, C. F.: A variational formulation of kinematic waves: Solution methods, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.39, No.10, pp.934–950, 2005.
13) Lebacque, J.-P. and Khoshyaran, M. M.: First–order macroscopic traffic flow models: Intersection modeling, network modeling, *Proceedings of the 16th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, pp. 365–386, 2005.
14) Hoogendoorn, S. P. and Bovy, P. H. L.: State-of-the-art of vehicular traffic flow modelling, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, Vol.215, No.4, pp.283–303, 2001.
15) Mohan, R. and Ramadurai, G.: State-of-the art of macroscopic traffic flow modelling, *International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics*, Vol.5, No.2-3, pp.158–176, 2013.
16) Edie, L. C.: Discussion of traffic stream measurements and definitions, *Proceedings of the 2th International Symposium on the Theory of Traffic Flow*, (Ed. by J. Almond), pp. 139–154, Paris, 1963, OECD.
17) Moskowitz, K.: Discussion of 'freeway level of service as influenced by volume and capacity characteristics' by D. R. Drew and C. J. Keese, *Highway Research Record*, No.99, pp.43–44, 1965.
18) Makigami, Y., Newell, G. F. and Rothery, R.: Three-dimensional representation of traffic flow, *Transportation Science*, Vol.5, No.3, pp.302–313, 1971.
19) Lebacque, J. P.: The Godunov scheme and what it means for first order traffic flow models, *Proceedings of the 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, (Ed. by J. B. Lesort), pp. 647–677, Elsevier, 1996.
20) Evans, L. C.: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2002.
21) Kuwahara, M.: Theory, solution method and applications of kinematic wave, *Interdisciplinary Information Sciences*, Vol.21, No.1, pp.63–75, 2015.
22) Luke, J. C.: Mathematical models for landform evolution,

Journal of Geophysical Research, Vol.77, No.14, pp.2460–2464, 1972.

23) Mehran, B., Kuwahara, M. and Naznin, F.: Implementing kinematic wave theory to reconstruct vehicle trajectories from fixed and probe sensor data, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol.20, No.1, pp.144–163, 2012.
24) 赤松隆・和田健太郎: 動的な交通ネットワーク流問題, 第 *26* 回 *RAMP* シンポジウム論文集, pp. 31–46, 2014.
25) Daganzo, C. F.: On the variational theory of traffic flow: well-posedness, duality and applications, *Networks and Heterogeneous Media*, Vol.1, No.4, pp.601–619, 2006.
26) Leclercq, L., Laval, J. A. and Chevallier, E.: The Lagrangian coordinates and what it means for first order traffic flow models, *Transportation and Traffic Theory 2007*, (Ed. by R. Allsop, M. Bell, and B. Heydecker), pp. 735–753, Elsevier, 2007.
27) Laval, J. a. and Leclercq, L.: The Hamilton–Jacobi partial differential equation and the three representations of traffic flow, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.52, pp.17–30, 2013.
28) Wagner, D. H.: Equivalence of the Euler and Lagrangian equations of gas dynamics for weak solutions, *Journal of Differential Equations*, Vol.68, No.1, pp.118–136, 1987.
29) Daganzo, C. F.: Singularities in kinematic wave theory: Solution properties, extended methods and duality revisited, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.69, pp.50–59, 2014.
30) Daganzo, C. F.: Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.29, No.4, pp.277–286, 1995.
31) Aw, A., Klar, A., Rascle, M. and Materne, T.: Derivation of continuum traffic flow models from microscopic follow-the-leader models, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol.63, No.1, pp.259–278, 2002.
32) Jin, W.-L.: On the equivalence between continuum and car-following models of traffic flow, *arXiv preprint arXiv:1501.05889*, 2015.
33) Newell, G. F.: A simplified car-following theory: a lower order model, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.36, No.3, pp.195–205, 2002.
34) 福田大輔: データ同化アプローチによる交通状態の推定に関する研究動向, 交通工学, Vol.47, No.2, pp.33–38, 2012.
35) Yuan, Y., van Lint, J. W. C., Wilson, R. E., van Wageningen-Kessels, F. and Hoogendoorn, S. P.: Real-time Lagrangian traffic state estimator for freeways, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Vol.13, No.1, pp.59–70, 2012.
36) Blandin, S., Couque, A., Bayen, A. M. and Work, D. B.: On sequential data assimilation for scalar macroscopic traffic flow models, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol.241, No.17, pp.1421–1440, 2012.
37) van Wageningen-Kessels, F., van Lint, H., Hoogendoorn, S. P. and Vuik, K.: Lagrangian formulation of multiclass kinematic wave model, *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, Vol.2188, pp.29–36, 2010.
38) Nagel, K. and Schreckenberg, M.: A cellular automaton model for freeway traffic, *Journal de Physique I*, Vol.2, No.12, pp.2221–2229, 1992.
39) Laval, J. a. and Daganzo, C. F.: Lane-changing in traffic streams, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.40, No.3, pp.251–264, 2006.
40) Shiomi, Y., Taniguchi, T., Uno, N., Shimamoto, H. and Nakamura, T.: Multilane first-order traffic flow model with endogenous representation of lane-flow equilibrium, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2015.
41) Costeseque, G. and Duret, A.: Mesoscopic multiclass traffic flow modeling on multi-lane sections, *Transportation Research Board 95th Annual Meeting*, 2016, ¡hal-01250438v2¿.
42) Newell, G. F.: A moving bottleneck, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.32, No.8, pp.531–537, 1998.
43) Sumalee, A., Zhong, R., Pan, T. and Szeto, W.: Stochastic cell transmission model (SCTM): A stochastic dynamic traffic model for traffic state surveillance and assignment, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.45, No.3, pp.507–533, 2011.
44) Jabari, S. E. and Liu, H. X.: A stochastic model of traffic flow: Theoretical foundations, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.46, No.1, pp.156–174, 2012.
45) 和田健太郎・臼井健人・大口敬・井料（浅野）美帆: 交通流の変分原理に基づく信号路線の期待遅れ時間の評価法, 投稿中, 2016.
46) 高安杏奈・原祐輔・和田健太郎・桑原雅夫: 入力データの確率変動を考慮した交通状態推定—variational theory に基づいた解析と検証—, 土木計画学研究・講演集, Vol. 53, pp. 48–06 (CD–ROM), 2016.
47) Jabari, S. E.: Node modeling for congested urban road networks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.91, pp.229–249, 2016.
48) Tampère, C. M., Corthout, R., Cattrysse, D. and Immers, L. H.: A generic class of first order node models for dynamic macroscopic simulation of traffic flows, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.45, No.1, pp.289–309, 2011.
49) Flötteröd, G. and Rohde, J.: Operational macroscopic modeling of complex urban road intersections, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.45, No.6, pp.903–922, 2011.
50) Gibb, J.: Model of traffic flow capacity constraint through nodes for dynamic network loading with queue spillback, *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, Vol.2263, No.1, pp.113–122, 2011.
51) Smits, E.-S., Bliemer, M. C., Pel, A. J. and van Arem, B.: A family of macroscopic node models, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.74, pp.20–39, 2015.
52) Corthout, R., Flötteröd, G., Viti, F. and Tampère, C. M.: Non-unique flows in macroscopic first-order intersection models, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.46, No.3, pp.343–359, 2012.
53) Yperman, I.: *The Link Transmission Model for dynamic network loading*, 2007.
54) Jin, W.-L.: A kinematic wave theory of multi-commodity network traffic flow, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.46, No.8, pp.1000–1022, 2012.
55) Jin, W.-l.: Continuous formulations and analytical properties of the link transmission model, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.74, pp.88–103, 2015.
56) Holdent, H. and Risebro, N. H.: A mathematical model of traffic flow on a network of undirectional roads, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol.26, No.4, pp.999–1017, 1995.

(2016. 7. 30 受付**)**

RECENT EXTENSIONS OF KINEMATIC WAVE THEORY OF TRAFFIC FLOWS: VARIATIONAL FORMULATION AND NETWORK EXTENSIONS

Kentaro WADA, Toru SEO, Wataru NAKANISHI, Masami YANAGIHARA and Koki SATSUKAWA